ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

គណិតវិទ្យាសម្រាប់កុំព្យូទ័រ

Discrete Mathematics

រៀបចំដោយ៖ សាកលវិទ្យាល័យ ហេង សំរិន ត្បូងឃ្មុំ

UNIVERSITY OF HENG SAMRIN THBONGKHMUM

សៀវភៅ គណិតវិទ្យាកុំព្យូទ័រ

BOOKS OF DISCRETE MATHEMATICS

សម្រាប់និស្សិតឆ្នាំទី២

អ្នកនិពន្ធ **លោក មាច មន**

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ **លោក យិន បំណាច ប្រធាន**
លោក កែវ តុងហេង អនុប្រធាន
លោក កាន់ លីហេង សមាជិក

សាកលវិទ្យាល័យ ហេង សំរិន ត្បូងឃ្មុំ
បោះពុម្ព ២០២១

អាសយដ្ឋានៈ ផ្លូវជាតិលេខ៧៣ ភូមិនិគមលើ ឃុំស្រឡប់ ស្រុកត្បូងឃ្មុំ ខេត្តត្បូងឃ្មុំ
ទូរសព្ទ: (៨៥៥) ១២ ៧៣ ៤២ ៣៣ (៨៥៥) ១២ ៧៩ ៧៨ ៧៩
website: www.uhst.edu.kh

មាតិកា **ទំព័រ**

មុខកថា

ដំណើរអភិវឌ្ឍនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជានៅក្នុងយុគសម័យទំនើបនេះ ជាមេរៀនដ៏ជោគជ័យបំផុតមួយដែលចាប់ឫសគល់ចេញពីការបញ្ចប់របបប្រល័យពូជសាសន៍ ការបញ្ចប់សង្គ្រាម ការផ្សះផ្សារជាតិ ការកសាងមូលដ្ឋានរឹងមាំនៃសន្តិភាពនិងស្ថេរភាព និងការអភិវឌ្ឍសេដ្ឋកិច្ច។ នៅក្រោយពេលដែលសន្តិភាពត្រូវបានកើតឡើងដោយបរិបូរណ៍នៅឆ្នាំ១៩៩៨ កម្ពុជាទទួលកំណើនសេដ្ឋកិច្ចខ្ពស់ គឺប្រមាណ៨% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ លើសពីនេះទៀត អត្រានៃភាពក្រីក្រត្រូវបានកាត់បន្ថយពីប្រមាណ៥៣% នៅឆ្នាំ២០០៤ មកនៅទាបជាង ១០% នៅឆ្នាំ២០១៩។ ដំណើរនៃការអភិវឌ្ឍជាតិជាសកម្មភាពដែលបន្តទៅមុខជាប់ជានិច្ច ហើយគោលនយោបាយថ្មីៗដែលមានលក្ខណៈអន្តរវិស័យគ្របដណ្ដប់ ក៏កំពុងលេចរូបរាងឡើង ដើម្បីតម្រង់ទិសកម្ពុជាឆ្ពោះទៅកាន់ប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលមធ្យមកម្រិតខ្ពស់នៅឆ្នាំ២០៣០ និងឈានឡើងជាប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលខ្ពស់ នៅឆ្នាំ២០៥០។ ការប្រែប្រួលឆាប់រហ័សនៃនិម្មាបនកម្មពិភពលោកនិងតំបន់ រួមទាំងទំនាក់ទំនងភូមិសាស្ត្រនយោបាយ បានផ្តល់កាលានុវត្តភាពសម្រាប់ការអភិវឌ្ឍឧស្សាហកម្មនៅកម្ពុជា ដែលត្រូវបានរាជរដ្ឋាភិបាលចាត់ទុកជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃកំណើនសេដ្ឋកិច្ចកម្ពុជា។ រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជាបាន និងកំពុងបន្តពង្រឹង និងអភិវឌ្ឍវិស័យអប់រំឆ្ពោះទៅរកការស្រាវជ្រាវ និងនវានុវត្តន៍ ដើម្បីពង្រឹងសមត្ថភាពនិងជំនាញរបស់ធនធានមនុស្សនៅកម្ពុជា ឱ្យស្រុបទៅនឹងបរិបទថ្មីនៃការអភិវឌ្ឍ ជាពិសេសការពង្រឹងសហគ្រិនភាពក្នុងការរៀបចំម៉ូដែលធុរកិច្ចថ្មីៗ។ ដើម្បីចាប់យកកាលានុវត្តភាពពីបដិវត្តន៍ឧស្សាហកម្មទី៤ និងសេដ្ឋកិច្ចឌីជីថលដែលកំពុងផុសផុលឡើង ប្រព័ន្ធអេកូឡូហ្ស៊ីដែលបង្កលក្ខណៈអំណោយផលដល់ការបង្កើតថ្មី នវានុវត្តន៍ ការស្រាវជ្រាវ និងអភិវឌ្ឍន៍ ត្រូវតែមានការកែលម្អ។

បណ្តាប្រទេសនៅទ្វីបអាស៊ីកំពុងនាំមុខក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ដោយ មានភាគហ៊ុនប្រមាណ៤៤% នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក។ ប្រទេសចិនកំពុងបន្តកសាង ហេដ្ឋារចនាសម្ព័ន្ធនៃការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ក៏ដូចជាសមត្ថភាពមនុស្ស។ ផ្ទុយទៅ វិញ ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូង និងអាហ្វ្រិក កំពុងស្ថិតនៅឆ្ងាយពីការវិនិយោគនេះ ហើយជាលទ្ធផល ប្រទេសទាំងនោះក៏ពុំមានកំណើនសេដ្ឋកិច្ចគួរឱ្យកត់សម្គាល់ដែរ។ ទុនវិនិយោគសរុបលើការស្រាវ ជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍរបស់ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូនិងអាហ្វ្រិក មានប្រមាណ៥%នៃការវិនិយោគ ទាំងមូលរបស់ពិភពលោក ក្នុងពេលដែលតំបន់ទាំង២នេះមានប្រជាជនប្រមាណ២០%នៃប្រជាជន ពិភពលោក។ ប្រទេសចំនួន៦ដែលមានលំដាប់ខ្ពស់ជាងគេនៅក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ រួមមានសហរដ្ឋអាមេរិក ចិន ជប៉ុន អាល្លឺម៉ង់ ឥណ្ឌា និងកូរ៉េខាងត្បូង ដែលស្មើនឹងប្រមាណ ៧០%នៃទុនវិនិយោគសរុបរបស់ពិភពលោក។

តើចំណេះដឹង ផលិតផល និងសេវាកម្មថ្មីទាំងនេះកើតឡើងពីអ្វី? ហើយកើតឡើងដោយរបៀបណា? ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាកំពុងតែកសាងមូលដ្ឋានសម្រាប់ការត្រៀមខ្លួនទទួល និងប្រកួតប្រជែងក្នុងយុគសម័យបដិវត្តឧស្សាហកម្មទី៤ នៅក្នុងសេដ្ឋកិច្ចដែលផ្អែកលើពុទ្ធិ ហើយដែលប្រការនេះចាំបាច់តម្រូវឱ្យពលរដ្ឋកម្ពុជា ត្រូវក្លាយខ្លួនជាពលរដ្ឋឌីជីថល ពលរដ្ឋសកល និងពលរដ្ឋដែលប្រកបដោយការទទួលខុសត្រូវដែលមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ចែកចាយ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិដើម្បីទទួលមនុញ្ញផល និងរួមចំណែកក្នុងកំណើន។ ធនាគារពិភពលោកបានធ្វើការកត់សម្គាល់តាំងពីឆ្នាំ២០០២នូវបម្លាស់ប្តូរនៃមូលដ្ឋានសេដ្ឋកិច្ច ពីសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើកម្លាំងពលកម្ម និងធនធានអតិកម្ម (Labour and Resource Based

Economy) ទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិ (Knowledge Based-Economy) ដែលក្នុងន័យនេះ ពុទ្ធិគឺជាគន្លឹះនៃការអភិវឌ្ឍ។ អាស្រ័យហេតុនេះ នៅលើគន្លងដែលកម្ពុជាកំពុងធ្វើដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចឌីជីថល សង្គមកម្ពុជាត្រូវតែមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ជ្រើសរើស បន្សាំ បង្កើតមុខរបរ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិ ដើម្បីរក្សានិរន្តរភាពនៃកំណើន និងកែលម្អជីវភាពរស់នៅ។ សមត្ថភាពទាំងនេះ អាចកើតឡើងនៅពេលពលរដ្ឋកម្ពុជាមានឱកាសក្នុងការទទួលបានបទពិសោធន៍ពីការស្រាវជ្រាវ ការបណ្តុះគំនិតច្នៃប្រឌិត និងការស្វែងរកនវានុវត្តន៍។

កំណែទម្រង់វិស័យអប់រំ គឺជាការត្រួសត្រាយមាគ៌ាសម្រាប់ដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ និងប្រជាពលរដ្ឋប្រកបដោយភាពរស់រវើក។ តាមរយៈមូលដ្ឋានអប់រំ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិនឹងប្រមូលផ្តុំ បង្កើត និងចែករំលែក ទៅកាន់សមាជិកក្នុងសង្គមនូវសម្បទាអប់រំ ពិសេសគឺពុទ្ធិសម្បទា ក្នុងបុព្វហេតុនៃមនុស្សជាតិនិងឧត្តមប្រយោជន៍នៃប្រទេស។ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ គឺពុំគ្រាន់តែជាសង្គមដែលសម្បូរព័ត៌មានប៉ុណ្ណោះទេ តែជាសង្គមដែលប្រជាពលរដ្ឋអាចធ្វើបរិវត្តកម្មពីព័ត៌មានទៅជា មូលធនប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។ ការរីកចម្រើនទៅមុខជាលំដាប់នៃបច្ចេកវិទ្យានិងតំណភ្ជាប់ បានពង្រីកព្រំដែននៃការចូលទៅកាន់ និងការទទួលបានព័ត៌មានជាសកល ហើយដែលក្នុងន័យនេះ ការអប់រំនឹងបន្តវិវត្តទៅមុខនិងមានការផ្លាស់ប្តូរ។ សង្គមមួយដែលមានអំណាន និងរបាប់ជាបុរេលក្ខខណ្ឌនៃជីវភាពប្រចាំថ្ងៃនៃប្រជាពលរដ្ឋ ពេលនោះបំណិននៃអំណាន និពន្ធ និងការគណនាលេខនព្វន្ត គឺជាចលករនៃការរៀនរបស់សិស្ស។ ជាតុដ៏ចម្បងមួយដែលស្ថិតនៅក្នុងការកសាងសង្គមដែលប្រកបដោយ ពុទ្ធិគឺសៀវភៅសិក្សា ហើយការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សាជាប្រចាំគឺជានវានុវត្តន៍នៃវិស័យអប់រំដែលនាំទៅរកការសិក្សាពេញមួយជីវិតការអភិវឌ្ឍសម្បទាអប់រំ និងការចែករំលែកចំណេះដឹង។ មូលដ្ឋានអប់រំ ជាពិសេសគឺគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាត្រូវមានតួនាទីដែលប្រកបដោយការឆ្លើយតប ចំពោះតម្រូវការខាងលើនេះ។ សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំត្រូវបន្តសិក្សាជាប់ជានិច្ច តាមរយៈការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ហើយដែលសៀវភៅសិក្សាទាំងនេះនឹងក្លាយជា ស្ពាននៃទំនាក់ទំនងរវាងនវានុវត្តន៍នៃបច្ចេកវិទ្យា និងការរៀននិងបង្រៀននៅក្នុងថ្នាក់រៀន។

សង្គមដែលប្រកបពុទ្ធិ ក៏ជាសង្គមដែលបណ្តុះឱ្យមានរចនាសម្ព័ន្ធទន់នៃសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែក លើពុទ្ធិដែរ។ ឧទាហរណ៍ជាក់ស្តែងនៃបែបផែននេះរួមមាន Silicon Valley នៃសហរដ្ឋអាមេរិក សួនឧស្សាហកម្មវិស្វកម្មអាកាសយានយន្តនិងយានយន្តនៅទីក្រុង Munich ប្រទេសអាល្លឺម៉ង់ តំបន់ជីវបច្ចេកវិទ្យានៅក្រុង Hyderabad ប្រទេសឥណ្ឌា តំបន់ផលិតគ្រឿងអេឡិចត្រូនិកនិងសារគមនាគមន៍ ឌីជីថលនៅទីក្រុង Seoul ប្រទេសកូរ៉េខាងត្បូង ក៏ដូចជាសួនឧស្សាហកម្មថាមពល និងឥន្ធនគីមីសាស្ត្រនៃប្រទេសប្រេស៊ីល ហើយក៏នៅមានទីក្រុងនៃប្រទេសជាច្រើនទៀតនៅលើពិភពលោក។ លក្ខណៈសម្បត្តិនៃទីក្រុងទាំងនេះគឺការប្រើប្រាស់និន្នាការនៃការអភិវឌ្ឍដែលជំរុញ និងតម្រង់ទិសដោយចំណេះ ដឹង ហើយដែលចំណេះដឹងទាំងនោះកើតចេញជាដំបូងពីការវិនិយោគទៅលើគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា ស្ថាប័នស្រាវជ្រាវ មជ្ឈមណ្ឌលឧត្តមភាពនៃជំនាញជាន់ខ្ពស់ ការប្រកួតប្រជែងដោយគុណាធិបតេយ្យ និង ជាពិសេសគឺការបណ្តុះវប្បធម៌អំណាននិងនិពន្ធសៀវភៅ។ ល្បឿននៃការរីកចម្រើនផ្នែកពុទ្ធិ និងបច្ចេកវិទ្យាកំពុងមានសន្ទុះលឿនជាងអ្វីដែលសិស្ស និង

និស្សិតអាចទទួលបានពីគ្រូនៅគ្រឹះស្ថានសិក្សា ដែលធ្វើឱ្យគោលដៅនៃការអប់រំនៅពេលបច្ចុប្បន្ននេះ មានការប្រឈមខ្លាំងជាងពេលណាទាំងអស់។ ឧទាហរណ៍ ក្នុងមួយឆ្នាំ មានសៀវភៅជាង២,២លានចំណងជើងត្រូវបានសរសេរនិងបោះពុម្ព ដែលក្នុងនោះប្រទេសចិនមាន៤៤០ពាន់ ចំណែកឯសហរដ្ឋអាមេរិកមាន ៣០៥ពាន់ និងប្រទេសរុស្ស៊ីមាន ១២០ពាន់ចំណងជើង។

ខណៈពេលដែលបច្ចេកវិទ្យាកំពុងរីកចម្រើនជារៀងរាល់ថ្ងៃ មធ្យោបាយសម្រាប់អំណានក៏មានច្រើនជម្រើសសម្រាប់សិស្ស-និស្សិត និងសាធារណៈជន រួមមានការអានសៀវភៅ ការអានលើឧបករណ៍ អេឡិចត្រូនិក ការអានដោយប្រើទូរសព្ទវៃឆ្លាត និងការអានលើកុំព្យូទ័រ ដែលសុទ្ធសឹងជាមធ្យោបាយសំខាន់ៗដែលនាំអ្នកអានទាំងឡាយឱ្យសម្រេចគោលបំណងអានរបស់ខ្លួន។ ម្យ៉ាងវិញទៀត អំណានដោយប្រើមធ្យោបាយបច្ចេកវិទ្យាទំនើប ចំណាយពេលតិច ងាយស្រួលអាន និងជួយដល់បរិស្ថានមួយកម្រិតទៀត។ នាពេលបច្ចុប្បន្ន សិស្ស-និស្សិត និងសាធារណៈជនកម្ពុជាដែលស្រឡាញ់អំណានកំពុងតែប្រើប្រាស់មធ្យោបាយអំណានទាំងនេះ។ បើយើងក្រឡេកមើលទៅប្រទេសជឿនលឿន ទោះបីជាបច្ចេកវិទ្យារីកចម្រើនខ្លាំងយ៉ាងណា អំណានតាមរយៈសៀវភៅនៅតែមានសន្ទុះដដែល។ ម្យ៉ាងវិញទៀត បច្ចេកវិទ្យាអានបែបទំនើបតាមរយៈឧបករណ៍ទំនើប អាស្រ័យលើលទ្ធភាពនៃធនធានអប់រំឌីជីថល និងមាតិកាឌីជីថលគ្រប់គ្រាន់ដែលបានផលិត និងបង្ហោះចែកចាយសម្រាប់អំណាន។

ក្នុងបរិបទកម្ពុជា ជាពិសេសក្នុងបរិការណ៍នៃការផ្ទុះរីករាលដាលនៃជំងឺកូវីដ-១៩ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានជំរុញឱ្យមានបរិវត្តកម្មឌីជីថលនៅក្នុងអេកូស៊ីស្តែមនៃការអប់រំ ជាពិសេសការអប់រំ តាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិក និងការអប់រំពីចម្ងាយដើម្បីលើកកម្ពស់អំណាន តាមរយៈការផលិតមាតិកាឌីជីថលដែលមានភាពចំរុះ ការកសាងសមត្ថភាពផ្នែកតំណភ្ជាប់និងវេទិកាឌីជីថល ការពង្រីកវិសាលភាពនៃមជ្ឈមណ្ឌលទិន្នន័យ និងការលើកកម្ពស់គុណភាពនៃការផលិតធនធានអប់រំឌីជីថល គួបផ្សំ ជាមួយការចែកសន្លឹកកិច្ចការឱ្យសិស្សយកទៅរៀននៅផ្ទះ និងការចុះទៅជួបជាមួយសិស្សជាបណ្តុំនៅតាមសហគមន៍។ ក្នុងន័យលើកកម្ពស់អំណាន និងភាពសម្បូរបែបនៃធនធានសៀវភៅសិក្សា ឱ្យកាន់តែមានប្រសិទ្ធភាពនិងភាពសក្តិសិទ្ធិ និងផ្តល់ឱកាសអំណានកាន់តែច្រើនថែមទៀតដល់សិស្សានុសិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជន ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាលើកទឹកចិត្តនូវចំណុចមួយចំនួនដូចខាងក្រោម៖

1. សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំ សូមបន្តនិងបង្កើនការបោះពុម្ពស្នាដៃបន្ថែមទៀត ដើម្បីធ្វើឱ្យធនធានសម្រាប់អំណានកាន់តែសម្បូរបែប ជាពិសេសធនធានអំណានជាខេមរភាសា
2. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា សូមផ្តល់លទ្ធភាពគ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ និងនិស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សាអាចចូលរួមអាន និងសិក្សាស្រាវជ្រាវតាមគ្រប់លទ្ធភាពជាមួយធនធានអំណាន ជាពិសេសការរៀបចំឱ្យមានពេលវេលាសម្រាប់សហសិក្សា និងអំណានក្នុងបណ្ណាល័យ
3. សាស្ត្រាចារ្យតាមមុខវិជ្ជា និងអ្នកស្រាវជ្រាវតាមជំនាញឬវិស័យ ត្រូវរៀបចំដំណើរការរៀន បង្រៀន និងស្រាវជ្រាវដែលមានដាក់បញ្ចូលកិច្ចការស្វ័យសិក្សា សហសិក្សា ឬការស្រាវជ្រាវបណ្ណាល័យ ដែលតម្រូវឱ្យនិស្សិត ត្រូវអាននិងស្រាវជ្រាវជាមួយធនធានអំណាន

4. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងមជ្ឈមណ្ឌលស្រាវជ្រាវ ត្រូវខិតខំឱ្យអស់លទ្ធភាពក្នុងការបង្កើតបណ្ណាល័យ មជ្ឈមណ្ឌលរក្សាឯកសារ ឬមជ្ឈមណ្ឌលអប់រំឌីជីថល ជាដើម ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់និងនិស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា អាចទទួលបាន និងស្វែងរកប្រភពសម្រាប់អំណានកាន់តែសម្បូរបែប និងមានភាពបត់បែន ឆ្លើយតបតាមតម្រូវការអ្នកអាន
5. និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា ត្រូវខិតខំនិងចំណាយពេលអាន និងចាត់ទុកវប្បធម៌ និងអកប្បកិរិយាអំណានជាផ្នែកមួយ នៃពេលវេលានិងភាពស៊ីវិល័យនៃជីវិតប្រចាំថ្ងៃ
6. បងប្អូនជនរួមជាតិ ដែលជាមាតាបិតា ឬអ្នកអាណាព្យាបាល សូមជួយជំរុញនិងបង្កលក្ខណៈកាន់តែ ច្រើនថែមទៀត ជាពិសេសការលៃលកចំណាយនៅក្នុងគ្រួសារសម្រាប់ការទិញសម្ភារៈសិក្សា សៀវភៅអាន និងឧបករណ៍សម្រាប់អំណានដល់កូនៗ ដែលចាត់ទុកជាការវិនិយោគមួយដ៏សំខាន់ សម្រាប់ បង្កើនចំណេះដឹង និងអនាគតរបស់ពួកគេ។

ដោយមានការគាំទ្រពីក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ នៅឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា “មូលនិធិ ស.គ.ន” និងហៅជាភាសាអង់គ្លេសថា The Research Creativity and Innovation Fund ដែលហៅកាត់ជាភាសាអង់គ្លេសថា “RCI Fund”។ គោលដៅចម្បងនៃមូលនិធិនេះ គឺរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។ មូលនិធិ ស.គ.ន បានសម្រេចកំណត់ប្រធានបទ ជាអាទិភាពសម្រាប់ការគាំទ្រដោយមូលនិធិចំនួន៣ រួមមាន ឌីជីថលនីយកម្មសម្រាប់បដិវត្តឧស្សាហកម្ម៤.០ (Digitalization for IR.4.0) ការស្រាវជ្រាវអនុវត្តលើវិស័យកសិកម្ម (Applied Agricultural Research) និងការស្រាវជ្រាវគរុកោសល្យសតវត្សទី២១ (21st Century Pedagogy Research)។

ដោយមានការធ្វើអាទិភាពវូបនីយកម្មទៅលើទិសដៅនៃការប្រើប្រាស់ថវិកាមូលនិធិសម្រាប់ឆ្នាំ ២០២០ ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ និងក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានផ្តល់ការគាំទ្រដល់ការ **រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សា(Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា**។ គោលបំណងនៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា គឺដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ លើសពីនេះទៀតការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា មានគោលដៅដូចខាងក្រោម ៖

- ឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់និស្សិត នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា
- លើកកម្ពស់ទំនើបភាវូបនីយកម្ម និងឧត្តមានុវត្តន៍នៃការរៀននិងបង្រៀន និងការស្រាវជ្រាវនៅលើមុខវិជ្ជា កម្មវិធីសិក្សា ឬមុខជំនាញជាក់លាក់

- បង្កើនភាពស៊ីជម្រៅក្នុងការកសាងវិជ្ជាជីវៈនិងបទពិសោធន៍សម្រាប់ឋានៈសាស្ត្រាចារ្យ និងអ្នកស្រាវជ្រាវ
- រួមចំណែកដល់ការកសាងភាពជាសហគមន៍វិជ្ជាជីវៈ ការចែករំលែកបទពិសោធន៍ និងវប្បធម៌នៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានវាយតម្លៃខ្ពស់ចំពោះការបោះជំហានប្រកបដោយមនសិការវិជ្ជាជីវៈនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងបុគ្គលិកអប់រំទាំងអស់ ក្នុងការរៀបចំ រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រឹងសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូននិស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ សៀវភៅសិក្សាជាផ្នែកមួយនៃការទទួលស្គាល់គុណភាពអប់រំនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងជាធនធានសិក្សាដែលជាមូលដ្ឋានមួយដ៏សំខាន់ក្នុងការគាំទ្រដល់ការបង្រៀន និងរៀន ហើយត្រូវមានបរិមាណគ្រប់គ្រាន់ ឆ្លើយតបទៅនឹងកម្មវិធីអប់រំ និងតម្រូវការសិក្សាស្រាវជ្រាវ។ ជាគោលការណ៍ គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាទាំងអស់ ត្រូវមានសៀវភៅសិក្សាដែលប្រើជាគោលសម្រាប់មុខវិជ្ជានីមួយៗ។ ចំនួនសៀវភៅសិក្សាដែលគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ការស្រាវជ្រាវ និងការសិក្សារបស់និស្សិត ត្រូវមានយ៉ាងតិចមួយចំណងជើងក្នុងមួយមុខវិជ្ជា ហើយត្រូវតម្កល់យ៉ាងតិច២ច្បាប់ នៅក្នុងបណ្ណាល័យ ឬអាចរកបានតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិក។ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លើកទឹកចិត្តបន្ថែមទៀតជូនដល់គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋ និងឯកជនដែលបានស្នើសុំថវិកាមូលនិធិរួច សូមចូលរួមបន្ថែមទៀតដើម្បីបង្កើនចំនួនចំណងជើងសៀវភៅ។ ចំណែកគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋនិងឯកជនដែលពុំទាន់បានដាក់ពាក្យស្នើសុំ សូមចូលរួម ដើម្បីជាគុណប្រយោជន៍ដល់តម្រូវការដ៏ទទូច និងថ្លៃថ្លានៃនិស្សិតកម្ពុជាក្នុងការសិក្សា និងស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

សេចក្តីបញ្ជាក់
នៃមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍

សៀវភៅសិក្សានេះជាលទ្ធផលនៃការស្នើសុំអនុវត្តថវិកាមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ក្នុងគម្រោង**រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។** សៀវភៅសិក្សានេះ ត្រូវបានរៀបរៀង និពន្ធ ឬកែលម្អដោយមានការធានាអះអាងថាជាស្នាដៃរបស់អ្នកនិពន្ធផ្ទាល់ និងបានឆ្លងកាត់ត្រួតពិនិត្យ ផ្តល់យោបល់ និងវាយតម្លៃដោយក្រុមប្រឹក្សាអប់រំ ក្រុមប្រឹក្សាស្រាវជ្រាវ ឬក្រុមប្រឹក្សាដែលមានតម្លៃស្មើនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងតាមរយៈកិច្ចសន្យាដែលបានធ្វើឡើង និងដែលបានតម្កល់ទុកនៅមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។ រាល់ខ្លឹមសារ ការបកស្រាយ និងរូបភាព គឺជាជំហរនិងទស្សនៈផ្ទាល់របស់អ្នកនិពន្ធ ហើយ ពុំឆ្លុះបញ្ចាំង ឬជាតំណាងដល់មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ នៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ឡើយ។

អារម្ភកថា

យើងខ្ញុំបានគិតខិតខំរៀបរៀងសៀវភៅក្រោមប្រធានបទ គណិតវិទ្យាសម្រាប់កុំព្យូទ័រ និងការអនុវត្តនេះ ឡើងដោយយោងលើមូលហេតុនៃ កង្វះឯកសារជាភាសាខ្មែរ នូវមុវិជ្ជានេះ ការសិក្សារបស់និស្សិតនៅ **សាកលវិទ្យាល័យ ហេង សំរិន ត្បូងឃ្មុំ** ។ ជាមួយគ្នានេះដែរ យើងខ្ញុំបានខិតខំយកអស់កម្លាំងកាយ កម្លាំងចិត្ត បង្កើតជាស្នាដៃនេះដើម្បីចូលរួម បកស្រាយបំភ្លឺឱ្យងាយយល់ ឆាប់ចេះ ស៊ីជម្រៅ បានរហ័សបន្ទាប់ពីបានអាន និងពិចារណា ។

ស្នាដៃនេះ ត្រូវបានយើងខ្ញុំខិតខំរៀបចំសម្រិតសម្រាំង ស្របតាមការណែនាំរបស់សាស្ត្រាចារ្យនៃ **សាកលវិទ្យាល័យ ហេង សំរិន ត្បូងឃ្មុំ** ។ ក្នុងការស្រាវជ្រាវចងក្រង ស្នាដៃនេះ យើងបានជួបនូវការលំបាកជាច្រើនដោយខ្វះខាតទាំងបទពិសោធន៍ និងពេលវេលា ប៉ុន្តែទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ក៏យើងខ្ញុំមិនរាថយក្នុងការស្រាវជ្រាវនេះឡើយ ដោយបានខិតខំធ្វើស្នាដៃនៃវិទ្យាសាស្ត្រពិតមួយនេះបានសម្រេចជោគជ័យ និងលេចជារូបរាងឡើង ។ យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា វានឹងមានតម្លៃសម្រាប់មិត្តអ្នកអាន អ្នកសិក្សា ទាំងអស់ដែលត្រូវការវា។

យើងខ្ញុំសូមខន្តីអភ័យទោសទុកជាមុន ចំពោះកំហុសឆ្គងទាំងប៉ុន្មានដែលកើតមានឡើងនៅក្នុស្នាដៃនេះដោយអចេតនា ព្រោះចំណេះដឹង និងបទពិសោធន៍នៅមានកម្រិតនៅឡើយ។

ជាចុងក្រោយនេះក្នុងនាមយើងខ្ញុំជាគ្រូបង្រៀនកម្រិតឧត្តមនៃសាកលវិទ្យាល័យ **ហេង សំរិន ត្បូងឃ្មុំ** សូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅដល់មិត្តអ្នកអាន អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវទាំងអស់ ដែលបានចំណាយពេលវេលាដ៏មានតម្លៃក្នុងអានស្នាដៃនេះតាំងពីដើមរហូតដល់ចប់ និងសូមគោរពជូនពរមិត្តអ្នកអាន អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវទាំងអស់ឱ្យជួបតែសេចក្តីសុខគ្រប់ពេលវេលា។

ថ្ងៃ.................ខែ.................ឆ្នាំឆ្លូវ ត្រីស័ក ព.ស ២៥៦៥

ភ្នំពេញថ្ងៃទី................ ខែ .... គ.ស ២០២១

អ្នកនិពន្ធ

លោក មាច មន

ការឧទ្ទិសស្នាដៃ

ក្នុងនាមយើងជាអ្នកបន្តវេនពីរៀមច្បង និងដោយទទួលបាននូវការបណ្ដុះបណ្ដាលនូវទ្រឹស្ដីនានាពីសាកលវិទ្យាល័យ ភូមិន្ទភ្នំពេញ នូវចំណេះដឹងជំនាញគណិតវិទ្យាថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រ និងពីសាកលវិទ្យាល័យជាតិ ក្រុងវ៉ូរ៉ូញេស្ស នៃប្រទេសរុស្ស៊ី នូវចំណេះដឹងជំនាញគណិតវិទ្យាវិភាគថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រជាន់ខ្ពស់ និងជំនាញគណិតវិទ្យាម៉ូដែលគម្រូ ថ្នាក់បណ្ឌិត យើងខ្ញុំសូមឧទ្ទិសស្នាដៃនេះថ្វាយប្រគេន ជូនដល់ព្រះវិញ្ញាណក្ខន្ធនៃអតីតព្រះមហាក្សត្រខ្មែរ អតីតព្រះសង្ឃខ្មែរ វិញ្ញាណក្ខន្ធនៃវីរៈបុរសខ្មែរគ្រប់ជំនាន់ ដែលមានឧត្ដមគតិស្រឡាញ់យុត្តិធម៌ ស្នេហាជាតិ សាសនា ដ៏ពិតៗ និងដល់ជីដូន ជីតា សាច់ញាតិ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកមានគុណទាំងឡាយ ដែលបានចែកឋានទៅកាន់បរិលោកហើយ សូមឲ្យលោកទទួលបាននូវសេចក្ដីសុខ រួចចាកទុក្ខពីក្ដីលំបាកទាំងឡាយ សមតាមអ្វីដែលលោកបានប្ដូរផ្ដាច់មិនខ្លាចនឿយហត់ ក្នុងការបង្ហាត់បង្ហាញដល់យើងខ្ញុំរហូតទទួលបាននូវផ្លែផ្កាគួរជាទីមោទនៈនៅពេលនេះ។

យើងខ្ញុំសូមឧទ្ទិសស្នាដៃនេះ ឱ្យក្លាយជាឧបករណ៍បម្រើឱ្យសេចក្ដីត្រូវការនៃវិសាលភាពពុទ្ធិគ្រប់ពេលវេលា ព្រមទាំងយុវ័យមួយចំនួនធំដែលសេចក្ដីអស់សង្ឃឹមបានដុតបំផ្លាញគោលបំណងនៃការរៀនសូត្រ ពោលគឺពួកគេត្រូវបង្ខំចិត្តសាលារៀន លាវិទ្យាល័យ លាមហាវិទ្យាល័យទាំងទឹកភ្នែករហាម ទាំងក្ដីសោកស្ដាយហួសថ្លែងសម្ដែងចេញ ពោលគឺប្រកបដោយភាពឈឺចុកចាប់យ៉ាងអស្ចារ្យ មិនបានដោយភាពក្រីក្រ។ សេចក្ដីតោកយ៉ាកបែបនេះក្លាយទៅជា អនុស្សាវរីយ៍ដ៏គ្រោតគ្រាតពេញមួយជីវិត ដែលគប្បីយុវជន យុវតីខ្មែរស្វ័យសិក្សាស្វែងរកពុទ្ធិទាំងឡាយមកដាក់ក្នុងខួរក្បាលនៅពេលណាដែលខ្លួនអាច។

នៅចុងបញ្ចប់នៃពាក្យឧទ្ទិសនេះ យើងខ្ញុំសូមឧទ្ទិសពាក្យមួយឃ្លាលដែលចូលចិត្តជាងគេនៅក្នុងពេលកំពង់សិក្សាក្នុងមុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យានេះ ទុកជាការពិចារណាបន្តទៀតនៃអ្នកសិក្សាជំនាន់ក្រោយៗគឺ បញ្ហា និងការចេះឈឺចាប់ គឺជំរុញឱ្យយើងអាចបំភ្លេចខ្លួនយើងពេលខ្លះ ហើយតស៊ូក្រាញននៀលសិក្សាបានទៅមុខទៀត ដែលវាទាំងពីរខាងដើមនេះ បើកភ្នែកមនុស្សឆ្លាតភាគខ្លះឱ្យមើលឃើញដំណោះស្រាយទ្រឹស្ដីបទនៃជីវិតបន្ទាប់ពីពួកគេមានភ័ព្វសំណាងបានយល់អំពីទ្រឹស្ដីបទនៃអាពាហ៍ពិពាហ៍ ក្នុងគណិតវិទ្យារួចមក។

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

យើងខ្ញុំសូមលើកហត្ថាគោរពសម្តែងនូវកតញ្ញូតាធម៌ដ៏ខ្ពង់ខ្ពស់ និងសូមលំឱនកាយថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុតចំពោះ លោកយាយ លោកតា លោកឪពុក អ្នកម្តាយ របស់យើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នា ដែលបានផ្តល់កំណើត និងចិញ្ចឹមបីបាច់ថែរក្សា ទំនុកបម្រុងព្រមទាំងបានផ្តល់នូវ ដំបូន្មានប្រកបទៅដោយព្រហ្មវិហារធម៌ រហូតដល់កូនចៅបានរៀនសូត្រមានចំណេះដឹងសព្វថ្ងៃ។

យើងសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះ

អ៊ំប្រុស អ៊ំស្រី លោកពូ អ្នកមីង បងប្រុស បងស្រី ព្រមទាំងញាតិមិត្ត ទាំងអស់ដែលបានជួយទំនុកបម្រុង ទាំងស្មារតី សម្ភារនិងកម្លាំងកាយ កម្លាំងចិត្ត ក្នុងការរស់នៅ និងការសិក្សាស្រាវជ្រាវ របស់កូនចៅ ក្មួយ បង ប្អូន តាំងពីដើមរហូតបានរៀនសូត្រមានចំណេះដឹងដូចសព្វថ្ងៃនេះ។ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ គ្រប់មុខវិជ្ជា ទាំងអស់ដែលបានបង្រៀនយើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នាតាំងពីថ្នាក់ទី១រហូតដល់ប្រឡងជាប់សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ និងសាស្ត្រចារ្យ សាកលវិទ្យាធិការ **ឯកឧត្តម ពិន វណ្ណារ៉ូ** បុគ្គលិកការិយាល័យ នៅសាកលវិទ្យាល័យ ហេង សំរិន ត្បូងឃ្មុំ ដែលបានណែនាំ ផ្តល់ដំបូន្មានល្អៗ បង្កលក្ខណៈងាយស្រួលព្រមទាំងចំណេះដឹងគ្រប់បែបយ៉ាងតាំងពីដើមរហូតដល់ចប់ស្នាដៃនេះ។

ជាពិសេសជាងនេះទៅទៀត គុណដល់ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា និងមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។ យើងខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះលោកសាស្ត្រចារ្យ ដែលណែនាំរាល់នូវចំណុចខ្វះខាតជាច្រើនលើស្នាដៃនេះទាំងពីដើមរហូតដល់ចប់។

ចំពោះគុណូបការៈដ៏ថ្លៃថ្លានេះ កូនចៅ សូមថ្លែងអំណរគុណ កតញ្ញូតាធម៌ ជ្រាលជ្រៅគោរពចំពោះលោកអ្នកមានគុណទាំងពីរ លោកយាយ លោកតា អ៊ំប្រុស អ៊ំស្រី បងប្រុស បងស្រី ប្អូនប្រុស ប្អូនស្រី លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ សាស្ត្រាចារ្យ ទាំងអស់សូមឱ្យជួបតែពុទ្ធពរទាំងបួនប្រការគឺ អាយុ វណ្ណ សុខ និង ពល កុំបីឃ្លៀងឃ្លាតឡើយ។

អ្នកនិពន្ធ

នាម និងគោត្តនាម ៖ **លោក មាច មន**

អាស័យដ្ឋាន ៖ សង្កាត់និរោធ ខណ្ឌច្បារអំពៅ រាជធានីភ្នំពេញ

ស្ថាប័នការងារ ៖ សាកលវិទ្យាល័យហេង សំរិនត្បូងឃ្មុំ

ឯកទេស ឬមុខជំនាញ ៖ គណិតវិទ្យា

ប្រវត្តិការសិក្សា ៖ បណ្ឌិតផ្នែកគណិតវិទ្យាឆ្នាំ២០១៤ សាកលវិទ្យាល័យ រដ្ឋវ៉ារ៉ូញ៉េស្ស ប្រទេសរុស្ស៊ី

បទពិសោធន៍ការងារ ៖ គណិតវិទ្យា រយៈពេល ៧ឆ្នាំ

សេចក្តីផ្តើម

1.ចំណោទបញ្ហានៃការស្រាវជ្រាវ

គណិតវិទ្យាដើរតួនាទីយ៉ាងសំខាន់នៅក្នុងវិស័យផ្សេងៗ ជាពិសេសវិស័យវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកទេស។ គណិតសម្រាប់កុំព្យូទ័រគឺជាគណិតវិទ្យាមួយប្រភេទដែលសិក្សាទៅលើស្ថានភាពមិនជាប់ ។ គណិតវិទ្យាប្រភេទនេះមានការរីកចម្រើនយ៉ាងឆាប់រហ័សនៅក្នុងប៉ុន្មានទសវត្សន៍ចុងក្រោយនេះ ហើយត្រូវបានគេយកទៅសិក្សាលើផ្នែកជាច្រើននៅក្នុងវិស័យបច្ចេកទេស ជាពិសេសលើផ្នែកព័ត៌មានវិទ្យា ។

គណិតវិទ្យាសម្រាប់វិទ្យាសាស្ត្រ ជាផ្នែកមួយនៃគណិតវិទ្យាអនុវត្តន៍ ដែលជាវិទ្យាសាស្ត្រមួយទទួលបានការសិក្សាតាំងពីយូយាណាស់មកហើយ ។ ពិតណាស់ថាការសិក្សាទទួលបានលទ្ធផលជាច្រើន ប៉ុន្តែក្នុងការប្រើប្រាស់គឺមានការផ្លាស់ប្តូរជាខ្លាំង ពីព្រោះក្នុងយុគសម័យបញ្ចេកវីត្យាទំនើបនេះ ការគណនាបានពឹងផ្អែកភាគច្រើនលើឧបករណ៍អេឡិចត្រូនិក មានម៉ាស៊ីនគិតលេខ កុំព្យូទ័រ ទូរស័ព្ទដៃជាដើម។

2.មូលហេតុនៃការស្រាវជ្រាវ

ស្របតាមការលើកឡើងខាងលើនេះ យើងឃើញថាហេតុអ្វីចាំបាច់សិក្សាពី សំណុំ តក្កវិទ្យា អនុមាណរួមគណិតវិទ្យា ទំនាក់ទំនង អនុគមន៍ ចំនួនគត់ ទ្រឹស្តីបទទ្វេធានិងការគណនា ទំនាក់ទំនងកំណើននៃអនុគមន៍បង្គ ប្រូបាប៊ីលីតេអថេរដាច់? តើវាមានសារសំខាន់អ្វីទៀតក្នុងសម័យជឿនលឿននេះ?

គួររម្លឹកផងដែរថាទោះបីជាមានការជឿនលឿននិងប្រើប្រាស់យ៉ាងទូលាយនូវបច្ចេកវិទ្យាទំនើបយ៉ាងណាក៏ដោយក៏មុជាគណនា ការគណនាប្រើក្រដាសនិងប៊ិច នៅតែជាជាតុមិនអាចខ្វះបាន សម្រាប់ការសិក្សាលេខនព្វន្ត និងពីជគណិត ។ ជាពិសេសគឺក្នុងការប្រឡងនានា ដែលមិនអនុញ្ញាតឱ្យប្រើប្រាស់ម៉ាស៊ីនគិតលេខ ទូរស័ព្ទ ឬឧបករណ៍អេឡិកត្រនិកផ្សេងទៀតនោះ ។

3.គោលបំណងនៃការស្រាវជ្រាវ

ក្នុងកិច្ចការនេះយើងលើឡើងនូវការសិក្សាពីគណិតវទ្យាដោយបង្ហាញទ្រឹស្តីបទ និងការអនុវត្តជាឧបករណ៍សម្រាប់ករណីនីមួយៗផងដែរ ។

4.វិធីសាស្ត្រនៃការស្រាវជ្រាវ

ចំពោះការស្រាវជ្រាវរបស់ក្រុមយើងខ្ញុំបាទគឺបានធ្វើឡើងដោយការស្វែងរកឯកសារនៅក្នុងបណ្ណាល័យ និងនៅក្នុងអ៊ិនធឺណែត ដូចជា web: wikipedia ជាដើម ។

5.រចនាសម្ព័ន្ធនៃការស្រាវជ្រាវ

នៅក្នុងស្នាដៃដែលបានចងក្រងនេះ យើងបានបែងចែកជាប្រាំបួនជំពូកគឺ

- ជំពូក១ សំណុំ

- ជំពូក២ តក្កវិទ្យា
- ជំពូក៣ អនុមាណរួមគណិតវិទ្យា
- ជំពូក៤ ទំនាក់ទំនង
- ជំពូក៥ អនុគមន៍
- ជំពូក៦ ចំនួនគត់
- ជំពូក៧ ទ្រឹស្តីបទទ្វេធានិងការគណនា
- ជំពូក៨ ទំនាក់ទំនងកំណើននៃអនុគមន៍បង្គ
- ជំពូក៩ ប្រូបាប៊ីលីតេ

ជំពូកទី១ .ទ្រឹស្តីសំណុំ

1. និយមន័យ និង មូលដ្ឋានគ្រឹះ

ទ្រឹស្តីសំណុំគឺជាការសិក្សាមួយដែលលំបាកបំផុតនៅក្នុងគណិតវិទ្យា។តាមពិតគោលបំណងដើម្បីជំរុញទ្រឹស្តីសំណុំបែបទំនើបវាជាបំណងប្រាថ្នារបស់គណិតវិទូចង់បន្តភាពច្បាស់លាស់បំផុតផ្នែកគណិតវិទ្យា។ទោះបីជាលទ្ធផលក៏ដោយលទ្ធផលពិតប្រាកដក៏ដោយក៏មូលដ្ឋានគ្រឹះនៃគណិតវិទ្យាយើងប្រែជាមានលក្ខណៈអវិជ្ជមានហើយយើងគឺជាផលអវិជ្ជមាននៅក្នុងការប្រឈមមុខនឹងគំនិតនៃសំណុំ និងសញ្ញាណដែលត្រូវបានប្រើនៅក្នុងការអនុវត្តន៍នេះត្រូវបានបង្ហាញថាជាឧបករណ៍មិនអាចខ្វះបានក្នុងការសិក្សាគណិតវិទ្យានៅកម្រិតណាមួយ។

ជាការពិតយើងនឹងមិនបានឈានទៅកាន់ឱ្យលម្អិតនៅក្នុងសៀវភៅនេះទេ។នៅក្នុងនេះយើងនឹងសិក្សាកម្រិតទាមួយចំនួននៃសំណុំភាគច្រើននៃពួកគេគឺវិចារណញាណអាចយល់បានពីបទពិសោធន៍ជីវិតប្រចាំថ្ងៃរបស់យើង។ឧទាហរណ៍សិស្សទាំងអស់នៃសាកលវិទ្យាល័យស៊ីរ៉ាសៀស។គឺជាសំណុំមួយនិស្សិតទាំងអស់នៅសហរដ្ឋអាមេរិកនៃសហរដ្ឋអាមេរិកគឺជាសំណុំរងនៃនិស្សិតនៅសកលវិទ្យាល័យស៊ីរ៉ាសៀស។ចាប់តាំងពីដេនីសគឺជាសិស្សនៅសាកលវិទ្យាល័យស៊ីរ៉ាសៀសគាត់គឺជាសមាជិកនៃក្រុមនិស្សិតនៃសាកលវិទ្យាល័យស៊ីរ៉ាសៀស។និស្សិតខ្លះនៃសាកលវិទ្យាល័យស៊ីរ៉ាសៀសក៏ជានិស្សិតនៃសាកលវិទ្យាល័យខរនេលដែរប៉ុន្តែគ្មាននរណាម្នាក់ក្នុងចំណោមពួកគេជានិស្សិតនៃសាកលវិទ្យាល័យស្ទែនហ្វដឡើយ។ល។ប្រយោគខ្លះខាងលើមានភាពធ្គងបន្តិចប៉ុន្តែយើងដោះស្រាយដោយមិនគិតថាហត់ច្រើនពេកទេ។ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយនៅពេលគណិតវិទូចូលមកដើម្បីដោះស្រាយជាមួយវត្ថុគណិតវិទ្យាដែលជារឿយៗត្រូវមានទំនាក់ទំនងខ្លះដែលស្មុគស្មាញជាងការពិពណ៌នាដែលយើងបានប្រើនៅក្នុងប្រយោគខាងលើ។ជាសំណាងល្អគំនិតនិងលក្ខណៈសម្បត្តិបន្ទាន់មួយចំនួននៅក្នុងសំណុំទ្រឹស្តីផ្តល់ឱ្យយើងនូវការកត់សម្គាល់សាមញ្ញប៉ុន្តែច្បាស់លាស់ដើម្បីធ្វើឱ្យការងាររបស់យើងកាន់តែងាយស្រួល។បន្ថែមលើការអនុញ្ញាតឱ្យអ្នកអានស៊ាំជាមួយពាក្យមូលដ្ឋានគ្រឹះនិងលក្ខណៈសម្បត្តិនៃសំណុំគោលបំណងមួយទៀតនៃជំពូកនេះគឺដើម្បីឱ្យអ្នកអានត្រូវបានប្រើអាគុយម៉ង់គណិតវិទ្យាយ៉ាងម៉ត់ចត់ដោយឆ្លងកាត់ភស្តុតាងជាជំហានៗ។

1.1.1 និយមន័យ

<u>**និយមន័យ**1.1</u>: សំណុំ S គឺជាការប្រមូលផ្តុំនៃវត្ថុផ្សេងពីគ្នាដោយគ្មានលំដាប់លំដោយនៃការយល់ឃើញរបស់សមតិកម្មដែលពណ៌នានូវវិធីសាស្រ្តដែលសម្រេចបាន។ពួកយើងតែងតែប្រើដង្កៀបមួយគូ,{},ដើម្បីប្រមូលព័ត៌មានដែលពាក់ព័ន្ធ។

<u>**និយមន័យ**1.2</u>: សំណុំទទេគឺជាគ្មានអ្វីទាំងអស់ ដូចជា$\emptyset$ ឬ {} ។

និយមន័យ1.3: សំណុំសាកលគឺជាសំណុំទាំងមូលនៃកម្មវត្ថុនៃការសិក្សាដែលគេតាងអក្សរU។

និយមន័យ1.4: S សំណុំដែលនៅក្នុងសំណុំSដែលសៀវភៅមួយចំនួនដោយយោងតាមវត្ថុជាក់ស្តែង។

និយមន័យ1.5:ឧបមាថាaជាសំណុំមួយនៃសំណុំS។យើងនឹងដឹងថា$a \in S$។ លក្ខណៈត្រូវបានគេស្គាល់ដូចជាទំនាក់ទំនងនៃធាតុ។

និយមន័យ1.6: តាងA,Bជាសំណុំ។ដែលAជាសំណុំរងនៃB ប្រសិនបើគ្រប់ចំនួននៃAជារបស់B។យើងប្រើ $A \subseteq B$ដែលបង្ហាញថាAជាសំណុំរងនៃB។ប្រសិនបើ $A \neq B$,យើងអាចនិយាយបានថាAជាសំណុំរងពិតមួយដែលបង្ហាញថា $A \subset B$។

និយមន័យ1.7: តាងA,Bជាសំណុំ។ដែលប្រសព្វរវាងA និងB, ដែលបញ្ជាក់ថា$A \cap B$, សំណុំCគឺជាសំណុំមួយដូចសំណុំAនិងBដែរ។ នៅក្នុងតក្កសំណុំត្រូវបានកំណត់ថា $A \cap B$= $\{x|x \in A \& \in B\}$

និយមន័យ1.8:តាងA និងBជាសំណុំ ។ ប្រសិនបើ $A \cap B = \emptyset$ ដូច្នេះយើងអាចនិយាយបានថាវាជាសំណុំទទេ។

និយមន័យ1.9:តាងA និងBជាសំណុំ។ដែលAនិងBបង្ហាញថា $A \cup B$,ហើយសំណុំCក៏ដូចគ្នាផងដែរដែលជាAឬB។ នៅក្នុងតក្កសំណុំត្រូវបានកំណត់ថា A∪B=$\{x|x \in A or \in B\}$

និយមន័យ1.10: តាងA និងBជាសំណុំ។សំណុំA−Bដែលកំណត់ថា A−B=$\{x|x \in A \,\&\, X, B\}$

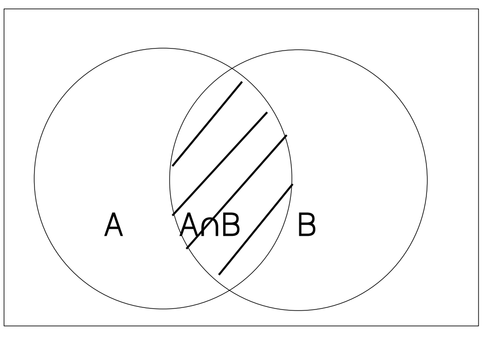
និយមន័យ1.11:តាងAនិងBជាសំណុំ។ផលគុណដេកាតនៃសំណុំAនិងB

$$A \times B = \left\{(a, b \middle| a \in A \text{ និង } b \in B\right\}$$

និយមន័យ1.12:តាងSជាសំណុំ។កាឌីណាល់នៃS ដែលបង្ហាញថា $|S|$,ហើយវាជាចំនួននៃធាតុ S[1]។

និយមន័យ1.13: តាងUជាសំណុំសាកល និងAជាសំណុំរង ដែល$\overline{A}$ =U−A ដែល$\overline{A}$ គឺជាសំណុំបំពេញបន្ថែមនៃសំណុំA។

និយមន័យ1.14: ដ្យាក្រាមវែន មានតួលេខដែលបង្ហាញពីទំនាក់ទំនងរវាងសំណុំ។ ឧទាហរណ៍:



និយមន័យ1.15: តាងAជាសំណុំ។ស្វ័យគុណនៃAបង្ហាញថា Pr(A)គឺជាសំណុំរងនៃAដែលតាងដោយ

$$\Pr(A) = \{S|SCA\}$$

1.1.2 ទ្រឹស្តីមូលដ្ឋាន

តារាងខាងក្រោមមានទ្រឹស្តីបទសំខាន់ៗបំផុតដែលត្រូវបានប្រើជាច្រើននូវទ្រឹស្តីរបស់រូបមន្តគណិតវិទ្យា ។ យើងមិនបង្ហាញចម្លើយនៅទីនេះទេប៉ុន្តែសួរពួកគេថាមានលំហាត់,យើងអាចនឹងមានលំហាត់និងបង្ហាញចម្លើយនៅក្នុងផ្នែកដំណោះស្រាយ។

ទ្រឹស្តីបទទី1.1 តាងAជាសំណុំដែលA∪ ∅=A; A∪ ∅=∅

ទ្រឹស្តីបទទី1.2 តាងAជាសំណុំដែលA∪ $A = A \cap A = A$

ទ្រឹស្តីបទទី1.3តាងA,Bជាសំណុំ ដែលបើA=Bនោះ(A⊂B&B⊂A)

ទ្រឹស្តីបទទី1.4 តាងA,B,C ជាសំណុំ ដែលបើ$(A \subset B \& B \subset C)$នោះA⊂ C

ទ្រឹស្តីបទទី1.5 តាងA,B ជាសំណុំ

$$A \subset A \cup B,\ \ B \subset A \cup B,$$
$$A \cup B \subset A, A \cap B \subset B$$

ទ្រឹស្តីបទទី1.6 លក្ខណៈត្រឡប់:តាងA,B ជាសំណុំ

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

ទ្រឹស្តីបទទី1.7 លក្ខណៈផ្តុំ: តាងA,B ,Cជាសំណុំ

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

ទ្រឹស្តីបទទី1.8 លក្ខណៈបំបែក: តាង A,B ,C ជាសំណុំ

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

ទ្រឹស្តីបទទី1.9 ច្បាប់De Morgan'sតាងA,B ជាសំណុំ

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

ទ្រឹស្តីបទទី1.10 តាងA,B ជាគ្មានកំណត់សំណុំ$|A| = |B|$ប្រសិនបើវាមានតែ អនុវត្តមួយនឹងមួយ

$$f: A \to B$$

1.1.3.លំហាត់

លំហាត់1 : កំណត់ថាតើវត្ថុនីមួយៗដូចខាងក្រោមជាធាតុនៃZ;{5},{3,1},7.12,√5,a=2,00 ខ្ទង់ទសភាគក្នុងកន្សោមគោល10សម្រាប់π

លំហាត់2: តាងAជាកន្សោមគោលដប់នៃ $\frac{41}{333}$ ។តាងBជាគោលដប់ $\frac{41}{333}$ ។នោះបង្ហាញថាA=B។

លំហាត់3: សម្រាយបញ្ជាក់:សំណុំC នៃប្រព័ន្ធគោលដប់នៃ $\frac{40363\ 63637}{3\ 33000\ 00000}$ ។ នាំឱ្យសំណើរAនៃប្រព័ន្ធ។

លំហាត់4: រកសំណុំ

$A = \{1, \{4\}, \{2\},3,4,5\},$

$B = \{\{\{1,4,5,3,1\}\}\}$

$C = \{1, \{3\},2,1\}$

$D = \{1,1,3\}$

$E = \{1,4, \{5\}, \{3\}\}$

$F = \{1,8\{1,2,3,4\}\}$

និង a_1=1,a_2={2},a_3={2,1},a_4={2,1,3,4},a_5={3,1,5}

កំណត់ពីa_1......a_5នីមួយៗ,ប្រសិនបើវាជាធាតុរបស់សំណុំA,......,F នីមួយៗ។ឥឡូវចម្លើយរបស់អ្នកគឺធ្វើទៅតាមតារាងខាងក្រោម៖

	A	B	C	D	E	F
a_1						
a_2						
a_3						
a_4						
a_5						

ប្រើ∈ដើម្បីឈរទៅលើទំនាក់ទំនងនៃធាតុ និងចំណុចមួយដែលមិនមានទំនាក់ទំនងរបស់ធាតុ។

លំហាត់5 រក$A, B, C, D, E,$ និង F នៅក្នុងលំហាត់ទី4។ចូរគណនាសំណុំខាងក្រោម៖

$A \cap C \quad B \cap F \quad D \cup C \quad C \cap E \quad C \cup (D \cap F) \quad A \cap E$

លំហាត់6 គេឱ្យ$U = \{3,1,3,2\}$

$V = \{1,3, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

តើ$U \in V$? តើ$U \subseteq V$?

លំហាត់7 តាងA,Bជាសំណុំ។ប្រសិនបើ$A \subset B$,តើវាអាចប្រាប់អ្នកថា$A \cap B$និង$A \cup B$ឬទេ ?

លំហាត់8 តាងA,B និងSជាសំណុំ។ប្រសិនបើ$A \subset S$,និង$B \subset S$តើវាអាចប្រាប់អ្នកថា $A \cup B$ឬទេ ?

លំហាត់9 រកកាឌីណាល់នៃសំណុំ $S = \left\{\frac{p}{q} \middle| p, q \in N^+, p, q, \leq 10\right\}$

លំហាត់10 គេមានសំណុំរងនៃ$\{1,2, \{b\}\}$

លំហាត់11 គេមានសំណុំនៃធាតុ$\{b, c, d\} \times \{e, 0\}$

លំហាត់12 រៀបរាប់ពីសំណុំរងទាំងអស់ដែលគ្មានលក្ខណៈ។

លំហាត់13 តាងA,B,Cជាសំណុំ។ឧបមារថាAជាសំណុំរងនៃB,និងCជាលក្ខណៈសំណុំរង នៃB។ តើA ជាលក្ខណៈសំណុំរងនៃCឬទេ ?

លំហាត់14 តាងA,Bជាសំណុំ។ដែលបាននឹងនិយមន័យដែលមានដូចខាងក្រោម

ប្រសិនបើ$x \in A \cup B, x \in A\ or\ x \in$វិធីដូចគ្នាដែលរួមបញ្ចូលទៅនឹងការប្រៀបធៀប។ យើងអាចនិយាយបានថាសម្រាប់សំណុំ X ប្រសិនបើ$X \subset (A \cup B)$ $X \subset A$ឬ$X \subset B$

<u>លំហាត់15</u> សម្រាយបញ្ជាក់ថា៖ប្រសិនបើ$(A \cup B) \subset (A \cap B)$ $A = B$

<u>លំហាត់16</u> តាងA,B,Cជាសំណុំ។ សម្រាយបញ្ជាក់ថា៖

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

<u>លំហាត់17</u> តាងA,B,Cជាសំណុំ។ សម្រាយបញ្ជាក់តាមច្បាប់ម៉ហ្គែន៖

1. $\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}$

2. $\overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}$

<u>លំហាត់18</u> តាងA,B,Cជាសំណុំសម្រាយថា៖$A - B = A \cap \overline{B}$

<u>លំហាត់19</u> តាងA,B,Cជាសំណុំសម្រាយថា៖$A - (A - B) = A \cap B$

<u>លំហាត់20</u> តាងA,B,Cជាសំណុំសម្រាយថា៖ $A \cap B = \emptyset\ A \subset \overline{B}$

<u>លំហាត់21</u> តាង $A \cap B = \emptyset$ដែលបង្ហាញថា៖ $A \cap \overline{B}$=A

<u>លំហាត់22</u> រកភាពខុសគ្នារបស់ឆ្លុះនៃសំណុំA,B ដូចជា៖ $A\Delta B: (A - B) \cup (B - A)$

ស្រាយបញ្ជាក់ពីភាពខុសគ្នារវាងលក្ខណផ្គុំនិង លក្ខណៈបំបែក។$A\Delta A = \emptyset$

<u>លំហាត់23</u> តាងA,Bជាសំណុំ។ដោយប្រើដ្យាក្រាមVennសម្រាប់បង្ហាញថា៖$A \subseteq B$លុះត្រាតែ $A \cap B = A$

<u>លំហាត់24</u> តាងA,B,Cជាសំណុំ។ដោយប្រើ

1. ដ្យាក្រាមវែន
2. សំណុំពិជគណិត
3. អាគុយម៉ង់អិបស៊ីឡោន

បង្ហាញភាពរៀងគ្នានៃ $B - C \subseteq \overline{A}$លុះត្រាតែ$A \cap B \subseteq C$

<u>លំហាត់25</u> តាងA:=$\{\alpha, 4\}$ និង B:=$\{a, 3\}$។ រក A×B។

<u>លំហាត់26</u> តាង A,B និងCជាសំណុំដែល៖ $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

<u>លំហាត់27</u> តាង A,B ជាសំណុំដែលបង្ហាញថាប្រសិនបើ$(A \times A) = (B \times B)$ បើ$A = B$

<u>លំហាត់28</u> តាង A,B ,U និងV ជាសំណុំដែលសំណុំផ្សេងទៀតដែល$A \subseteq U$ និង$B \subseteq V$ តើវាត្រឹមត្រូវដែរឬទេ ?ចូរពន្យល់។$(A \times B) \subseteq (U \times V)$

លំហាត់29 តាង A,B និងCជាសំណុំដែលបង្ហាញថា៖$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

លំហាត់30 តាង A,B និង ជាសំណុំដែល C≔ $A \cup B$ ប្រើលទ្ធផលដែលបានបង្ហាញនៅក្នុង លំហាត់29ដែល$A \times B \subseteq A \times C \subseteq C \times C$

លំហាត់31 តាង A ជាសំណុំដែលពន្យល់អត្ថន័យអង្កត់ទ្រូងនៃ$A \times A \coloneqq \{(a, a)|a \in A\}$

ឧបមាថា$A \subseteq B$បង្ហាញតាមតារាងខាងក្រោម៖

1.$(A \times B) \cap (B \times A) = B \times B$

2. អង្កត់ទ្រូងនៃ$(A \times A) \cap (A \times B) = B \times B$

លំហាត់32 តាង$X = \{1,2,3, a\}$ តារាងជាតុនៃP(X).

លំហាត់33 តាង X ជាសំណុំ $\{1,2,3,4,5,6\{1\}\}$ រក Y ដូចខាងក្រោម៖$Y = X \cup \big(X \cap P(X)\big)$

លំហាត់34 បង្ហាញតារាងជាតុខាងក្រោះ

1. $P(\emptyset)$
2. $P(\{\emptyset\})$
3. $P\big(P(\emptyset)\big)$
4. $\{\emptyset\} \times P(\emptyset)$
5. $\emptyset \times P(\emptyset)$
6. $P(\emptyset) \times P(\emptyset)$

លំហាត់35 បង្ហាញតារាងជាតុនៃ$A \times P(A)$, ដែល $A = \{a, 1\}$

លំហាត់36 តាង A;B ជាសំណុំ។បង្ហាញថា៖$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

លំហាត់37 ចូរបង្ហាញថា៖ បើ$A \in P(B) \& B \in P(A)$, ដែល A=B

លំហាត់38 តាង A ជាសំណុំនៃ ចំនួនវិជ្ជមាន និងBជាចំនួនអវិជ្ជមាន។បង្ហាញតាមកាឌីណាល់នៃ A គឺឱ្យស្មើនឹងកាឌីណាល់នៃ B. [តាមទ្រឹស្តីបទ 1.10 ទំព័រ 12]

លំហាត់39 បង្ហាញថាសំណុំ $A, |A| < |Pr(A)|$

1.1.4.ដំណោះស្រាយ

ដំណោះស្រាយ1

$\{5\} \in Z; \{5\}$គឺជាសំណុំ ទោះបីជាសំណុំបានកើតមានក្នុងរក្សាទុកចំនួនក៏ដោយ។ $\{3, -1\}$ ∈Z;$\{3, -1\}$ មិនមែនចំនួនសំណុំ។7.12 ∈ $\boldsymbol{Z}$

ចំណាំ៖ ទី1គួរតែនិយាយបានថា7.12ជាលេខពិតប្រាកដមួយ ដូច្នេះ7:12∈ $\boldsymbol{Z}$។ លេខមួយដែលពិតប្រាកដវាមិនមែនមានន័យថាវាមិនអាចជាចំនួនេពិតនោះទេ។សូមកុំភ្លេចថា Z ⊂ R វាមានន័យថាគ្រប់ចំនួនទាំងអស់គឺជាចំនួនពិត។

ចំណាំ៖ ទី១ មិនគួរតែមានបញ្ហានៅក្នុងចំណុច √5 ∈ Z។ មូលហេតុគឺតម្លៃនៃ√5 គឺមិនមែនចំនួននោះទេ។ យើងមិនអាចសន្និដ្ឋានបានថា√ មិនមែនជាលទ្ធផលនៃចំនួនដែលបញ្ចូលនោះទេ។ឧទាហរណ៍៖ √4 ∈ Z។ នៅក្នុងភាសាកម្មវិធីកុំព្យូទ័រ,រាល់ប្រភេទទិន្នន័យនៃ√4 អាចជាហេតុផលមួយដែលមិនច្បាស់លាស់។ប៉ុន្តែនៅក្នុងគណិតវិទ្យា√4ជាចំនួនមួយដែលមិនមែនជាបញ្ហាក្នុងដំណើរការកុំព្យូទ័រនោះទេ។

1. ទោះបីយ៉ាងណាក៏ដោយលេខវាអាចជាចំនួនមួយដែលពិតប្រាកដដូច្នេះ a ∈ Z។

ដំណោះស្រាយ2

$\frac{41}{333} = 0.\overline{123}$, and $\frac{44}{333} = 0.\overline{132}$

កន្លែងដែលបារមានន័យថាចំនួនគត់ត្រូវបានធ្វើឡើងម្តងទៀតតាមលំដាប់លំដោយ។ ដូច្នេះ,

$A = \{0,1,2,3\}$, និង $B = \{0,1,2,3\}$

ដូច្នេះ A = B.

ដំណោះស្រាយ3 យើងទទួលបាន៖

$\frac{4036363637}{33300000000} = 0.12121212\overline{123}$

ចំពោះ $C = \{0,1,2,3\}$ ដូច្នេះ $A = C$

ដំណោះស្រាយ4

	A	B	C	D	E	F
a_1						
a_2						
a_3						
a_4						
a_5						

សំណុំAមានធាតុ6ដូចជា 1, {4}, {2}, 3, 4, និង 5 ដែល a_1 និង a_2 គឺជារបស់ A។សំណុំBមានធាតុ1ដូចជា{{1; 3; 4; 5}}។ចូលមើលឧទាហរណ៍ផ្សេងទៀត។ Fមាន3ធាតុដូចជា៖1; 8 និង {1; 2; 3; 4} ដែល a_1 និងa_4ជារបស់ F។ចំណាំថា $2 \notin F$ ទោះបី $2 \in \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ និង $\{1;\ 2;\ 3;\ 4\} \in F$។សម្រាប់ឧទាហរណ៍ទាំង2នេះបានបង្ហាញថាវាមិនមែនជារបស់។

ដំណោះស្រាយ5

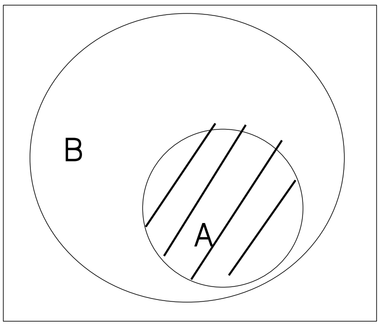
1. $A \cap C = \{1\}$
2. $B \cap F = \emptyset$
3. $D \cup C = \{1,2,3\{3\}\}$
4. $C \cap E = \{1,\{3\}\}$
5. $C \cup (D \cap F) = \{1,2,\{3\}\}$
6. $A \cap E = \{1,4\}$

ដំណោះស្រាយ6 រក $U = \{3,1,3,2\}$

$V = \{1,3,\{1,3\},\{1,2,3\}\}$

យើងមិនអាចគិតថាសំណុំផលគុណថា U := {1; 2; 3}។ Uជាចំនួនរបស់ V។ ទោះបី Uមិនមែនជាសំណុំរងនៃ Vព្រោះ2 ∈ U តែ2 ∈ V។

__ដំណោះស្រាយ7__ សំណុំ A, B,C យើងពិនិត្យឃើញដូចនៅខាងក្រោម នៃដ្យាក្រាមវិននេះ។



ដូច្នេះ A ∩B = A និង A ∪ B = B:

__ដំណោះស្រាយ8__ ពួកយើងអាចដោះស្រាយនូវលំហាត់នេះនេះដោយប្រើដ្យាក្រាមវិន ប៉ុន្តែយើងនឹងគូរនូវដ្យាក្រាមវិនដោយ អាចធ្វើបានលើគ្រប់ករណីទាំងអស់នៃ សំណុំ A និង B ដើម្បីបញ្ចប់នៃសម្រាយបញ្ហាក់។ ពួកយើងអាចប្រើប្រាស់នូវប្រភេទអាគុយម៉ង់ផ្សេងៗគ្នាដើម្បីដោះស្រាយលំហាត់នេះ។មានលក្ខខណ្ឌពីរដូចខាងក្រោម៖

$A \subset S$; (1.1)

$B \subset S$; (1.2)

គេឱ្យ$X \in A \cup B$ ដែលបានមកពីនិយមន័យប្រជុំ ដែលមានពីរករណីគឺ៖ x មាន A ឬ B។

ករណីទី1៖ $x \in A$ ព្រោះ $A \subset S$ យើងអាចដឹងថា $x \in S$ ។

ករណីទី2៖ $x \in B$ព្រោះ B ½ S យើងអាចដឹងថា $x \in S$ ។

នៅក្នុងករណីទាំងនេះ យើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា$x \in S$ និង⊆យើងបាន$A \cup B \subseteq S$។

តើយើងអាចទាញបានថា A ∪ B គឺជាលក្ខណរបស់សំណុំរងនៃ Sឬទេ ? ចម្លើយនោះគឺមិនអាចនោះទេ។នៅចំណុច(1.1) និង (1.2) ពួកយើងដឹងត្រឹមថាវាគឺជាធាតុមួយដែលតូចបំផុតនៃ x ∈ S នោះ x ∈ A ។ហើយវាមានវាមានជាតុមួយទៀតគឺ y ∈ S នោះ y ∈ B។ប៉ុន្តែយើងមិនដឹងនោះទេប្រសិនបើ

x = yសូមពិនិត្យខាងក្រោម៖

A = {1}; B = {2}; និង S = {1; 2}
វាមានន័យថា A ⊂ S;B ⊂ S, and A ∪ B = S។
នៅក្នុងសៀវភៅពុម្ពខ្លះបានប្រើប្រាស់អាគុយម៉ង់ដូចខាងលើដែលហៅថា∈-អាគុយម៉ង់ព្រោះមានហេតុផល procedure

វិធីសាស្រ្តគឺអាស្រ័យលើលក្ខណៈនៃចំនួនធាតុចំពោះសំណុំទាំងឡាយ។

ដំណោះស្រាយ9 រកកាឌីណាល់នៃសំណុំ

$S = \{p/q | p < q \in N^+, p, q, \leq 10\}$

កាឌីណាល់នៃការកំណត់សំណុំគឺជាចំនួនធម្មតានៃធាតុផ្សេងគ្នានៃសំណុំ។ពួកយើងមិនបានគិតទៅលើសំណុំផលគុណនោះទេនៅក្នុងពាក្យដ៏ទៃ ។ធាតុដូចគ្នាទាំងអស់គឺជាការរាប់បញ្ចូលតែមួយ។ឧទាហរណ៍៖ 1/2, 2/4, 3/6, 4/8, និង 5/10 គឺជាធាតុដូចគ្នា។ នៅក្នុងឧទាហរណ៍ យើងអាចសរសេរបានថា p/q យកធាតុដូចគ្នាបេះបិទចេញហើយរាប់ចំនួននៅ

សល់។ កាឌីណាល់នៃsគឺ63។

ដំណោះស្រាយ10 សំណុំរងនៃ {1; 2; {b}} មានដូចជា៖

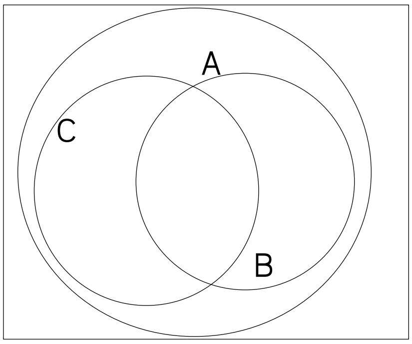
∅,{1}, {2}, {{b}}, {1, 2}, {1, {b}}, {2 {b}}, {1, 2, {b}}

ត្រូវចាំថាសំណុំទទេ,{1; 2; {b}}និងខ្លួនរបស់វា គឺជាសំណុំរងទាំងពីរនេះគឺបានមកពីសំណុំសាកល។

ដំណោះស្រាយ11 {b; c; d} £ {e; o} = {(b; e); (c; e); (d; e); (b; o); (c; o); (d; o)}។

ដំណោះស្រាយ12 សំណុំទទេគឺជាសំណុំមានតែមួយហើយមិនមានលក្ខណសំណុំរងនោះទេ។

ដំណោះស្រាយ13 ដំណោះស្រាយនេះមិនត្រឹមត្រូវទេ។ចូរមើលដំណោះស្រាយនៅក្នុងដ្យាក្រាមវិនបានបង្ហាញពីខាងក្រោម



$A \subseteq B$
$C \subset B$
$A \not\subset C$

ដំណោះស្រាយដែលល្អបំផុតនោះគឺជាការបង្ហាញនូវទ្រឹស្តីមួយដោយឱ្យនូវឧទាហរណ៍។ចូរមើលឧទាហរណ៍ដូចខាងក្រោម៖$B = \{1,2,3,4,5\}, A = \{1,2,3\}, C = \{3,4,\}$វាបានបង្ហាញឱ្យឃើញថា,$A \subseteq B, C \subset B$, ប៉ុន្តែ $A \not\subset C$

ឧទាហរណ៍ដែលងាយស្រួលរាប់បំផុតនោះគឺនៅពេលដែល A = C = ∅ និងB គឺជាសំណុំទទេ។

ករណីនេះគឺ $A \subseteq B, C \subset B$ ប៉ុន្តែគឺ A មិនមានលក្ខណៈជាសំណុំរងនៃ C នោះទេ។

ដំណោះស្រាយ14បើធ្វើតាមដំណោះស្រាយនេះគឺមិនត្រូវនោះទេបើ $X \subseteq (A \cup B)$,នោះ $X \subset A$ ឬ $X \subset B$ យើងអាចឱ្យឧទាហរណ៍មួយចំនួនដើម្បីដោះស្រាយតាង A = {1}; B = {2}, និង X = {1; 2វាមានន័យថា X ⊂ (A ∪ B), ប៉ុន្តែទាំងនេះគឺ X ⊂ A ឬ $X \subseteq B$ ។

ដំណោះស្រាយ15 សម្រាប់សំណុំពីរផ្សេងទៀតគឺ A និង B, បើ $(A \cup B) \subset (A \cap B)$, គឺ $A = B$

យើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា៖$(A \cup B) \subset (A \cap B)$

សំនួរសួរថា: "តើA = B ឬទេ ?"

ដំណោះស្រាយ A = B, យើងអាចបង្ហាញបានថា A ⊂B និង B ⊂ A។

1. បង្ហាញថា A ⊂ B, សន្មតថា x ∈ A.

$x \in A \implies x \in A \cup B$

$\implies \quad x \in A \cap B$

$\implies \quad x \in B$

ដូច្នេះ A ⊆ B។

2. បង្ហាញថា $B \subseteq A$, តាង $x \in B$

$x \in B \implies \quad x \in A \cup B$

$\implies \quad x \in A \cap B$

$\implies \quad x \in A$

ដូច្នេះ$B \subseteq A$។

ចំណុចទី1 និង 2 ខាងលើ យើងបាន A = B។

វិធីសាស្ត្រទី 2:

យើងអាចប្រើប្រាស់ដំណោះស្រាយផ្សេងទៀតដើម្បីបង្ហាញថា A = B នៅក្រោមលក្ខខណ្ឌដូចគ្នា ដែលបានផ្តល់ឱ្យនៅក្នុងចំណុច(1.4)។ធ្វើតាមទ្រឹស្តីបទមូលដ្ឋានសម្រាប់សំណុំផ្សេងទៀតគឺ: A;B និង C,

1) $A \cap B \subset A$

2) $A \subset A \cup B$

3) $A \subseteq B \subset C \quad A \subset C$

ដូច្នេះ

$(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$

និង $(A \cup B) \subseteq (A \cap B)$ ដែលបានឱ្យ,យើងបាន

$(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B) \subseteq (A \cap B) \subseteq A$

ដូច្នេះ $A \subset (A \cup B)$ និង $(A \cup B) \subset A$ ដូចនេះ$A = A \cup B$ ដូចនេះ$B = A \cup B$ ដូចនេះ A = B.

វិធីសាស្ត្រទី 3:

យើងអាចបង្ហាញនោះចំណុច(1.3)ដោយភាពផ្ទុយគ្នាមួយដែលវាពិតជាមានសារៈសំខាន់ណាស់នៅក្នុងបច្ចេកទេស សម្រាប់ហេតុផលគណិតវិទ្យាដែលប្រើប្រាស់នូវបច្ចេកទេសនេះជាញឹកញាប់។

ឧបមាថា៖$(A \cup B) \subset (A \cap B)$, និង $A \neq B$ដោយមិនបាត់បង់ភាពទូទៅ ដូចនេះពួកយើងអាចសន្មតថា A $\not\subseteq$ B[4]។ដូចនេះវាគឺជាភាពធម្មតាមួយនៅក្នុងA ប៉ុន្តែមិនមែននៅក្នុងB។ពួកយើងអាចដឹងថា$a \in A \cup B$ និង$a \notin A \cap B$ ដែលបានមកពីនិយមន័យរបស់សំណុំរង យើងបាន $A \cup B \nsubseteq A \cap B$

<u>ដំណោះស្រាយ16</u> រកសំណុំ A, B ,C

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(a) មានករណី2បានបង្ហាញថា $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$, ឧបមាថា $x \in A \cup (B \cap C)$ យើងបាន:

ករណីទី 1: $x \in A$ ប្រសិនបើ $x \in A$, នោះ $x \in (A \cup B)$ និង$x \in (A \cup C)$.

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ករណីទី2: $x \in (B \cap C)$បើ $x \in (B \cap C)$, នោះ $x \in B$ និង $x \in C$, ដូចនេះ

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ដូច្នេះនាំឱ្យករណីទាំងពីរយើងបាន $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) បង្ហាញថា$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, ឧបមាថា$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ នោះ $x \in A \cup B$ និង $x \in A \cup C$

យើងបាន2ករណី:

ករណីទី 1: $x \in A$ បើ $x \in A$, នោះ $x \in A \cup (B \cap C)$

ករណីទី2: $x \in A$បើ $x \in A$, នោះ x ត្រូវតែនៅក្នុង B និងC, ព្រោះវាបានមកពីការសន្មត $x \in A \cup B$ និង $x \in A \cup C$ ដូច្នេះ, $x \in B \cap C$,

ដូចនេះ $x \in A \cup (B \cap C)$.ករណីទាំងនេះ x យើងបាន

$A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$:

ដូចនេះ

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

a) បង្ហាញថា $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$, ឧបមាថា $x \in A \cap (B \cup C)$

បានមកពីនិយមន័យរបស់ប្រជុំ $x \in (B \cup C)$មានពីរករណី:

ករណីទី 1: $x \in B$ បើ $x \in B$ នោះ$x \in (A \cap B)$

ករណីទី2: $x \in C$ បើ $x \in C$ នោះ$x \in (A \cap C)$

ដូច្នេះ $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$:

b) បង្ហាញថា$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$, ឧបមា $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ។

យើងបានពីរករណី :

ករណីទី 1: $x \in A \cap B$ បើ $x \in A \cap B$ នោះ $x \in A$ និង $x \in B$ ព្រោះ $x \in B, x$ មាននៅក្នុង $B \cup C$ដូច្នេះ $x \in A(B \cup C)$.

ករណីទី 2: $x \in A \cap C$ បើ $x \in A \cap C$, នោះ $x \in A$ និង $x \in C$.ព្រោះ $x \in C, x$ មាននៅក្នុង$B \cup C$

ករណីនេះ , $x \in A \cap (B \cup C)$

ដូចនេះយក (a) និង (b) យើងបាន៖

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ដំណោះស្រាយ17 តាងA;B ជាសំណុំ បង្ហាញថា៖

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} x \notin \overline{A \cup B} \Rightarrow x \in A \cup B$,

$\Rightarrow x \in A$ ឬ $x \in B$

$\Rightarrow x \notin \overline{A}$ ឬ $x \notin \overline{B}$

$\Rightarrow x \notin \overline{A} \cap \overline{B}$

1.

(a) រក $x \in \overline{A \cup B}$

$x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B$,

$\Rightarrow x \notin A$ និង $x \notin B$

$\Rightarrow x \in \overline{A}$ និង $x \in \overline{B}$

$\Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$
(b) រកៃ $x \notin \overline{A \cup B}$
ដូច្នេះ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
(a) រកៃ$x \in \overline{A \cap B}$
$x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow x \notin A \cap B$
$\Rightarrow x \notin A$ ឬ $x \notin B$
$\Rightarrow x \in \overline{A}$ ឬ $x \in \overline{B}$
$\Rightarrow \quad x \in \overline{A} \cup \overline{B}$
(b) រកៃ$x \notin \overline{A \cap B}$
$x \notin \overline{A \cap B} \Rightarrow x \in A \cap B$
$\Rightarrow x \in A$ និង $x \in B$
$\Rightarrow x \notin \overline{A}$ និង $x \notin \overline{B}$
$\Rightarrow x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$
ដូច្នេះ$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
<u>ដំណោះស្រាយ18</u> រកសំណុំA,B និង សំណុំC. យើងអាចបង្ហាញថា៖

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

យើងបាន $A - B$ គឺជាសំណុំដែលតូចនៅក្នុង A ប៉ុន្តែមិនមែនB។ដូច្នេះបើប្រសិនបើ $x \in A - B$, នោះ$x \in A$ និង $x \notin B$មានន័យថា $x \in A$ និង $x \in \overline{B}$ ពីនិយមន័យនៃចំនុចប្រសព្វ $x \in A \cap \overline{B}$។
ដូច្នេះ $A - B \subseteq A \cap \overline{B}$
ទិសដៅផ្សេងទៀតបើ $x \in A \cap \overline{B}$, នោះ $x \in A$ និង $x \in \overline{B}$,មានន័យថា $x \in A$ និង $x \notin B$,
ដូចនេះ $x \in A - B$ នាំឱ្យ $A \cap \overline{B} \subseteq A - B$
ពីចំណុច (1.5) និង (1.6), យើងបាន៖$A - B = A \cap \overline{B}$
<u>ដំណោះស្រាយ19</u> រកសំណុំA,B និង សំណុំC បង្ហាញថា៖$A - (A - B) = A \cap B$,
យើងនឹងប្រើនូវចំណុចស្មើគ្នា (1.7)។
ចូរយើងចាប់ផ្តើមពីខាងឆ្វេងដៃនេះ៖
$A - (A - B) = A - \left(A \cap \overline{B}\right)$, ចំណុច (1.7)
$= A \cap \overline{\left(A \cap \overline{B}\right)}$, ចំណុច (1.7)
$= A \cap \left(\overline{A} \cup B\right)$, ច្បាប់ម៉័រហ្គង់
$= \left(A \cap \overline{A}\right) \cup (A \cap B)$ លក្ខណៈបំបែក
$= \emptyset \cup (A \cap B)$,
$= A \cap B$
ដូច្នេះ នៅផ្នែកខាងឆ្វេងដៃនេះគឺស្មើនឹងផ្នែកខាងស្តាំដៃដែរ។
<u>ដំណោះស្រាយ20</u> រកសំណុំA,B និង សំណុំC បង្ហាញថា $A \cap B = \emptyset$ បើ $A \subseteq \overline{B}$, យើងបែងចែកគោលដៅរបស់យើងជាពីរតូចៗ.

1. គោលដៅទី1គឺបានបង្ហាញថា $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq \overline{B}$

មានគោលបំណងមួយដែលឧបមាថា៖$A \cap B = \emptyset$ និង $\not\subseteq \overline{B}$ ។

បើ $\not\subseteq \overline{B}$, យើងអាចរក x , ដោយ $x \in A$ និង $x \notin \overline{B}$ ប៉ុន្តែ

$$\begin{aligned} x \in A, x \notin \overline{B} \quad &\Rightarrow \; x \in A \;\&\; x \in B, \\ &\Rightarrow x \in A \cap B, \\ &\Rightarrow \; A \cap B \neq \emptyset \end{aligned}$$

វាបញ្ជាក់ថាវាជាភាពផ្ទុយគ្នា

2. គោលដៅទី2គឺបានបង្ហាញថា $A \subseteq \overline{B} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

មានគោលបំណងមួយដែលឧបមាថា៖$A \subseteq \overline{B}$ និង $A \cap B \neq \emptyset$

បើ $A \cap B \neq \emptyset$, មាន x ដែល $x \in A \cap B$តែ

$$\begin{aligned} x \in A \cap B \quad &\Rightarrow \quad x \in A \;\&\; x \in B, \\ &\Rightarrow \quad x \in A \;\&\; \notin \overline{B}, \\ &\Rightarrow \quad A \not\subseteq \overline{B} \end{aligned}$$

នេះនាំឱ្យមានការផ្ទុយ។

ចំណុច 1 និង 2, យើងអាចបង្ហាញថា៖

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B}$$

<u>ដំណោះស្រាយ21</u> ឧបមាថា $A \cap B = \emptyset$ គេឱ្យ x យើងបាន៖

$$\begin{aligned} x \in A \quad &\Rightarrow \quad x \notin B \qquad \text{ព្រោះ } A \cap B = \emptyset \\ &\Rightarrow \quad x \notin \overline{B} \\ &\Rightarrow \quad x \in \left(A \cap \overline{B}\right) \\ &\Rightarrow \quad A \subseteq \left(A \cap \overline{B}\right) \qquad \text{និយមន័យនៃសំណុំរង} \end{aligned}$$

ពីគុណប្រយោជន៍នៃចំនុចប្រសព្វនៃសំណុំពីរយើងមាន$\left(A \cap \overline{B}\right) \subseteq A$ ដូចនេះ $\left(A \cap \overline{B}\right) \subseteq A$

<u>ដំណោះស្រាយ22</u> រក$A\Delta B := (A - B) \cup (B - A)$

ព្រោះ$\cup$ គឺជាសំណុំសាកល, ដូចនេះ$(A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B\Delta A$

ដូចនេះΔ គឺជាទំនាក់ទំនង

មុនពេលបង្ហាញពីទំនាក់ទំនងរបស់ 4 ចូរយើងបង្ហាញលទ្ធផលមធ្យម៖

$\overline{A\Delta B} = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$

រំលឹកសមីការ (1.7) យើងអាចដឹង$A - B = A \cap \overline{B}$ ដូចនេះ យើងអាចសរសេរម្តងទៀត$A\Delta B$ ដូចជា

$$A\Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right).$$

$$\begin{aligned} \overline{A\Delta B} &= \overline{\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)}. && \text{ចំណុច (1.9);} \\ &= \overline{\left(A \cap \overline{B}\right)} \cap \overline{\left(\overline{A} \cap B\right)} && \text{ច្បាប់ម៉ហ្គង់} \\ &= \left(\overline{A} \cap B\right) \cap \left(A \cap \overline{B}\right) && \text{ច្បាប់ម៉ហ្គង់} \\ &= \left[\left(\overline{A} \cup B\right) \cap A\right] \cup \left[\left(\overline{A} \cup B\right) \cap \overline{B}\right] && \text{លក្ខណៈបំបែក} \\ &= \left[\left(\overline{A} \cup A\right) \cup (B \cap A)\right] \cup \left[\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{B}\right)\right] && \text{លក្ខណៈបំបែក} \\ &= (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) && \text{ច្បាប់ទំនាក់ទំនង} \end{aligned}$$

ឥឡូវនេះយើងបង្ហាញពីការទំនាក់ទំនងគ្នានៃ Δ:

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

$$A\Delta(B\Delta C) =$$

$= \left[(A\Delta B)\cap\overline{C}\right]\cup\left[\left(\overline{A\Delta B}\right)\cap C\right]$ (1.9),

$= \left[\left((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\right)\cap\overline{C}\right]\cup\left[\left((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})\right)\cap C\right]$ (1.9), (1.8),

$= \left[(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\right]\cup\left[(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\right]$ បំណែងចែក,

$= (A\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$

ដូចគ្នានេះដែរយើងអាចបង្ហាញថា៖

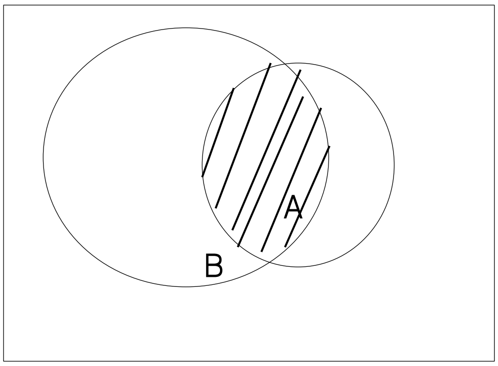
$A\Delta(B\Delta C) = (A\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$

ដូចនេះ$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C), i.e., \Delta$ គឺជាទំនាក់ទំនង

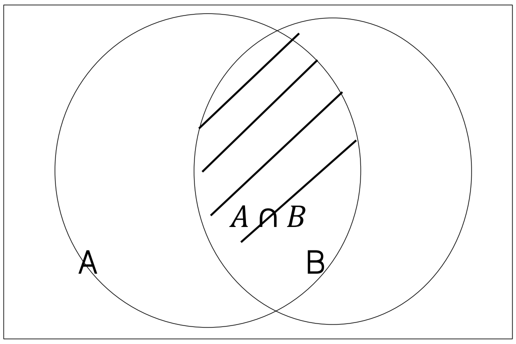
សរុបមក$A\Delta A = (A - A)\cup(A - A) = \emptyset\cup\emptyset = \emptyset$

<u>ដំណោះស្រាយ23</u>: $A\subseteq B$លុះត្រាតែ$A\cap B = A$.

i. ដ្យាក្រាមវិនA $A\cap B = A$ ចំណាំថា$A\subseteq B$



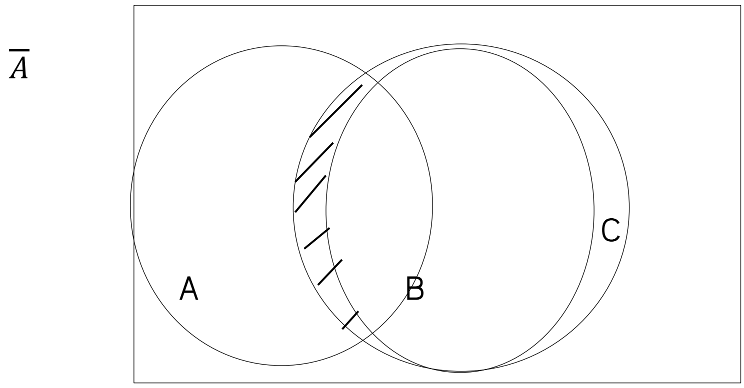
ii.ដ្យាក្រាមវិន A $A\cap B \neq A$. ចំណាំថា $A\nsubseteq B$



<u>ដំណោះស្រាយ24</u>

1. ការប្រើប្រាស់ដ្យាក្រាមវិនៈ

(a) $B - C \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \cap B$ ដោយភាពផ្ទុយគ្នា ឧបមាថា $B - C \subseteq \overline{A}$ និង $A \cap B \nsubseteq C$.បើ $A \cap B \nsubseteq C$, បន្ទាប់មកយើងអាចរកសំណុំ A,B និង C ដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងដ្យាក្រាមវិន ដែលទម្រង់នៃក្រឡាផ្ទៃគ្របដណ្តប់ដោយធាតុទាំងនោះ$A \cap B$ ប៉ុន្តែមិនមែននៅក្នុង Cបានមកពីដ្យាក្រាមវិន យើងបាន $B - C \nsubseteq \overline{A}$ ព្រោះវាជាក្រឡាផ្ទៃនៃសំណុំរង $B - C$ និងសំណុំរងនៃ A។



(b) $B - C \subseteq \overline{A} \Leftarrow A \cap B \subseteq C$
មួយទៀតគឺមានភាពផ្ទុយគ្នា ឧបមាថា $A \cap B \subseteq C$ និង $B - C \nsubseteq \overline{A}$។ យើងអាចប្រើប្រាស់នូវដ្យាក្រាមដូចគ្នា បើ$B - C \nsubseteq \overline{A}$។ យើងអាចរកផ្ទៃក្រឡាដែលផ្ទុយពីការស្មានរបស់យើង $A \cap B \subseteq C$.

2. ប្រើប្រាស់ពិជគណិតនៃសំណុំ;

$B - C \subseteq \overline{A}$	$\Leftrightarrow$	$(B - C) - \overline{A} = \emptyset$	តាមនិយមន័យ,
	$\Leftrightarrow$	$(B - C) \cap \overline{\overline{A}} = \emptyset$	លំហាត់ 18,
	$\Leftrightarrow$	$(B - \overline{C}) \cap A = \emptyset$	លំហាត់ 18,
	$\Leftrightarrow$	$A \cap (B \cap \overline{C} = \emptyset)$	លក្ខណៈបំបែក
	$\Leftrightarrow$	$(A \cap B) \cap \overline{C} = \emptyset$	លក្ខណៈផ្តុំ
	$\Leftrightarrow$	$(A \cap B) - C = \emptyset$	លំហាត់ទី 18,
	$\Leftrightarrow$	$(A \cap B) \subseteq C$	តាមនិយមន័យ,

3. ប្រើអាគុយម៉ង់អាប់ស៊ីឡោន :

(a) $B - C \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \cap B \subseteq C$
មានដំណោះស្រាយផ្ទុយពីនេះឧបមាថា $B - C \subseteq \overline{A}$ និង $A \cap B \nsubseteq C$ ។ បើ$A \cap B \nsubseteq C$, នោះមានការដេកចេញ x $x \in A \cap B$ និង$x \notin C$ ព្រោះ $\in A \cap B$ យើងអាចដឹងថា $x \in B$ និង$x \notin \overline{A}$ ព្រោះ $x \in B$ និង$x \notin C$យើងអាចដឹងថា $x \in B - C$ ដូច្នេះ $B - C \nsubseteq \overline{A}$

(b) $B - C \subseteq \overline{A} \Leftarrow A \cap B \subseteq C$
មានដំណោះស្រាយផ្ទុយពីនេះផងដែរឧបមាថា $A \cap B \subseteq C$ និង$B - C \nsubseteq A$។បើ$B - C \nsubseteq \overline{A}$, ដែលមាន x ដែល $x \in B - C$ និង $x \notin A$ ប្រសិនបើ

$x \in B$ និង $x \notin B$ ព្រោះ$x \in B - C$, និង $x \in A$ ព្រោះ $x \notin \overline{A}$.

ដូច្នេះ, $A \cap B \nsubseteq C$ ព្រោះ $x \in A \cap B$ និង $x \notin C$.

<u>**ដំណោះស្រាយ25**</u>

$A \times B = \{(\propto, a), (\propto, 3), (4, a), (4,3)\}$

ដំណោះស្រាយ26តាង X និង Y ជាសំណុំពីរ។មានដំណោះស្រាយពីរដែលបង្ហាញថា X = Y។
ដំណោះស្រាយទី1បានបង្ហាញថា $X \subseteq Y$ និង $\supseteq Y$ប្រសិនបើ $a \in X$និង$\in Y$ បើ $a \in Y$ និង $a \in X$។
ដំណោះស្រាយផ្សេងទៀតបានបង្ហាញថាបើ $a \in X$និង $a \in Y$ បើ $a \notin X$ និង $a \notin X$។យើងអាចដោះស្រាយ
លំហាត់នេះដោយដំណោះស្រាយទី2បាន៖

1. រកៈ$a = (x, y)$ ដែល$a \in A \times (B \cup C)$

$(x, y) \in A \times (B \cup C)$

$\Rightarrow \quad x \in A$ និង $y \in (B \cup C)$

$\Rightarrow \quad x \in A$ និង$(y \in B$ ឬ $y \in C)$

$\Rightarrow \quad (x \in A$ និង $y \in B)$ ឬ $(x \in A$ និង $y \in C)$

$\Rightarrow \quad (x, y) \in A \times B$ ឬ $(x, y) \in A \times C$

$\Rightarrow \quad (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

ដូចនេះ$a \in (A \times B) \cup (A \times C)$

2. រកៈ$a = (x, y)$ ដែល$a \notin A \times (B \cup C)$

$(x, y) \notin A \times (B \cup C)$

$\Rightarrow \quad x \notin A$ ឬ $y \notin (B \cup C)$

$\Rightarrow \quad x \notin A$ ឬ $(y \notin B$ និង $y \notin C)$

$\Rightarrow \quad (x \notin A$ ឬ $y \notin B)$ និង$(x \notin A$ ឬ $y \notin C)$

$\Rightarrow \quad (x, y) \notin A \times B$ និង $(x, y) \notin A \times C$

$\Rightarrow \quad (x, y) \notin (A \times B) \cup (A \times C)$

ដូចនេះ$a \notin (A \times B) \cup (A \times C)$

ចំណុច (1) និង (2) យើងបានបង្ហាញថា៖

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

ដំណោះស្រាយ27 ឧបមាថា $A \times A = (B \times B)$

1. $x \in A$

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad (x, x) \in (A \times A)$$
$$\Rightarrow \quad (x, x) \in (B \times B)$$
$$\Rightarrow \quad x \in B$$

ដូច្នេះ, $A \subseteq B$

2. $x \in B$

$$x \in B \Rightarrow \quad (x, x) \in (B \times B)$$
$$\Rightarrow \quad (x, x) \in (A \times A)$$
$$\Rightarrow \quad x \in A$$

ដូចនេះ, $B \subseteq A$ តាមចំណុចខាងលើ $A = B$

ដំណោះស្រាយ28 រក$A, B, U,$ និង V ជាសំណុំដែល $A \subseteq U$ និង $B \subseteq V (A \times B) \subseteq (U \times V)$
បង្ហាញថា $\mathrm{x} = (\mathrm{a}, \mathrm{b})$ និង $\mathrm{x} \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$។ដូចនេះ $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ និង $\mathrm{a} \in \mathrm{B}$ ។នៅពេលដែល $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{U}$ និង

$B \subseteq V$ យើងបាន $a \in U$ និង $b \in V$។ ដូច្នេះ$(a,b) \in U \times V$នាំឱ្យ $x \in U \times V$។
យើងអាចបង្ហាញនូវលទ្ធផលនេះដោយប្រើភាពផ្ទុយគ្នានៃអាគុយម៉ង់។ឧបមាថាឡទ្ធផលនេះមិនត្រឹមត្រូវ
យើងអាចរកសំណុំ A, B, U; និង V ដែល$A \subseteq U, B \subseteq V$ និង $A \times B \nsubseteq U \times V$
ប្រសិនបើមានករណីនេះមាន $(a,b) \in A \times B$ និង $(a,b) \notin U \times V$។បើ $(a,b) \notin U \times V$,
នោះ $a \notin U$ or $b \notin V$។ ករណីទាំងពីរនេះយើងមានរូបមន្ត($A \subseteq U$ and $B \subseteq V$)

ដំណោះស្រាយ29 រកសំណុំA, B, C

$$\begin{aligned}
(a,b) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow a \in A \text{ និង } b \in (B \cup C),\\
&\Leftrightarrow a \in A \text{ និង } b \in B \text{ ឬ } b \in C,\\
&\Leftrightarrow (a,b) \in (A \times B) \text{ ឬ } (a,b) \in (A \times C),\\
&\Leftrightarrow (a,b) \in (A \times B) \cup (A \times C)
\end{aligned}$$

ដូចនេះ$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

យើងអាចប្រើ $\Leftrightarrow$ គ្រប់ជំហាននៃហេតុផលខាងលើ យើងមិនបានបង្ហាញទៅកាន់ទិសដៅនៃការរួមបញ្ចូល ដែលជាក់លាក់មួយ។

ដំណោះស្រាយ30 បង្ហាញលំហាត់នេះ យើងនឹងប្រើលទ្ធផលនៅក្នុងលំហាត់ទី 29

$$X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z) \qquad (1.10)$$

វាស្មើនឹងអ្វីដែលយើងត្រូវការគឺ

$$(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z) \qquad (1.11)$$

ការបង្ហាញនេះជារបៀបនៃការពិភាក្សានៅក្នុងលំហាត់ 29.

1. បង្ហាញថា $A \times B \subseteq A \times C$,

$$\begin{aligned}
A \times C &= A \times (A \cup B) && \text{ព្រោះ } C = (A \cup B)\\
&= (A \times A) \cup (A \times B) && (1.10)
\end{aligned}$$

ព្រោះ $(A \times B) \subseteq \big((A \times A) \cup (A \times B)\big)$, យើងបាន $(A \times B) \subseteq (A \times C)$

2. បង្ហាញ $A \times C \subseteq C \times C$,

$$\begin{aligned}
C \times C &= (A \cup B) \times C && \text{ព្រោះ } C = (A \cup B)\\
&= (A \times C) \cup (B \times C) && (1.11)
\end{aligned}$$

ព្រោះ $(A \times C) \subseteq \big((A \times C) \cup (B \times C)\big)$, យើងបាន $(A \times C) \subseteq (C \times C)$

ដំណោះស្រាយ31 បើ $A \subseteq B$, នោះ(1) និង (2) គឺមិនត្រឹមត្រូវនោះទេ

យើងអាចឱ្យនូវឧទាហរណ៍ដោយមិនបង្ហាញនូវ (1) និង (2) នៃលំហាត់នេះ។តាង A គឺជាសំណុំទទេ និង B មិនមែនសំណុំទទេ។ដូចនេះ $A \times B, B \times A$, និង $A \times A$ គឺជាសំណុំទទេដែល $B \times B$មិនអាច។

ដំណោះស្រាយ32 $P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{a\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,a\}, \{2,3\}, \{2,a\}, \{3,a\},\}$
$\{\{1,2,3\}, \{1,2,a\}, \{1,3,a\}, \{2,3,a\}, \{1,2,3,a\}\}$

ចំណាំ: សូមចាំថាសំណុំទទេនិងសំណុំ X នៅក្នុង P(X):

ដំណោះស្រាយ33 ដំបូងយើងនឹងបង្ហាញតាមភាពស្មើគ្នា ដូច្នេះយើងមិនបានរៀបរាប់កម្រិតនេះនៅក្នុង P(X) និងសំណុំ X។

$$X = [X \cup (X \cap P(X))] \qquad (1.12)$$

ចំណុចនិយមន័យរបស់ប្រជុំ យើងដឹងថា

$$(X \cap P(X)) \subseteq X \qquad (1.13)$$

ប្រជុំ X នៅចំណុច (1.13), យើងបាន

$$[X \cup (X \cap P(X))] \subseteq (X \cup X)$$

នាំឱ្យ $(X \cup X) = X,$

$$[X \cup (X \cap P(X))] \subseteq X \qquad (1.14)$$

ចំណុច (1.12) និង (1.14) យើងបាន $X \cup (X \cap P(X)) = X$នៅលំហាត់នេះ

$$X \cup (X \cap P(X)) = X = \{1,2,3,4,5,6\{1\}\}$$

ដំណោះស្រាយ34

1. $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
2. $P(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
3. $P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
4. $(\emptyset) \times P\{\emptyset\} = \{(\emptyset, \emptyset)\}$
5. $\emptyset \times P(\emptyset) = \emptyset$
6. $P(\emptyset) \times P(\emptyset) = \{(\emptyset, \emptyset)\}$

ដំណោះស្រាយ35

$$\begin{aligned} A &= \{a, 1\}, \\ P(A) &= \{\emptyset, \{a\}, \{1\}, \{a, 1\}\}, \\ A \times P(A) &= \begin{cases} (a, \emptyset), (a, \{a\}), (a, \{1\}), (a, \{a, 1\}), \\ (1, \emptyset), (1, \{a\}), (1, \{1\}), (1, \{a, 1\}) \end{cases} \end{aligned}$$

ដំណោះស្រាយ36

$$\begin{aligned} x \in Pr(A \cap B) \quad &\Leftrightarrow \quad x \subseteq (A \cap B), \\ &\Leftrightarrow \quad x \subseteq A \text{ និង } x \subseteq B, \\ &\Leftrightarrow \quad x \in Pr(A) \text{ និង } x \in Pr(B), \\ &\Leftrightarrow \quad x \in Pr(A) \cap Pr(B) \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $Pr(A \cap B) = Pr(A) \cap Pr(B)$

ដំណោះស្រាយ37 ឧបមាថា $A \in Pr(B)$ និង $B \in Pr(A)$បានមកពីនិយមន័យសំណុំ

$$\begin{aligned} A \in Pr(B) \quad &\Rightarrow \quad A \subseteq B \\ B \in Pr(A) \quad &\Rightarrow \quad B \subseteq A \end{aligned}$$

ដូច្នេះ A=B

ដំណោះស្រាយ38 តាង A B ជាសំណុំធម្មជាតិ ។រក មុខងាររបស់ f : $A \longrightarrow B$

$$f(n) = 2n - 1$$

យើងអាចបង្ហាញថា f មានន័យថា មុខងារមួយទល់មួយ ពី A ទៅ B.

1. តាងa_1, $a_2 \in A$, និង $\neq$ យើងបាន$2a_1 - 1 \neq 2a_2 - 1$ ។ ដូចនេះ$f(a_1) \neq f(a_2)$ដូច្នេះ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់។
2. តាង$b \in B$. នាំឱ្យ$\frac{b-1}{2} \in A$, ព្រោះវាជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដូចនេះ f គឺជាអនុវត្តន៍ពេញ។

ពីនិយមន័យនៃកាឌីណាល់$|A| = |B|$

ដំណោះស្រាយ39 យើងមើលទៅតាមស្វ័យសត្យៈ

តាង A និង B ជាសំណុំ។$|A| \leq |B|$ បើវាមាន អនុវត្តន៍ g ពី A ទៅ B:

បង្ហាញថា$|A| \leq |Pr(A)|$, យើងរក $g: A \to \Pr(A)$ ដែល

$$g(x) = \{x\}, \text{ទាំងអស់នៃ } x \in A$$

Gគឺអនុវត្តន៍ទាំងអស់នៃ$x, y \in A, if\ x \neq y$នោះ $\{x\} \neq \{y\}$។ដូច្នេះធ្វើដោយស្វ័យសត្យ$|A| \leq |Pr(A)|$។

ដូច្នេះយើងបានបង្ហាញថា $|A| \leq |Pr(A)|$ ដោយវិធីផ្ទុយ ឧបមាថា $|A| = |Pr(A)|$។

នោះf : $A \to \Pr(A)$។ដូចនេះ $a \in A$, $f(a)$ គឺជាសំណុំរង A។ រកសំណុំ S ដែល

$S = \{x | x \notin f(x)\}$

S គឺជាសំណុំរង A។ f គឺជាសំណុំបំពេញដែលមាន $s \in A$

ដែល f(s) = S។ យើងមានពីរករណីៈ $s \in S$ និង $s \notin S$.

1. បើ$s \in S$ មានន័យថា $s \notin f(s)$នោះ$\notin S$.
2. បើ$s \notin S$មានន័យថា $s \notin f(s)$នោះ $\in S$.

ករណីទាំងនេះមានភាពផ្ទុយគ្នាដូច្នេះគួនាទីគ្មាន bijective ពីA ទៅ $Pr(A)$, ដូចនេះ$|A| \neq |Pr(A)|$។

ពី $|A| \leq |Pr(A)|$ និង$|A| \neq |Pr(A)|$ យើងសន្និដ្ឋានបានថា$|A| < |Pr(A)|$។

ជំពូកទី២.តក្កវិទ្យា

2.1- **សំណើតក្កវិទ្យា**

និយមន័យ

សំណើគឺជាការអះអាងបែបគណិតវិទ្យា ពិត ឬមិនពិត វាគេអាចត្រូវបានប្រាប់យ៉ាងច្បាស់លាស់។ សំណើមួយត្រូវបានគេហៅថាសំណើ នោះវាជាអំណះអំណាងដែលមុនគេបំផុត ។យើងប្រើអក្សរ $p,q,r,....$ ថាជាសំណើ។ដូច្នេះតម្លៃនៃ $p,q,r,....$ គឺស្ថិតនៅលើភាពពិត និងមិនពិតរបស់វា។

P,Q,T ជាសំណើ ដូច្នេះតម្លៃ P,Q,T គឺស្ថិតនៅលើភាពពិត និងមិនពិតរបស់វា។

ឧទាហរណ៍២.១

$P: \quad 2+2=5$

$Q: \quad x^2-2x+1$ មានឬសពីរផ្សេងគ្នានៃសមីការ

$T: \varnothing \subset \{1,2,\varnothing\}$

$S:$ មានតួលេខនៃចំនួនបឋមមាន100 ខ្ទង់,

គឺជាសំណើ។ តម្លៃនៃ p គឺមិនពិតហើយតម្លៃរបស់ q និង r គឺពិត។ យើងនឹងប្រើអក្សរ T គឺពិត និង F គឺមិនពិត សម្រាប់សៀវភៅនេះ។ នៅក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើគឺជាការស្នើសុំទោះបីយើងមិនបានដឹងច្បាស់ថាមានលេខបឋម 100 ខ្ទង់ក៏ដោយប៉ុន្តែយើងដឹងច្បាស់ថាs មានន័យថា T ឬ F ទោះយ៉ាងណាក្តីក៏មិនមែនគ្រប់ការអះអាង គណិតវិទ្យាសុទ្ធតែមានតម្លៃទាំងអស់នោះក៏ទេដែរ។ ការអះអាងទាំងពីរខាងក្រោមមិនមែនជាសំណើនោះទេ។

V:ការអះអាងនេះគឺមិនពិត

$U: a\in S$, ដែល S ជាសំណុំដែលបានកំណត់ $S=\{x / x\notin S\}$

និយមន័យ

ឧបមាថា p, q, r,.... គឺជាអញ្ញត្តិ ឬ អថេរដែលមានតំលៃ T ឬ F។ យើងហៅអថេរបែបនេះថាអថេរសំណើ ឬ អញ្ញាត្តិនៃសំណើ។គេអាចកំនត់សំណើដោយអក្សរ T រឺ F តាងឲ្យអថេរសំណើដែលគេចង់បាន។ អថេរសំណើត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាអាតូម។

និយមន័យ

p,q ជាពីរសំណើយើងប្រើនិមិត្តសញ្ញាតាងឲ្យ $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$
ដើម្បីសរសេរនូវសំណើរថ្មីមួយដូចជា $\neg p,\ p\wedge q,\ p\vee q,\ p\to q,\ p\leftrightarrow q...$

និមិត្តសញ្ញាទាំងនេះត្រូវបានគេហៅថាឈ្នាប់តក្កវិទ្យា $\neg$ "មិន" ឬ "អវិជ្ជមាន"។ ∧ ជា"ឈ្នាប់និង"។ v ជា" or" "ឈ្នាប់ឬ"។ $p\to q$ ត្រូវបានអានថា " $p\to q$ " ឬ "p នាំឲ្យ q"។ ហើយនិង $p\leftrightarrow q$ ត្រូវបានអានជា "p សមមូល q" ។ សូមចាំថារាល់សំណើទាំងអស់មានតំលៃជាការពិតទាំង T ឬ F។យើងសម្រេចតំលៃនៃសំណើថ្មីដែលបានធ្វើខាងលើដោយផ្អែកលើតំលៃ ច្បាប់នៃឈ្នាប់តក្កវិទ្យាដែលមាននៅខាងក្រោម។

និយមន័យ

1. **ឈ្នាប់មិន** $(\neg)$ $p : \neg p.$

p	$\neg p$
T	F
F	T

2.**ឈ្នាប់នឹង** $(\wedge)$ p **និង** q : $p\wedge q.$

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

3.**ឈ្នាប់ឬ** $(\vee)$ p **ឬ** q: pvq

p	q	$p\vee q$
T	T	T

T	F	T
F	T	T
F	F	F

4. **ឈ្នាប់នាំឱ្យ** $(\rightarrow)$ p **នាំឱ្យ** q: $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

5. **ឈ្នាប់សមមូល** $(\leftrightarrow)$, p**សមមូល** q: $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ការបែងចែក ២.៥ យើងឱ្យ $p \rightarrow q$ យើងអាចហៅថា $\neg q \rightarrow p$ ហើយពេលដែលវាផ្ទុយយើងហៅថា

q → q ពេលដែលវាបញ្ច្រាស យើងហៅថា $\neg p \rightarrow \neg q$ បញ្ច្រាស់ នៃ $p \rightarrow q$ ។

ការអនុវត្តន៍ ២.៦ រូបមន្តសំណើត្រូវធ្វើឡើងដូចខាងក្រោម៖T និង F គឺជារូបមន្តដែលស្មើឡើង។

ភាគល្អិតទាំងអស់គឺជារូបមន្តដែលមានលក្ខណៈសំណើរ

ប្រសិនបើ f_1 និង f_2 គឺជារូបមន្តស្មើស៊ុំ ដូចច្នេះ $\neg f_1, f_1 \wedge f_2, f_1 \vee f_2, f_1 \to f_2, f_1 \leftrightarrow f_2$.មានតែរូបមន្តដែលបង្កើតដោយវិធានខាងលើប៉ុណ្ណោះគឺជារូបមន្តសំណើរ។ រូបមន្តសំណើត្រូវបានគេស្គាល់ថាជារូបមន្តដែលត្រូវបានបង្កើតឡើងយ៉ាងល្អឬខ្លី។

ឧទាហរណ៍ 2.2

$pq\wedge,\ \neg\vee pq, \to (p\wedge q)\vee r$ គ្មាន

$p\wedge q,\ \neg p\vee q,\ (p\wedge q)\to r$ មាន

យើងត្រូវបានអនុញ្ញាតឱ្យប្រើវង់ក្រចកជាមួយសំណុំចំនួនធម្មជាតិរបស់វា។

ភារបែខចែក

ប្រមាណវិធីនៃតក្ក គឺមាននៅខាងក្រោម

អាទិភាព : $\{\neg\} > \{\wedge,\vee\} > \{\to,\leftrightarrow\}$ម៉្យាងទៀត" ¬" ត្រូវបានអោយតម្លៃមុនពេល" ∧" និង" v", និង" ∧" និង" v" ត្រូវបានវាយតំលៃនៅមុខ" →" និង" ↔" ។ ឧទាហរណ៍៖ $a\to b\wedge\neg c \equiv a\to(b\wedge(\neg c))$ និមិត្តសញ្ញាស្មើៈមានន័យថា

$a\vee\ b\wedge\neg c$ ត្រូវបានបកស្រាយថា $\to(b\wedge(\neg c))$ និង $\to(b\wedge(\neg c))$ អាចត្រូវបានសង្ខេបជាអក្សរ ដូច $\to(b\wedge(\neg c))$ ។ យើងអាចប្រើវាជំនួសដោយមិនណែនាំពីភាពមិនច្បាស់។

លក្ខណៈផ្តុំ ∧ និង v នៅមានលក្ខណៈផ្តុំ → និង ↔ហើយលក្ខណៈនៃការផ្តុំ

ឧទាហរណ៍ 2.2 $a\wedge b\vee c \equiv (a\wedge b)\vee c,$

$a\to b\leftrightarrow c\to d \equiv a\to(b\leftrightarrow(c\to d))$

ការបែងចែក 2.8:រក f ក្នុងអថេរ ។តារាងភាពពិតនៃ f គឺជាតារាងមួយដែលផ្ទុកនូវរាល់តំលៃដែលអាចមាននៃអថេរក្នុងជួរដេក (ជួរនីមួយៗតំណាងអោយលទ្ធផលមួយ) ហើយតម្លៃដែលត្រូវគ្នានៃ f ស្ថិតនៅក្នុងជួរឈរចុងក្រោយ។ តារាងដែលមាននៅក្នុង ២.៤ គឺជាតារាងភាពពិតរបស់ ¬p, p∧q, pvq, p → q, and p → q រៀងៗគ្នា។ចំពោះរូបមន្តដែលមានភាពស្មុគស្មាញយើងអាចបន្ថែមជួរឈរមធ្យមមួយចំនួនដើម្បីជួយយើងរកតម្លៃពិតរបស់ f ។ឧទាហរណ៍ 2.3 រក $f = (p\wedge q)\to r$ តារាងភាពពិតនៃ F

p	q	r	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\to r$

T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

យើងបានបន្ថែមជួរឈរដើម្បីបង្ហាញពីតម្លៃពិតរបស់p∧q។ ឧទាហរណ៍ជួរទី ៣ បង្ហាញថាបើ

$p = T, q = F,$ និង $r = T$ ហើយ f នៃ T ។

ការបែងចែក 2.9 រក F ត្រូវបានគេហៅថា tautology ប្រសិនបើនិងមានតែប្រសិនបើ F នៃ T នៅគ្រប់ទីកន្លែងនៅក្នុងជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាភាពពិតរបស់វា។បដិសេធ ២.១០ រក f ជា រូបមន្តដែលបានបង្កើតឡើងយ៉ាងល្អ ។ f ត្រូវបានគេហៅថាការផ្ទុយប្រសិនបើមានតែ F នៅគ្រប់ទីកន្លែងនៃជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងពិតរបស់វា។

ការអនុវត្តន៍2.11: គេអោយ f_1 និង f_2 ជារូបមន្តដែលបានបង្កើតឡើងពីរយ៉ាង។ចូររក

$f_1 \Rightarrow f_2$ ប្រសិនបើនិងបានតែបើ $f_1 \rightarrow f_2$ ជាអត់ពិតជានិច្ច tautology។

យើងនិយាយ f_1 តក្កនៃ f_2

ការអនុវត្តន៍ គេអោយ f_1 និង f_2 ជារូបមន្តដែលបានបង្កើតឡើងពីរយ៉ាង។ចូររក

$f_1 \Leftrightarrow f_2$

ប្រសិនបើនិងបានតែប្រសិនបើ $f_1 \leftrightarrow f_2$ ជាអត់ពិតជានិច្ច tautologyគេថា f_1 និង f_2 គឺសមមូលនៃតក្ក

ការអនុវត្តន៍ គេអោយf ជារូបមន្តដែលបានបង្កើតឡើង។ ប្រសិនបើតក្កដែល f មានគឺ ∧ និង ∨ មាន តែបន្ទាប់មកលេខពីរនៃ f ដែលត្រូវបានគេរាប់ជា f^d គឺជា រូបមន្តដែលទទួលបានពី f ដោយច្បាប់ដូចត ទៅនេះនៅក្នុង f ៖

១.ការជំនួសT ដោយ F, និង F ដោយ T,

២.ការជំនួស ∧ ដោយ ∨,

៣.ការជំនួស ∨ ដោយ ∧

ការអនុវត្តន៍ គេអោយ f ជារូបមន្តដែលបានបង្កើតឡើងនៅក្នុងអថេរ n ។និយាយឱ្យខ្លីទម្រង់ធម្មតា មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ DNF ក្នុងរយៈពេលខ្លីនៃ f គឺជាភាពសមមូលតក្កនៃ f ។សមមូលនៃ f ដែលជាការញែក ចេញពីគ្នាឬខុសគ្នា។ $(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n)$, នៅពេលដែល $x_i, 1 \le i \le n$ គឺជាអថេរ នៃ f ឬអវិជ្ជមានរបស់វា។ x_i នីមួយៗត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាអក្សរ

ឧទាហរណ៍ ២.៤ រក $f = p \to q$ ។ DNF នៃ $f = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

ពីព្រោះ (ក) ទាំង f និងសំណើ (២.១) មានតម្លៃសេចក្ដីពិតដូចគ្នាចំពោះតម្លៃដែលអាចទាក់ទង

និង (ខ) សំណើរ(២.១) គឺជាការបង្អាក់រូបមន្តខុសគ្នាដោយប្រើទំរង់"∧" រវាងអក្សរ ។

ការអនុវត្តន៍ គេអោយ f ជារូបមន្តដែលបានបង្កើតឡើងនៅក្នុងអថេរn ។ជាទម្រង់ធម្មតាដែលមានលក្ខ ណៈតៗគ្នានៃ f ជាសមីការតក្កនៃ f ដែលជាការភ្ជាប់គ្នាមួយឬខុសគ្នា

$(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n)$, ដែល $x_i, 1 \le i \le n$, គឺជាលទ្ធផល។

ឧទាហរណ៍ ២.៥ គេអោយ $f := p \to q$ CNF នៃ f គឺ $(\neg p \vee q)$.។

2.1.2-**ព្យាករណ៍តក្កវិទ្យា**

ការអនុវត្តន៍ សម្មតិកម្ម $P(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n), n \ge 0$ គឺជាការគូសសញ្ញាដែលពាក់ព័ន្ធទៅ $\{T, F\}$ ម្យ៉ាងទៀតប្រសិនបើយើងជំនួស $(x_1 \ldots\ldots, x_n)$ ឧទាហរណ៍នៅក្នុងដែនដែលត្រូវគ្នារបស់យើងនឹងទទួល បានសំណើមួយ។

ឧទាហរណ៍ ខាងក្រោមនេះជាការប៉ាន់ស្មាន

$$P(x, y) : x \ge y^2 \quad D_x = D_y = \square;$$

$Q(x, y)$: x គឺជា ay D_x គឺជាសំណុំនៃឈ្មោះ

D_y={ឪពុក, កូនប្រុស ,ឆ្មារ,ឆ្កែ, តុ........}

យើងប្រើ D_x , D_y ដើម្បីបញ្ជាក់ដែនកំណត់នៃ x និង y រៀងគ្នា។ ចំណាំថា D_x និង D_y មិនចាំបាច់ដូចគ្នាទេ។ ក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើនេះP(3.2) គឺជាសំណើ $3 \geq 2^2$ ជាមួយនឹងតម្លៃ ពិត F. ស្រដៀងគ្នាដែរ Q (កញ្ញា, ឆ្កែ) គឺជាសំណើរដែលមានតម្លៃពិត T ប្រសិនបើមានឆ្កែឈ្មោះប៊ូ។

ចំណាំ សំណើមួយគឺជាសម្មតិកម្មសូន្យនៃអថេរ

ការអនុវត្តន៍ គេអោយ $P(x_1, x_2............x_n),\ n \geq 0$ នោះសតិកម្ម ។ គេអោយ

$D_{x_1} \times D_{x_2} \times ... \times D_{x_n}$ ហៅថាដែនកំណត់នៃសម្មតិកម្ម P។

ការអនុវត្តន៍ 2.18 គេអោយ $(x_1, x_2, ..., x_n), n \geq 0$ នេះជាសម្មតិកម្ម។សំណុំភាពពិតនៃ P តាងអោយ Tp គឺជាសំណុំរងនៃ $D_{x_1} \times D_{x_2} \times .... \times D_{x_n}$ ដូចនេះសម្រាប់ $(a_1, a_2......a_n) \in Tp,$
$P(a_1, a_2, ..., a_n) = T.$

ការអនុវត្តន៍ 2.19 គេអោយ(x_1 , x_2,.......,x_n),$n \geq 0$ នេះជាសម្មតិកម្ម។សំណុំមិនពិតនៃ P,តាងដោយ Fp, គឺជាសំណុំរងនៃ $D_{x_1} \times D_{x_2} \times .... \times D_{x_n}$ ដូចនេះសម្រាប់ $(a_1, a_2......a_n) \in Fp,\ P(a_1, a_2, ..., a_n) = F.$

ការអនុវត្តន៍ 2.20 គេអោយ P , Q មានសតិកម្មពីរ។យើងអាចនិយាយថា PនិងQ ជាសមមូលនៃតក្ក ប្រសិនបើ $T_p = T_Q$.។

ការអនុវត្តន៍ 2.21 គេអោយ P , Q ជាសម្មតិកម្មពីរ យើងអាចនិយាយថា P បានបង្កប់នៃតក្ក Q

ប្រសិនបើ $T_p \subseteq T_Q$ ។

នៅក្នុងវិធីបូកទៅនឹងអ្វីដែលបានពិភាក្សានៅក្នុងផ្នែកមុនយើងមាននិមិត្តសញ្ញាពិសេសពីរដែលហៅថា បរិមាណនៅក្នុងតក្កវិជ្ជា។ និមិត្តសញ្ញាពិសេសពីរគឺ∀និង∃។ បរិមាណ∀និង∃ត្រូវបានគេហៅថាបរិមាណសកលនិងបរិមាណដែលមាននិងត្រូវបានគេហៅថា" សំរាប់ទាំងអស់គ្នា" និង" មាន" រៀងៗខ្លួន។ អត្ថន័យ∀ និង∃គឺមាននៅខាងក្រោម។

ការអនុវត្តន៍ គេអោយ $P(x)$ ជាសម្មតិកម្មក្នុងអថេរមួយ

1.បរិមាណមួយ $\forall x\in D_x P(x)$ គឺជាសំណើមួយនិងតម្លៃរបស់វាគឺ T ប្រសិនបើរាល់ឧទាហរណ៍នៅ a ក្នុង D_x ធ្វើអោយ P(a) ពិត

2.បរិមាណអថេ $\forall x\in D_x P(x)$ គឺជាសំណើរមួយហើយតម្លៃរបស់វាគឺ T ប្រសិនបើមានឧទាហរណ៍ខ្លះនៅក្នុង D_x ដែលធ្វើអោយ P (a) ពិត។

ប្រសិនបើដែនកំណត់ D_x ច្បាស់ពីបរិបទយើងច្រើនតែបន្ថយដែនកំណត់ហើយសរសេរឡើងវិញ $\forall x\in D_x P(x)$ ជា $\forall x P(x)$ និង $\exists x\in D_x P(x)$ ជា $\exists x P(x)$។ សម្មតិកម្មមុនដែលមាន បរិមាណមួយឬច្រើនត្រូវបានគេហៅថា សម្មតិកម្មបរិមាណ។

ការអនុវត្តន៍ គេអោយ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ជាសម្មតិកម្មនៅក្នុងអថេរ N ។បន្ទាប់មក

$\forall x_i(x_1, x_i, ..., x_n)$ និង $\exists x_i\ P(x_1, x_i, ..., x_n)$ សម្មតិកម្មនៅក្នុងអថេរ $(n-1)$ ដែល x_i ត្រូវបានគេហៅថាការកំណត់អថេរ ហើយអថេរដែលនៅសល់ត្រូវបានគេហៅថាអថេរគ្មានព្រំដែនឬអថេរដែលគ្មានគិតថ្លៃ។

ឧទាហរណ៍ 2.7 គេអោយសម្មតិកម្ម $P(x, y)$ ក្នុងអថេរពីរគឺ x និង y $\forall x P(x, y)$ និង

$\exists x P(x, y)$ ត្រូវបានប៉ាន់ស្មាននៅក្នុងអថេរ yមួយ។អថេរ y គឺជាអថេរដែលគ្មានតំលៃហើយ x គឺជាអថេរដែលបានកំណត់នូវដែនកំណត់នៅក្នុងអថេរភ្ជាប់ក្នុង $\forall x P(x, y)$ និង $\exists x P(x, y)$។

2.1.3-**សម្មតិកម្មនិងការកំណត់**

គេឱ្យ $P(x)$ និង $Q(x)$ ជាកត្តាកំណត់ពីរនៅក្នុងអថេរមួយហើយឱ្យ D_x ជាសកលនៃ x ។បន្ទាប់មកសំណុំនៃភាព ពិតនិងមិនពិត ដែលទាក់ទងនឹងលក្ខណៈ ដូចខាងក្រោម។

$$
\begin{aligned}
&1.T_P \cup F_P = D_x.\\
&2.T_P \cap F_P = \varnothing.\\
&3.T_{P\wedge Q} = T_P \cap T_Q.\\
&4.T_{P\vee Q} = T_P \cup T_Q.\\
&5.\forall x[P(x)\to Q(x)] \Leftrightarrow T_P \subseteq T_Q.\\
&6.\exists x[P(x)\wedge Q(x)] \Leftrightarrow (T_P \cap T_Q) \neq \varnothing.
\end{aligned}
$$

2.2- **សម្រាយបញ្ជាក់នៃតក្កវិទ្យា**

ការសម្យាយនៃក្កតគឺជាវិធីក្នុងបញ្ចូលក្នុងលក្ខន្តិកៈមួយចំនួនគឺត្រឹមត្រូវដោយផ្អែកលើមូលដ្ឋានដែលបានអោយ។

គេអោយសម្មតិកម្មPនិងQ ជាសំណើរឬបរិមាណពីរ។ចាប់ផ្ដើមពី P ប្រសិនបើយើងអាចបង្កើតលំដាប់នៃការអនុវត្តក្បួនតក្ក នៃការអនុញ្ញាតិ ឬដើម្បីមកដល់សំណួរ Q ម្ដងមួយជំហានយើងនិយាយថាមានភស្តុតាងសំរាប់ទ្រឹស្តីបទ។

$$P \Rightarrow Q$$

ក្នុងទ្រឹស្តីបទ P ⇒Q, P ត្រូវបានគេហៅថាការសន្និដ្ឋានហើយ Q ត្រូវបានគេហៅថាការសន្និដ្ឋាន នៃក្តតP ។ លំដាប់នៃជំហានទាំងនេះត្រូវបានគេហៅថាការសម្រាយនៃក្តក របស់ P ⇒ Q. ការសម្រាយនៃក្តតតែងតែត្រូវបានតំណាងនៅក្នុងតារាងដូចខាងក្រោម ។

បរិមាណៈ P

សន្និដ្ឋានៈ Q

ជំហាន		មូលហេតុ
1.	1.	បរិវេណ
2.	2.	
3	3.	.
.		.
.		
i.	i.	
.	.	.
.	.	.
n	Q	

ពេលដែល គឺជាឈ្មោះនៃវិធានក្តត ។

និយាយឱ្យខ្លីការសម្រាយបញ្ជាក់នៃក្តក អាចបានសរសេរជា

$P \Rightarrow q_2 \Rightarrow q_3 \Rightarrow \cdots \Rightarrow q_i \Rightarrow \ldots \Rightarrow Q.$

P និង Q មិនចាំបាច់មានលក្ខន្តិកៈតែមួយទេ។គេអោយជាសំណុំនៃរូបមន្តល្អរូបមន្តនិងសម្មតិកម្មនិងសម្មតិកម្មបរិមាណ។ឧទាហរណ៍ទ្រឹស្តីបទអាចមើលទៅដូច $\{P_1,\ P_2,\ldots,P_n\} \Rightarrow \{Q_1,\ Q_2,\ldots,Q_m\}.$ ។

ម៉្យាងវិញទៀតនិមិត្តសញ្ញាវណ្ណយុត្ត ",″ ត្រូវបានគេចាត់ទុកថាជា" ∧″ ។ ដូច្នេះទ្រឹស្តីបទក្នុង (2.2) អាចត្រូវបានបង្ហាញដូចជា៖ $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \Rightarrow (Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_m).$

2.2.1 **ច្បាប់នៃតក្កវិទ្យា**

គេអោយ $f_1 \leftrightarrow f_2$ ជាសំណើពិតមានន័យថា $f_1 \leftrightarrow f_2$ ក្នុងពេលទទួលបានលំដាប់នៃស្វ៊ីតនៃការបកស្រាយពី $f_1 \leftrightarrow f_2$ បន្ទាប់មកយើងអាចភ្ជាប់មួយផ្សេងទៀតទៅនឹងលំដាប់នៃតក្កវិទ្យា ។

ឧទាហរណ៍ ប្រសិនបើយើងដឹងថា $f_1 \Leftrightarrow f_2$ រួចហើយ $P \Rightarrow q_2 \Rightarrow q_3 \Rightarrow f_1$ បន្ទាប់មកការសម្រាយខាងលើអាចត្រូវបានទៅជា $P \Rightarrow q_2 \Rightarrow q_3 ... \Rightarrow f_1 \Rightarrow f_2$ ខាងក្រោមនេះជាទិន្នន័នៃtautologies ដែល p, q, និង r ។ គេអាចប្រើគោលការណ៍នៃការបញ្ជាក់នៃការភ្ជាប់ដើម្បីបង្ហាញថាវាជា tautologies ។ យើងហៅពួកគេថាច្បាប់ក្កត។ នៅក្នុង ការសម្រាយនៃតក្កវិទ្យា ត្រូវបានអនុញ្ញាតឱ្យប្រើច្បាប់តក្កដោយផ្ទាល់ដោយគ្មានការសម្រាយបន្ថែម។

1. លក្ខណៈឈ្នាប់មិនទ្វេដង

$$\neg\neg p \; p.$$

2. លក្ខណៈស្រប

$$p \wedge (p \vee q) p,$$

$$p \vee (p \wedge q) p.$$

3.លក្ខណៈបំបែក

$$p \wedge p \Leftrightarrow p,$$
$$p \vee p \Rightarrow p$$

4.លក្ខណៈផ្ទុយ

$$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F,$$
$$p \vee \neg p \Leftrightarrow T.$$

5.លក្ខណៈអត្តសញ្ញាណ

$$p \wedge T \Leftrightarrow p,$$
$$p \vee F \Leftrightarrow p.$$

6.លក្ខណៈដែនកំណត់

$$p \wedge F \Leftrightarrow F,$$
$$p \vee T \Leftrightarrow T.$$

7.លក្ខណៈត្រឡប់

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p),$$
$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p).$$

8.លក្ខណៈផ្តុំ

$$(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r),$$
$$(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge r).$$

9.លក្ខណៈបំបែក

$$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)),$$
$$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)).$$

10. លក្ខណៈផ្ទុយ

$$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

11.លក្ខណៈម៉ហ្គែន

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q),$$
$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q).$$

12.មិនមានឈ្មោះដាក់លាក់ណាមួយត្រូវបានផ្តល់ឱ្យនោះទេប៉ុន្តែច្បាប់នេះគឺជាច្បាប់មួយដែលត្រូវបានប្រើញឹកញាប់បំផុតនៅក្នុងការសម្រាយនៃតក្កវិទ្យា ។ $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q).$

2.2.2 **លក្ខណៈនៃការទាញសេចក្តីសន្និដ្ឋាន**

គេអោយ $f_1 \rightarrow f_2$ ជា Tautology សំណើរពិតមានន័យថា , $f_1 \Rightarrow f_2$ ។ ក្នុងពេលនៃការទទួលបានលំដាប់ការសម្រាយបញ្ជាក់នៃក្កតប្រសិនបើ f_1 កើតឡើងបន្ទាប់មកយើងអាចភ្ជាប់ f_2 ទៅនឹងលំដាប់នៃការម្រាយបញ្ជាក់នៃក្កត ។

ឧទាហរណ៍ ប្រសិនបើយើងដឹងថា $f_1 \Rightarrow f_2$ ហើយមាន

$$P \Rightarrow q_2 \Rightarrow q_3 \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_1$$

,បន្ទាប់មកការសម្រាយបញ្ជាក់ខាងលើអាចត្រូវបានសរសេរជា

$P \Rightarrow q_2 \Rightarrow q_3 \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_1 \Rightarrow f_2.$

គេអោយ p, q, r, និង s ភាពពិតនៃសំណើរនេះគេហៅថាការបញ្ចូលគ្នា

1.លក្ខណៈ បំលែង

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \Rightarrow q.$$

2.លក្ខណៈទទួលយក

$$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \Rightarrow \neg p.$$

3.លក្ខណៈស៊ីឡូជិស

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow (p \rightarrow r).$$

4.លក្ខណៈញែកស៊ីឡូជិស

$$((p \vee q) \wedge \neg q) \Rightarrow p.$$

5.លក្ខណៈជាប់

$$(\neg p \rightarrow F) \Rightarrow p.$$

6.លក្ខណៈធម្មតារៀងគ្នា

$$(p \wedge q) \Rightarrow p.$$

7.លក្ខណៈញែក

$$p \Rightarrow (p \vee q).$$

8.សម្រាយបញ្ជាក់ដោយករណី

$$((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$$

2.2.3.**វិធាននៃសម្មតិកម្មនៃព្យាករណ៍ដាក់ក្រមិតចំនួន**

គេអោយ P(x) និង Q(x,y) ជាកត្តាកំណត់ពីរក្នុងអថេរមួយនិងពីរ។ ខាងក្រោមនេះជាច្បាប់ចំណូលមូលដ្ឋានមួយចំនួនសម្រាប់សម្មតិកម្មនៃបរិមាណ។

1.ការបដិសេធន៍

$$\neg\forall xP(x)\Leftrightarrow\exists x\,\neg P(x),$$
$$\neg\exists xP(x)\Leftrightarrow\forall x\,\neg p(x).$$

2.សន្ទតិកម្ម (ផ្លាស់ប្តូរឈ្មោះនៃអថេរដែលបានកំណត់)

$$\forall x\,P(x)\Leftrightarrow\forall y\,P(y),$$
$$\exists x\,P(x)\Leftrightarrow\exists y\,P(y).$$

3.លក្ខណៈយោងតាមបរិមាណជាក់លាក់នៃប្រភេទដូចគ្នាៈ

$$\forall x,\forall y\,,Q(x,y)\Leftrightarrow\forall y,\forall x,\;Q(x,y),$$
$$\exists x,\exists y\,,Q(x,y)\Leftrightarrow\exists y,\exists x,\;Q(x,y).$$

4.លក្ខណៈសកលនៃភាពជាក់លាក់

$$\forall x,P(x)\Rightarrow P(a),\;\exists a\in D_x.$$

5.លក្ខណៈអំណះអំណាងដែលមានស្រាប់

$$\exists xP(x)\Rightarrow P(a),\forall\;a\in D_x.$$

6.លក្ខណៈសកលទូទៅ

$$(\exists a\in Dx,P(a)\;=\;T)\Rightarrow\forall xP(x).$$

7.លក្ខណៈកើតមានទូទៅ

$$(\forall a\in Dx,P(a)\;=\;T)\Rightarrow\exists xP(x).$$

វិចារណ៍ យើងមិនអាចបង្ហាញពីស្តង់ដារមួយដើម្បីបញ្ជាក់ពីភាពខុសគ្នារវាង" ∀ " នៅក្នុងលេខ ៦ និង"∃" នៅក្នុងលេខ ៧ ។ យើងគួរតែរកវិធីដើម្បីធ្វើឱ្យច្បាស់នៅក្នុងការសម្រាយបញ្ជាក់ដោយគ្មានការភាន់ច្រលំ។ មើលចំណោទទី ៥០ នៃជំពូកនេះ។

2.3 ទម្រង់ធម្មតាដែលមិនដំណើរការ DNF និងសំណុំបែបបទធម្មតារួម CNF

នៅក្នុងផ្នែកនេះយើងណែនាំវិធីជាប្រព័ន្ធដើម្បីស្វែងរក DNF និង CNF ដែលបានផ្តល់ឱ្យ រូបមន្តបង្កើតបានយ៉ាងល្អ។ DNF និង CNF ប្រហែលជាមិនមែនជាឥស្សរជនគណិតវិទ្យាសម្រាប់ការបង្ហាញណាមួយទេប៉ុន្តែវាជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃបទបង្ហាញនៅខាងក្នុង។

កុំព្យូទ័រឌីជីថលទំនើបDNF និង CNF ។ DNF និង CNF ផ្តល់នូវបរិក្ខាងាយស្រួលមួយក្នុងការអនុវត្តន៍និងមានភាពឆ្លាតវៃ។ការបង្កើតកម្មវិធីឡូជីខលនិងផ្នែកស្រាវជ្រាវជាច្រើនទៀត។ ដូច្នេះវាគួរឱ្យយើងយកចិត្តទុកដាក់បន្ថែមទៀតចំពោះ DNF និង CNF ។យើងនឹងពិភាក្សាគរុកោសល្យក្នុងអថេរចំនួនបី។ មនុស្សម្នាក់អាចពង្រីកវិធីសាស្ត្រទៅនឹងករណីទូទៅមួយយ៉ាងងាយស្រួល។

2.24: ការអនុវត្តន៍ គេអោយជារូបមន្តដែលបានបង្កើតឡើងនៅក្នុងអថេរ $x_1, x_2, x_3,$ និង គេអោយ $i \in \{1, 2, 3\}$.

1.ពាក្យនីមួយៗ x_i ឬការបំពេញបន្ថែមរបស់វា $\neg x_i$ ត្រូវបានគេហៅថាព្យញ្ជនៈ

2.រយៈពេលនៃទម្រង់ $y_1 \wedge y_2 \wedge y_3,$ ពេលដែល $y_i = x_i \vee y_i = \neg x_i$ ត្រូវបានគេហៅថាការប្រជុំ។

3.រយៈពេលនៃទម្រង់ $y_1 \vee y_2 \vee y_3,$ ពេលដែល $y_i = x_i \vee y_i = \neg x_i$ ត្រូវបានគេហៅថាការប្រជុំ។

4.ការតាងនៃ f នៅក្នុងការញែកនៃការភ្ជាប់មូលដ្ឋានត្រូវបានគេហៅថាការកែងគ្នានៃន័រម៉ាលដែលមិនដំណើរការ (DNF)ឬផលបូកនៃផលពី។

5.ការតាងនៃ f នៅក្នុងការភ្ជាប់គ្នានៃការបំបែកមូលដ្ឋានត្រូវបានគេហៅថាការកែងគ្នានៃន័រម៉ាល(CNF) ឬផលបូកនៃផលបូកពី។

2.3.1. **ដែនកំណត់នៃរូបមន្តទម្រង់ធម្មតាដែលមិនដំណើរការ**

$DNF: D_1 \vee D_2 \vee \cdots \vee D_n$ តាង f ជារូបមន្តដែលមាននៅក្នុងអថេរ 3 a, b, និង c ។មានការចូលរួមមួយចំនួនប្រាំបីដែលអាចធ្វើបានសម្រាប់ D នៅក្នុង (២.៣) ។ ការភ្ជាប់មូលដ្ឋានទាំងនេះត្រូវបានគេស្គាល់សំរាប់ f និង DNF ។ គេអោយ d_i ក្លាយជា i^{th} សំរាប់ការបង្ហាញនិងការលុបចេញ។

$$\left.\begin{array}{l} d_1 \ : a \wedge b \wedge c \\ d_2 \ : a \wedge b \wedge \overline{c} \\ d_3 \ : a \wedge \overline{b} \wedge c \\ d_4 \ : a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c} \\ d_5 \ : \overline{a} \wedge b \wedge c \\ d_6 \ : \overline{a} \wedge b \wedge \overline{c} \\ d_7 \ : \overline{a} \wedge \overline{b} \wedge c \\ d_8 \ : \overline{a} \wedge \overline{b} \wedge \overline{c} \end{array}\right\} \text{ភាពមិនកើតមាននៅក្នុងបីអថេរ}$$

ពេលដែលយើងប្រើប្រាស់ $\overline{x}$ ដើម្បីបញ្ជាក់ថា $\neg x$ ដោយសារតែការចន្លោះ

ជំហាន់ទី 1 រកតម្លៃពិតនីមួយៗដែលវាមានភាពងាយស្រួលក្នុងការប្រើតារាងការពិតដូចបង្ហាញខាងក្រោម ដែលតម្លៃនៃភាពពិតទាក់ទងនឹងបណ្តុំនីមួយៗត្រូវបានវាយតម្លៃនិងធ្វើតាមតម្លៃពិតនៃ f។

a	b	C	$a\wedge b\wedge c$	$a\wedge b\wedge \overline{c}$	$a\wedge \overline{b}\wedge c$	… …	$f(a,b,c)$	
T	T	T	T	F	F	… …	T	√
T	T	F	F	T	F	… …	F	
T	F	T	F	F	T √	… …	T	√
• •						… …		
						… …		

ជំហានទី២ ពិនិត្យជួរឈរចុងក្រោយនិងសម្គាល់ជួរដែលតម្លៃរបស់ F គឺ F. សម្រាប់ជួរនីមួយៗដែលបាន សម្គាល់យើងពិនិត្យនិងសម្គាល់ដែលមានតម្លៃ F ក្នុងជួរ។ ចំណាំថាសម្រាប់ជួរនីមួយៗមានតែមួយដែលមាន តម្លៃ F ហើយមានជួរដេកមួយដែលមានតម្លៃ F នៅក្នុងជួរឈរក្នុងការកើតឡើងនីមួយៗ។

ជំហានទី៣ ទីបំផុត CNF គឺជាការរួមបញ្ចូលគ្នានៃកាកើតឡើងដែលត្រូវបានសម្គាល់នៅក្នុងជំហានទី ២ ។ នៅក្នុងឧទាហរណ៍ផ្នែកខាងលើផ្នែកមួយនៃ CNF គឺ $f(a,b,c) = (a\vee b\vee c)\wedge(a\vee b\vee c)\wedge\cdots$

ឧទាហរណ៍ 2.8 ស្វែងរក CNF នៃ $(a \to b) \vee c$

គេអោយ $f(a,b,c) = (a \to b) \vee c,$ និង $d_1, d_2, ..., d_8$ ជាការកើនឡើងដែលយើងទើបតែបានគ្រោងទុក។ អនុវត្តតាមដែលយើងទើបតែបានពិពណ៌នាជាជំហាន ៗ យើងមានក្នុងតារាងខាងក្រោម។

a	b	c	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	f
T	T	T	T	F	F	F	F	F	F	F	T
T	T	F	F	T	F	F	F	F	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	F	F	F	F	T
T	F	F	F	F	F	T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F	F	T	F	F	F	T
F	T	F	F	F	F	F	F	T	F	F	T
F	F	T	F	F	F	F	F	F	T	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	T	T

យោងទៅតាមវិធានក្នុងជំហានទី ៣ CNF នៃ f គឺ $d_1 \vee d_2 \vee d_3 \vee ... \vee d_8$ មានន័យថា៖

$$(a \to b) \vee c \; = \; (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c).$$

CNF នៃរូបមន្តដែលបានកើតឡើង $CNF: \; C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n.$

គេអោយ f ហើយមានអថេរបីគឺ a , b, និង c មានការកើតឡើងចំនួន ៨ សម្រាប់ CNF។ គេអោយ c_i ក្លាយជា i^{th} ការកើតឡើងនោះមានដូចខាងក្រោម៖

$$\left.\begin{array}{l} c_1 \; : a \vee b \vee c \\ c_2 \; : a \vee b \vee c \\ c_3 \; : a \vee b \vee c \\ c_4 \; : a \vee b \vee c \\ c_5 \; : a \vee b \vee c \\ c_6 \; : a \vee b \vee c \\ c_7 \; : a \vee b \vee c \\ c_8 \; : a \vee b \vee c \end{array}\right\}$$

ការសាងឡើងសម្រាប់CNF ក្នុងអថេរ ៣ ។

ជំហានទី១

A	b	c	$a \vee b \vee c$	$a \vee b \vee \bar{c}$	: :: :	$\bar{a} \vee \bar{b} \vee c$	: :	$f(a,b,c)$
T	T	T	T	T	: :: :	T	: :	T
T	T	F	T	T	: :: :	F	: :	F
T	F	T	T	T	: :: :	T	: :	T

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	F	F	T	[illegible]	T	[illegible]	F

យើងសាងសង់តារាងការពិតខាងក្រោម។ ដូចដែលយើងបានធ្វើសម្រាប់ការបញ្ចូលDNFនីមួយៗត្រូវតែកាន់កាប់ជួរឈរមួយហើយជួរឈរចុងក្រោយមានតម្លៃពិតនៃ f ។

ជំហានទី២ យើងពិនិត្យមើលជួរឈរចុងក្រោយហើយគូសជួរដេកដែលតម្លៃរបស់វាគឺ T។ ចំពោះជួរនីមួយៗដែលបានសម្គាល់យើងបង្ហាញហើយសម្គាល់ប្លុកដែលមានតម្លៃ T នៅក្នុងជួរ។ ចំណាំថាសម្រាប់ជួរនីមួយៗមានប្លុកអាគារតែមួយដែលមានតម្លៃ T ហើយសម្រាប់ជួរឈរនីមួយៗនៃប្លុកអាគារមានជួរដេកមួយដែលមានតម្លៃ

ជំហានទី៣ ទីបំផុត CNF គឺជាការរួមបញ្ចូលគ្នានៃប្លុកដែលត្រូវបានសម្គាល់នៅក្នុងជំហានទី ២ ។ នៅក្នុងឧទាហរណ៍ផ្នែកខាងលើផ្នែកមួយនៃ CNF គឺ៖ $f(a, b, c) = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee c) \wedge \cdots$

ឧទាហរណ៍ ២.៩ ស្វែងរក CNF នៃ $(a \to b) \vee c$

គេអោយ $f(a, b, c) = (a \to b) \vee$ និង $c_1, c_2, \ldots, c_8$ ធ្វើជាប្លុកដែលយើងទើបតែបានគ្រោងទុក។

a	b	c	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	f
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	T	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T	F	T	T	T	F
F	T	T	T	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T

ដូច្នេះ

$$(a \to b) \vee c = (a \vee b \vee c)$$ ។

ឧទាហរណ៍ ២.១០ ស្វែងរក DNF និង CNF នៃ $a \wedge (b \leftrightarrow c)$

គេអោយ $f = a \wedge (bc)$, និង $d_1, d_2, \ldots, d_8$ ជាបណ្តុំប្លុកសំរាប់ DNF និង $c_1, c_2, \ldots, c_8$ ប្លុក សំរាប់ទំរង់បែបធម្មតាដែលមិនដំណើរការ។

a	b	c	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	f
T	T	T	T	F	F	F	F	F	F	F	T
T	T	F	F	T	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F	F	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	F	F	F	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F	F	T	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F	F	T	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	T	F

សម្រាប់ទំរង់ធម្មតានៃការភ្ជាប់ ដូច្នេះសំណុំបែបបទធម្មតា ការភ្ជាប់សម្រាប់សំណុំបែបបទធម្មតារួមនៃ $d_1 \wedge d_4$, i.e.,(a ∧ b ∧ c) ∨ (a ∧ b ∧ c).សម្រាប់ CNF :

a	b	c	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	f	
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	T	
T	T	F	T	T	T	T	T	T	F √	T	F	√
T	F	T	T	T	T	T	T	F √	T	T	F	√
T	F	F	T	T	T	T	F	T	T	T	T	
F	T	T	T	T	T	F √	T	T	T	T	F	√
F	T	F	T	T	F √	T	T	T	T	T	F	√
F	F	T	T	F √	T	T	T	T	T	T	F	√
F	F	F	F √	T	T	T	T	T	T	T	F	√

ដូច្នេះ គេបាន CNF នៃអនុគមន៍ f គឺ៖ $c_1 \wedge c_2 \wedge c_3 \wedge c_4 \wedge c_6 \wedge c_7$,

$$(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (a \vee \bar{b} \vee c) \wedge (a \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee b \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c)$$

2.3.3 **ទំរង់កាត់បែបធម្មតាសំរាប់ជាលក្ខណៈតៗគ្នានិងទម្រង់ធម្មតា តៗគ្នា**

ដោយមានរូបមន្តដែលបានបង្កើតឡើងយ៉ាងល្អយើងអាចរកឃើញទម្រង់ធម្មតានិងសាមញ្ញធម្មតាពីសំណុំពិតនិងសំណុំមិនពិត។ យើងសន្មតថា f មានអថេរបើ a, b, និង c ហើយអនុញ្ញាតឱ្យទ្រង់ទ្រាយនៃភាពពិតកំណត់ T_f និងសំណុំមិនពិត F_f ជា $D_a \times D_b \times D_c$ ។

ជំហានទី១: ស្វែងយល់ពីសំណុំពិត T_f និងសំណុំមិនពិត F_f នៃ f ។

ជំហានទី២: សម្រាប់ទំរង់ដែលមានលក្ខណៈបែបកែងតៗគ្នាយើងនឹងប្រើសំណុំពិត T_f ។ ប្លុកដែលគួរតែលេចចេញជាទម្រង់ធម្មតានៃ f គឺដែលមានតម្លៃ T ប្រសិនបើយើងអនុវត្តជាគុម្មយចំនួននៅក្នុង T_f ។ ម៉្យាងវិញទៀតសម្រាប់ $(t_a,\, t_b,\, t_c) \in T_f$ យើងជ្រើសរើស $(x_a \wedge x_b \wedge x_c)$ ដោយយោងទៅតាមច្បាប់ខាងក្រោម។

1. $x_a = \neg a$ បើ $t_a = T$
2. $x_a = a$ បើ $t_a = F$
3. x_b និង x_c ត្រូវបានសំរេចដោយគោលការណ៍ដូចខាងលើ។

សម្រាប់ទម្រង់ដែលមានលក្ខណៈបែបកែងតៗគ្នាយើងនឹងប្រើ សំណុំ F_f ។ ប្លុកដែលគួរតែលេចចេញជាទម្រង់ដែលមានលក្ខណៈបែបកែងតៗគ្នាគឺ មានតម្លៃត F ប្រសិនបើយើងអនុវត្តជាគុម្មយចំនួននៅក្នុង F_f ចំពោះវា។ ម៉្យាងវិញទៀតសម្រាប់នីមួយៗ $(t_a,\, t_b,\, t_c) \in F_f$,យើងជ្រើសរើស $(x_a \wedge x_b \wedge x_c)$ ដោយយោងទៅតាមច្បាប់ខាងក្រោម។

ឧទាហរណ៍ រកសំណុំបែបបទដែលកែងតៗគ្នាមិនសមហេតុផលនិងទម្រង់ធម្មតានៃ

$(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow c$ ចេញពីសំណុំភាពពិតនិងសំណុំមិនពិតរបស់វាដោយផ្ទាល់។

គេអោយ f $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow c$ ដំបូងយើងរកឃើញ T_f និង F_f ដោយប្រើតារាងភាពពិតខាងក្រោ

a	b	c	$a \leftrightarrow b$	$(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	T	F	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	F

យើងមាន

$T_f = \{(T, T, T), (T, F, F), (F, T, F), (F, F, T)\},$

$F_f = \{(T, T, F), (T, F, T), (F, T, T), (F, F, F)\}$ ។

ចំពោះទម្រង់ដែលមានលក្ខណៈកែងតៗគ្នា។យើងអនុវត្តច្បាប់ដែលបានពិពណ៌នាលើជាតុទាំងបួននៃT_f។យើងអនុវត្តច្បាប់ដែលបានពិពណ៌នានៅលើT_f ទាំងអស់ដើម្បីទទួលបានប្លុកដែលជាប់ទាក់ទង។

$$\begin{aligned}
(T, T, T) &\Rightarrow (a \wedge b \wedge c) \\
(T, F, F) &\Rightarrow (a \wedge b \wedge c) \\
(F, T, F) &\Rightarrow (a \wedge b \wedge c) \\
(F, F, T) &\Rightarrow (a \wedge b \wedge c)
\end{aligned}$$

ដូច្នេះទំរង់ដែលមានលក្ខណៈកែងនៃ F គឺ $(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c).$

ក្នុងលក្ខណៈស្រដៀងគ្នានេះយើងប្រើ F_f នៃ f ដើម្បីរកទម្រង់ដែលកែងគ្នា

$$\begin{aligned}
(T, T, F) &\Rightarrow (a \vee b \vee c), \\
(T, F, T) &\Rightarrow (a \vee b \vee c), \\
(F, T, T) &\Rightarrow (a \vee b \vee c), \\
(F, F, F) &\Rightarrow (a \vee b \vee c)
\end{aligned}$$

ដូច្នេះទំរង់ ដែលកែងតៗគ្នានៃ f គឺ

$$(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee c)$$ ។

លំហាត់

លំហាត់1 អនុវត្តន៍ សំណុំ

$A = \{1, \ldots, 10\}, B = \{3, 7, 11, 12\}, C = \{0, 1, \ldots, 20\}$

តើត្រូវមួយណានៃសំណើខាងក្រោមនេះ ?

$(1).1+1=3$

$(2).(A\cup B)\subset C$

$(3).A\cap B$

$(4).\dfrac{(8+22)^3}{10^2}$

$(5).7\in A$

$(6).(B\cap C)\in 9$

$(7).C$

C គឺសំណុំមិនអាចកំណត់បាន

លំហាត់ 2 ស្វែងរករូបមន្តដែលអាចបង្កើតឡើង ដែលមាននៅក្នុងតារាភាពពិតខាងក្រោម។

a	b	f	g
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	T	T

លំហាត់ 3 ប្រសិនបើ p → q មិនពិត តើអ្វីដែលជាតម្លៃពិតនៃ

$$((\neg p)\wedge q)\leftrightarrow(p\vee q)?$$

លំហាត់ 4 បង្កើតតារាងភាពពិតសម្រាប់ចំណុចខាងក្រោម៖

1. $(a\to T\ )\wedge(F\to b)$

2. $(F\vee a)\to(b\wedge F\ )$

3. $(a\vee b)\wedge(a\vee\neg b)$

លំហាត់ 5 តើអ្វីទៅដែលជាវិធីសាស្រ្តសម្រាប់ tautology ?

1. $(a\leftrightarrow b)\to(a\wedge b)$,
2. $(a\leftrightarrow b)\leftrightarrow(a\wedge b)\vee(\neg a\wedge\neg b)$

លំហាត់ 6 បង្ហាញថា

$(\ a\vee b\to c)\to(\ a\wedge b\to c)$,

ប៉ុន្តែវាមានទំនាក់ទំនង មានន័យថា, $(a \wedge b \to c) \to (a \vee b \to c)$ វាមិនពិត។

លំហាត់ 7 គេអោយ p, q, r តាងលក្ខខណ្ឌខាងក្រោមអំពីត្រីកោណ ABC ។

p :ត្រីកោណ ABC គឺមានជ្រុងពីរស្របគ្នា

q :ត្រីកោណ ABC គឺជាត្រីកោណសមបាត

r :ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត

បកប្រែអត្ថបទនីមួយៗជាប្រយោគអង់គ្លេស។

1. $q \to p$
2. $\neg p \to \neg q$
3. $q \leftrightarrow r$
4. $p \wedge \neg q$
5. $r \to p$

លំហាត់ 8 គេអោយ p, q, r បញ្ជាក់លក្ខខណ្ឌ។ដោយប្រើតារាងភាពពិតដើម្បីបង្ហាញសមភាពនៃតក្ក ខាងក្រោម។

1. $p \to (q \wedge r) \leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$
2. $[(p \vee q) \to r] \leftrightarrow [(p \to r) \wedge (q \to r)]$

លំហាត់ 9: គេអោយ p, q, r បញ្ជាក់លក្ខខណ្ឌ។ដោយប្រើច្បាប់តក្កវិជ្ជាដើម្បីបង្ហាញថា

$$[p \to (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to r].$$

លំហាត់ 10 គេអោយ p, q, និង r ជាលក្ខខណ្ឌដើម។ យើងអាចសរសេរលក្ខខណ្ឌខាងក្រោមជា

1. $q \to p$
2. $p \to (q \wedge r)$
3. $p \leftrightarrow q$

លំហាត់ 11បង្ហាញថា

$$((a \wedge b) \to c) \leftrightarrow ((a \to c) \vee (b \to c)).$$

លំហាត់ 12 សិក្សាតារាងភាពពិតសម្រាប់ម៉ូឌុលដើម្បីបង្ហាញថាវាជាការចម្លងនៃតក្កវិទ្យាគ្មានភាពសមមូលទេ។

លំហាត់ 13: ការពិចារណាសន្មត់ថាប្រសិនបើមានល្បែងបាល់បន្ទាប់មកការធ្វើដំណើរពិបាកណាស់។ ប្រសិនបើពួកគេមកដល់ទាន់ពេលវេលាបន្ទាប់មកការធ្វើដំណើរមិនពិបាកទេ។ ពួកគេបានមកដល់ទាន់ពេល។

សេចក្តីសន្និដ្ឋានៈ មិនមានល្បែងបាល់ទេ។

កំណត់ថាតើការសន្និដ្ឋានធ្វើតាមនៃក្កត។ ពន្យល់ដោយតំណាងឱ្យលក្ខខណ្ឌជាការតំណាងនិងប្រើវិធាននៃការបង្ហាញ។

លំហាត់ 14: ការពិចារណា

ការសន្និដ្ឋានៈប្រសិនបើលោក ក្លាគ ហន មានការគាំទ្រយ៉ាងទូលំទូលាយនោះគាត់នឹងត្រូវបានស្នើសុំឱ្យឈរឈ្មោះសម្រាប់ព្រឹទ្ធសភា។ ប្រសិនបើលោក ក្លាគ ហន ស្រែកថា" Eureka" នៅរដ្ឋឡូវ៉ា គាត់នឹងមិនត្បានស្នើសុំឱ្យឈរឈ្មោះជាសមាជិកព្រឹទ្ធសភានោះទេ។លោកក្លាគ ហន ស្រែកថា" Eureka" នៅរដ្ឋឡូវ៉ា ។

សេចក្តីសន្និដ្ឋានៈ លោកក្លាគ ហន មិនមានការគាំទ្រធំទូលាយទេ។

កំណត់ថាតើការសន្និដ្ឋានធ្វើតាមនៃតក្កវិទ្យា។ពន្យល់ដោយតំណាងឱ្យលក្ខខណ្ឌនិងប្រើជានិមិត្តសញ្ញានិងប្រើវិធាននៃការបង្ហាញ។

លំហាត់15:ចូរសរសេរការផ្ទុយមកវិញនិងភាពអវិជ្ជមាននៃលក្ខខណ្ឌ ដូចខាងក្រោម

" ប្រសិនបើ សាន ត្រា បញ្ចប់ការងាររបស់នាងនាងនឹងទៅលេងបាល់បោះ" ។

លំហាត់ 16 សំរួល

$$(p \wedge (\neg r \vee q \vee \neg q)) \vee ((r \vee t \vee \neg r) \wedge \neg q).$$

លំហាត់ 17 សំរួល

$$(p \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)) \wedge ((p \wedge r \wedge t) \vee t)$$

លំហាត់ 18: ខាងក្រោមនេះគឺជាការសម្រាយបញ្ជាក់នៃតសម្រាប់

$(p \wedge (p \to q) \wedge (s \vee r) \wedge (r \to \neg q)) \to (s \vee t)$. យោងទៅ នៃច្បាប់តក្កវិជ្ជានិងច្បាប់គ្រឹះនិងហេតុផលដើម្បីបង្ហាញអំពីជំហាននីមួយៗនៃការសម្រាយបញ្ជាក់។

លំហាត់ 19:ខាងក្រោមនេះគឺជាសេចក្ដីផ្ដើមនៃសម្រាយបញ្ជាក់នៃក្ដត

សេចក្ដីសន្និដ្ឋានៈ

$(\neg p \vee q) \to r$
$r \to (s \vee t)$
$\neg s \wedge \neg u$
$P \neg u \to \neg t$

ផ្ដល់ហេតុផលដើម្បីបង្ហាញអំពីភាពត្រឹមត្រូវនៃជំហាននីមួយៗនៃការសម្រាយ

ជំហ៊ាន	មូលហេតុ
1.$\neg s \wedge \neg u$ 2.$\neg u$ 3.$\neg u \to \neg t$ 4.$\neg t$ 5.$\neg s$ 6.$\neg s \wedge \neg t$ 7.$r \to (s \vee t)$ 8.$\neg (s \vee t) \to \neg r$ 9.$(\neg s \wedge \neg t) \to \neg r$ 10.$\neg t$ 11.$\neg (p \vee q) \to r$ 12.$\neg r \to \neg (\neg p \vee q)$ 13.$\neg r \to (p \vee \neg q)$ 14.$p \wedge \neg q$	
15. p	

លំហាត់ 20:ខាងក្រោមនេះគឺជា ការសម្រាយបញ្ជាក់នៃតក្កសម្រាប់

$((p \to q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (p \vee r)) \to (\neg q \to s)$.

ជំហ៊ាន	មូលហេតុ
1.$\neg(\neg q \rightarrow s)$ 2.$\neg q \wedge \neg s$ 3.$\neg s$ 4.$\neg r \vee s$ 5.$\neg r$ 6.$p \rightarrow q$ 7.$\neg q$ 8.$\neg p$ 9.$p \vee r$ 10.r 11.$\neg r \wedge r$ 12.$\neg q \rightarrow s$	

1.វិចារដើម្បីបង្ហាញអំពីភាពត្រឹមត្រូវនៃជំហាននីមួយៗនៃការសម្រាយ។ (សម្គាល់ៈនេះជាលក្ខណៈនៃការសម្រាយផ្ទុយ)

2.ការសម្រាយដោយផ្ទាល់

លំហាត់ 21:បញ្ជាក់ថាការសន្និដ្ឋានៈខាងក្រោមគឺមានមានសុពលភាព

សន្មត ប្បញ្ញត្តិ	$\neg p \leftrightarrow q$ $q \rightarrow r$ $\neg r$
សេចក្តីសន្និដ្ឋាន	p

លំហាត់ 22:បង្ហាញថាការសន្និដ្ឋានខាងក្រោមមិនស្ថិតស្ថេរ។

1.ប្រសិនបើតារាមិនបានមករៀនជាច្រើនលើកដោយសារគាត់មានជំងឺបន្ទាប់មក

គាត់បានបរាជ័យនៅវិទ្យាល័យ

2.ប្រសិនបើដែកបរាជ័យនៅវិទ្យាល័យបន្ទាប់មកគាត់គ្មានការអប់រំទេ។

3.ប្រសិនបើលោកដែក អានសៀវភៅជាច្រើនបន្ទាប់មកគាត់មិនមានចំណេះដឹងទេ។

4.លោកដែកមិនបានមករៀនជាច្រើនថ្ងៃដោយសាគាត់មានជំងឺនិងគាត់បានអាន

សៀវភៅជាច្រើនក្បាល។

លំហាត់ 23: គេអោយ $D_x := \square$ តើមួយណាដូចខាងក្រោមដែលត្រូវបានប៉ាន់ស្មាន ?

(1) $x^2+1<0$

(2) x សេស

(3) $(x^2-1)/(x+1)$

(4) $1+2=3$

(5) $x \in \square$

(6) $\sin^2 x+\cos^2 x$

លំហាត់ 24: ការកំណត់

$A = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x \le 10\};$
$B = \{y;\ y \in \mathbf{N},\ y \le 15 \text{ ,y even}\}.$

សរសេរសម្មតិកម្មពីរដែលមាននៅក្នុងនោះ $A-B$ និង $B-A$ ដែលត្រូវបានកំណត់ការពិតជាក់លាក់។

លំហាត់ 25: គេអោយ P និង Q ជាកត្តាកំណត់ និងឲ្យ សំណុំភាពពិតរបស់វាត្រូវបានកំណត់ដោយ T_P, T_Q និងសំណុំមិនពិតត្រូវបានកំណត់ដោយ F_P, F_Q បញ្ជាក់លក្ខណៈ ដូចខាងក្រោម។

1. $T_P \cap T_Q = T_{P\wedge Q}$
2. $T_P \cup T_Q = T_{P\vee Q}$
3. $F_P \cap F_Q = F_{P\vee Q}$
4. $F_P \cup F_Q = F_{P\wedge Q}$

លំហាត់ 26:តើអ្វីទៅជាលក្ខខណ្ឌទូទៅលើភាពពិតដែលកំណត់ T_P និង T_Q

1.$(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow P(x)$ ពិត

2.$(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow Q(x)$ ពិត

លំហាត់ 27: ឧបមាថាដែន D សម្រាប់ការប៉ាន់ស្មាន P, Q, និង S ស្ថិតលើ $\{a,\ b,\ c\}$។

បង្ហាញសំណើដូចខាងក្រោមដោយមិនប្រើបរិមាណ។

1.$\forall x\ P\ (x)$

2. $(\forall x\ R(x)) \wedge (\exists x\ S(x)$

លំហាត់ 28៖ គេអោយ $D_x = D_y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ កំណត់និយមន័យ P (x, y)ដូចជា៖

$P\ (x, y) := (y \geq x) \vee (x + y > 6).$

រកសំណុំនៃភាពពិតដូចខាងក្រោម:

1. $P\ (x, y).$
2. $\exists x P\ (x, y)$
3. $\exists y P\ (x, y)$
4. $\forall x P\ (x, y)$
5. $\forall y P\ (x, y)$

លំហាត់ 29: គេអោយ V ត្រូវបានកំណត់ភាពពិតនៃ $P(x, y)$ ដូច្នេះ$V \subseteq D_x \times D_y$ ។

1.បង្ហាញថាសំណុំភាពពិតនៃ $\exists x \in D_x P(x, y)$ គឺជាសំណុំនៃកូអរដោនេទីពីរដែលបានរៀប

តាមលំដាប់នៃភាពគូV

2.បង្ហាញថាសំណុំភាពពិតនៃ $\forall x \in D_x P(x, y)$ គឺ $\{b; b \in D_y,\ D_x \times \{b\} \subseteq V\}$

លំហាត់ 30: តាងសំណុំ

$D_x = \{t; t \in R, -1 \leq t \leq 1\}$ និង $D_y = \{r; r \in \square, 0 \leq r \leq 1\}$

ជាសំណុំសកលនៃ x និង y រៀងគ្នា។រក $P(x, y) = (x + y \leq 1) \wedge (y - x \leq 1); Q(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1$

បង្ហាញថា $T_P \subseteq T_Q$ ដែល T_P ជាសំណុំភាពពិតនៃ P និង T_Q គឺជាសំណុំភាពពិតនៃ Q

លំហាត់ 31: គេអោយ *A, B* និង *S* ជាសំណុំខាងក្រោមនេះជាសម្រាយបញ្ជាក់ ដែលមិនត្រឹមត្រូវអាច

អះអាងបានថា $S \subseteq (A \cup B) \Rightarrow (S \subseteq A \vee S \subseteq B)$

ប្រសិនបើការបកស្រាយខុស $S \subseteq (A \cup B)$, បន្ទាប់មក

$(1)\ x \in S \Rightarrow x \in (A \cup B)$
$(2)\ x \in S \Rightarrow (x \in A \vee x \in B)$
$(3)\ (x \in S \Rightarrow x \in A) \vee (x \in S \Rightarrow x \in B)$
$(4)\ S \subseteq A \vee S \subseteq B$

ចង្អុលបង្ហាញជំហានណាមួយដែលមានបញ្ហាហើយពន្យល់ពីមូលហេតុដែលមានបញ្ហាទាំងនោះ។

ពិចារណាលើនិយមន័យនៃសំណុំរងនៃពាក្យរងនៃកាសន្និដ្ឋាន។

លំហាត់ 32:គេអោយ $P(x, y)$ គឺជាកាសន្និដ្ឋានដែលបានកំណត់ជា

$P(x, y) : (x \vee y) \to z$

បង្ហាញពីភាពអវិជ្ជមាននៃ $\forall x \exists y\ P(x, y)$ ដោយគ្មាននៅពីមុខកំណត់នៃបរិមាណណាមួយ

លំហាត់ 33:យក P_1 បោះទៅ P_7 អោយជាកាសន្និដ្ឋាន។សូមមើលការសន្និដ្ឋាននូវអ្វីដែលអ្នកអាចទទួលបាននៃតក្ក។ បកស្រាយខាងក្រោមៈ

P_1: ប៉ូលីសទាំងអស់បានអង្គុយហូបបាយជាមួយប៉ូលីស។

P_2: គ្មានបុរសណាដែលគ្រាន់តែមានសក់វែងហើយមិនអាចក្លាយជាអ្នកនិពន្ធកំណាព្យឡើយ។

P_3: Amos Judd មិនដែលជាប់ពន្ធនាគារទេ។

P_4: បងប្អូនជីដូនមួយរបស់យើងដែលគាត់ជាចុងភៅចូលចិត្តភាពត្រជាក់។

P_5: គ្មានប៉ូលីសណាម្នាក់ចេះតែងកំណាព្យទេ P ។

P_6: គ្មានអ្នកណាក្រៅពីបងប្អូនជីដូនមួយរបស់គាត់ធ្លាប់ញ៉ាំជាមួយគាត់នោះទេ P_7 ។

P_7: បុរសដែលមានសក់ខ្លីសុទ្ធតែបានជាប់ពន្ធនាគារ។

លំហាត់ 35: ការពិចារណា "គ្មានជ្រូកស្លាប់" ។ សរសេរសំណើនេះជាការសន្និដ្ឋាន។

សេចក្តីសន្និដ្ឋានៈ ទាហានទាំងអស់អាចដើរក្បួន។ទារកខ្លះមិនមែនជាទាហានទេ។

សន្និដ្ឋានៈ ទារកខ្លះមិនអាចដើរបានទេ។កំណត់ថាតើការសន្និដ្ឋានដើរតាមបរិមាណនៃតក្ក។ចូរពន្យល់

លំហាត់ 37:គេអោយ $D_x = □$ and $D_y = □^0$ កំណត់ថា $P(x, y)$ ជា "x បែងចែក y" ស្វែងរកតម្លៃពិតនៃការប៉ាន់ស្មានបរិមាណដូចខាងក្រោម។

1.$\forall y\, P(1, y)$
2.$\forall x\, P(x, 0)$
3.$\forall x\, P(x, x)$
4.$\forall y\, \exists x\, P(x, y)$
5.$\exists y\, \forall x\, P(x, y)$
6.$\forall x\, \forall y [(P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow (x = y)]$
7.$\forall x\, \forall y\, \forall z [(P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow P(x, z)]$

លំហាត់ 38: គេអោយ D_x និង D_y បញ្ជាក់ដែនកំណត់របស់ x និង y,ហើយពិចារណាលក្ខខណ្ឌនីមួយៗដែលមានបរិមាណដូចខាងក្រោម។ $\forall_x\ \exists_y [x + y = 17]$

កំណត់តម្លៃពិតនៃបរិមាណដែលមានក្នុងដែនកំណត់ផ្សេងៗគ្នា។

1.$D_x = D_y =$ សំណុំនៃចំនួនគត់។

2.$D_x = D_y =$ សំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

3.$D_x =$ សំណុំចំនួនគត់និង $D_y =$ សំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

4.$D_x =$ សំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាននិង $D_y =$ សំណុំចំនួនគត់។

លំហាត់ 39: តើអ្វីទៅជា DNF នៃ $(a \rightarrow b) \wedge (\neg a \rightarrow \neg b)$?

លំហាត់ 40: តើអ្វីទៅជា DNF ខាងក្រោម:

1. $a \rightarrow \neg b$
2. $(a \wedge b) \vee c$

លំហាត់ 42: គេអោយទម្រង់ដែលបានបង្កើតឡើងនៃ f គឺ $a \wedge (b \leftrightarrow c)$

1.ប្រើវិធីសាស្ត្រផ្លូវកាត់ (ប្រើសំណុំមិនពិត) ដើម្បីរក CNF នៃ f ។

2.ប្រើការគណនាសំណើដើម្បីរក DNF នៃ f ។

លំហាត់ 43: ពិចារណាលើលក្ខខណ្ឌ គណិតវិទ្យាខាងក្រោមនៅក្នុងទ្រឹស្តីជាលេខ៖

"ចំពោះរាល់ចំនួនគត់ n ធំជាង 1 មានចំនួនបឋមដាច់ខាងរវាង n និង 2n" ។

1.បង្ហាញលក្ខខណ្ឌនៃបរិមាណអថេរអថេរការសន្និដ្ឋាននិងនិមិត្តសញ្ញាវិសមភាព <ឬ> ។

2.បង្ហាញពីភាពអវិជ្ជមាននៃការទស្សន៍ទាយដែលបានរកឃើញនៅក្នុងលេខ 1 ដោយមិនប្រើ ¬។

[សូមប្រយ័ត្នក្នុងការកំណត់ដែន (s) នៃអថេររបស់អ្នក (s)]។

លំហាត់ 44: គេឱ្យ x និង y ស្ថិតនៅលើចំនួនគត់ទាំងអស់។ បញ្ជាក់ថាសំរាប់គ្រប់ x, y ប្រសិនបើ xy គឺជាចំនួនគូបន្ទាប់មកយ៉ាងហោចណាស់មួយនៃ x និង y គឺជាចំនួនគូដែរ។

លំហាត់ 45: តើអំណះអំណាងខាងក្រោមនេះត្រឹមត្រូវទេ ?

បរិមាណ

អ្នកដែលមានចិត្តខិតខំចង់រៀន។ក្មេងប្រុសទាំងនេះខ្លះខំធ្វើការ។

សេចក្តីសន្និដ្ឋានៈ

ដូច្នេះក្មេងប្រុសទាំងនេះខ្លះចង់រៀនសូត្រណាស់។

លំហាត់ 46: តើអំណះអំណាងខាងក្រោមនេះត្រឹមត្រូវទេ ?

បរិមាណ

មានបុរសដែលជាទាហាន។

ទាហានទាំងអស់សុទ្ធតែខ្លាំង។

ទាហានទាំងអស់សុទ្ធតែក្លាហាន។

សេចក្តីសន្និដ្ឋានៈ

ដូច្នេះបុរសខ្លាំងហើយក្លាហាន។

លំហាត់ 47សាកលវិទ្យាល័យគឺជាមជ្ឈមណ្ឌលសិក្សា និងគេអោយ x និង y សមាជិកនៃមជ្ឈមណ្ឌលសិក្សា។ កំណត់និយមន័យ $P(x, y)$ ជា $P(x, y) := x + y$ ។

បកប្រែពាក្យផ្សំដែលមានបរិមាណដូចខាងក្រោមទៅជាប្រយោគភាសាខ្មែរ

1. $\forall x \forall y \quad P(x, y)$
2. $\exists x \exists y \quad P(x, y)$
3. $\forall x \exists y \quad P(x, y)$
4. $\exists x \forall y \quad P(x, y)$

លំហាត់ 48:គេអោយដែនកំណត់លើចំនួនពិតទាំងអស់។ រកការសន្និដ្ឋានដែលអាចធ្វើបានពីទីតាំងដែលបានអោយ។

បរិមាណ

ចំនួនគត់ទាំងអស់គឺជាលេខសនិទាន

លេខពិតπមិនមែនជាចំនួនសនិទានទេ

លំហាត់ 49:គេអោយដែនកំណត់លើប្រជាជនទាំងអស់នៅសហរដ្ឋអាមេរិក។ ស្វែងរកការសន្មតដែលអាចធ្វើបានសម្រាប់ចំណូលចិត្តដូចខាងក្រោម។

បរិមាណ

រាល់សៀវភៅនៅបណ្ណាល័យទាំងអស់បានកត់ត្រានិងដឹងអំពីប្រព័ន្ធបែងចែកប្រព័ន្ធសមាជនៃសភា។

(ការសន្និដ្ឋានដោយមិនបានដឹង)

សេចក្ដីសន្និដ្ឋានៈ

អ្នកស្រីម៉ាហ្គារ៉េតស្គាល់បណ្ណាល័យប្រព័ន្ធកំណត់ចំណាត់ថ្នាក់សភា។

លំហាត់50: គេអោយ P និង Q ជាសម្មតិកម្មពីរ។បញ្ជាក់ថា

$\exists x[P(x) \vee Q(x)] \Leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

លំហាត់51: គេអោយP និងQ ជាសម្មតិកម្មពីរ។បញ្ជាក់ថា

$\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

លំហាត់ 52: គេអោយP និងQ ជាសម្មតិកម្មពីរ។បញ្ជាក់ថា

$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x[P(x) \vee Q(x)]$

លំហាត់ 53: គេអោយP និងQជាសម្មតិកម្មពីរ។បញ្ជាក់ថា

$\forall x[P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

ដំណោះស្រាយ

ដំណោះស្រាយ1: (1), (2), (5), និង (7)គឺជាសំណើ (3), (4) និង (6)មិនមែនជាសំណើទេ។

<u>ចំណាំ</u> (6) (B ∩ C) ∈ 9 មិនមែនជាសំណើទេ។ វាគ្មានន័យទេប៉ុន្តែនោះមិនមានន័យថាតម្លៃពិតរបស់វាគឺ F ទេ។

ដំណោះស្រាយ2: មានរូបមន្តដែលបានបង្កើតឡើង ដែលអាចបំពេញតារាងនៃភាពពិតដែលមាន។

ងាយៗបំផុតដែលយើងអាចគិតបាន។

$$f = \neg(a \wedge b),\ \text{និង}\quad g = b \to a$$

ដំណោះស្រាយ 3:គេអោយ $p \to q$ មិនពិតករណីតែមួយគត់ដែលក្នុងនោះ $p \to q$ គឺមិនពិតគឺនៅពេលណា p =T និង $q = F$ យើងអាចជំនួសការកើតឡើងនៃ p និងq ដោយតម្លៃរបស់វាគេនិងរកលទ្ធផលជាជំហាន ៗ ដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned} & ((\neg p) \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q) \\ = \ & ((\neg T) \wedge F) \leftrightarrow (T \vee F) \\ = \ & (F \wedge F) \leftrightarrow T \\ = \ & F \leftrightarrow T \\ = \ & F \end{aligned}$$

យោងទៅច្បាប់នៃតក្កដើម្បីបង្ហាញអំពីភាពត្រឹមត្រូវនៃជំហ៊ាននីមួយៗខាងលើ

ដំណោះស្រាយ 4:

1.តាង $f\ (a,\ b) = (a \to T\ ) \wedge (F \to b)$

a	b	T	F	$a \to T$	$F \to b$	$f(a,b)$
T	T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T

2. តាង $f(a,\ b) = (F \vee a)$ □ $(b \wedge F\ )$

a	b	T	F	$F \vee a$	$b \wedge F$	$f(a,b)$
T	T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	F	T

3. តាង $f\ (a, b) = (a \vee b) \wedge (a \vee$ Ù $b)$.

a	b	$\neg b$	$a \vee b$	$a \vee \neg b$	$f(a,b)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F

ដំណោះស្រាយ 5: យើងនឹងពិនិត្យមើលតារាងការពិតដើម្បីប្រាប់ថាតើលក្ខខណ្ឌ នេះគឺជាការប្រើ tautologies ឬអត់។

1. តាង $f = (a \leftrightarrow b)$ □ $(a \wedge b)$.

a	b	$a \Leftrightarrow b$	$a \wedge b$	f
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	F

ជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងភាពពិតមាន F នៅជួរចុងក្រោយ។ ដូច្នេះវាមិនមែនជា tautology. ទេ។

2. តាង $g = (a \leftrightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$

ចំណាំ gគួរតែអានថា $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))$,ប៉ុន្តែមិនដូច $((a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (a \wedge b)) \vee (\neg a \wedge \neg b)$,ពីព្រោះអាទិភាពនៃ $\vee$ គឺខ្ពស់ជាងអាទិភាពអាទិភាព$\leftrightarrow$

$s = (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$

a	b	$a \Leftrightarrow b$	$a \wedge b$	$\neg a \wedge \neg b$	s	g
T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	T
F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	F	T	T	T

ដូច្នេះខាងក្រោមគឺជា tautology ពីព្រោះរាល់លក្ខខណ្ឌដែលមានតម្លៃនៅក្នុងជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងក ភាពពិតរបស់វាគឺពិត។

លំហាត់6: គេអោយ

$$\begin{aligned} p &= a \vee b \longrightarrow c \quad q \\ &= a \wedge b \longrightarrow c \quad r \\ &= (a \vee b \longrightarrow c) \longrightarrow (a \wedge b \longrightarrow c) \\ s &= (a \vee b \longrightarrow c) \longleftarrow (a \wedge b \longrightarrow c) \end{aligned}$$

a	b	c	$a\wedge b$	$a\vee b$	p	q	r	s
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	F	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T	T	T
F	F	F	F	F	T	T	T	T

ពីតារាងការពិតខាងលើ r គឺជា autology និង s មិនមែនទេ។ ដូច្នេះ

$(a \vee b \quad c) \Rightarrow (a \wedge b \quad c)$,

ប៉ុន្តែវាផ្ទុយគឺមិនពិតទេ។

លំហាត់7: គេអោយ p : ត្រីកោណ *ABC* ជាសមបាត

q : ត្រីកោណ *ABC* មានជ្រុងទាំងអស់ស្មើគ្នា

r : ត្រីកោណ *ABC* សមមុំ

1. $q \to p$: ប្រសិនបើត្រីកោណ ABC មានជ្រុងទាំងអស់ស្មើគ្នាបន្ទាប់មកវាគឺជាត្រីកោណសមបាត។

2. $\neg p \to \neg q$:ប្រសិនបើត្រីកោណ ABC មិនមែនជាត្រីកោណសមបាតបន្ទាប់មកវាក៏មិនមានជ្រុងទាំងអស់ស្មើគ្នា។

3. $q \leftrightarrow r$:ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស លុះត្រាតែមានជ្រុង q ស្មើនិង ជ្រុង r

4. $p \wedge \neg q$: ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាតបន្ទាប់មកវាក៏មិនមែនជាត្រីកោណដែលមានជ្រុងទាំងអស់ស្មើគ្នាទេ។

5. $r \to p$:ប្រសិនបើត្រីកោណ ABCជាត្រីកោណដែលជ្រុងទាំងអស់ស្មើគ្នាបន្ទាប់មកវាជាត្រីកោណសមបាត។

$p \to (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$, let

ដំណោះស្រាយ 8:

$$\begin{aligned} s &= p \to (q \wedge r), \\ t &= (p \to q) \wedge (p \to r), \\ u &= (p \to (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (p \to r)). \end{aligned}$$

1.បញ្ជាក់ថា

p	q	r	$q\wedge r$	$p\to q$	$p\to r$	s	t	u
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T	T

ចាប់តាំងពីជួរឈរចុងក្រោយមានតម្លៃពិត T សម្រាប់តម្លៃដែលអាចមាន *p.q*, និង *r*,ដូច្នេះ

$p \to (q \wedge r)$ និង $(p \to q) \wedge (p \to r)$ សមមូលនៃក្កត។

2.បញ្ជាក់ថា $((p\vee q)\to r) \Longleftrightarrow ((p\to r)\wedge(q\to r))$, let

$$s = (p\vee q)\to r,$$
$$t = (p\to r)\wedge(q\to r),$$
$$u = ((p\vee q)\to r)\leftrightarrow((p\to r)\wedge(q\to r)),$$

និងសាងតារាងនៃភាពពិត៖

p	q	r	$p\vee q$	$p\to r$	$q\to r$	s	t	u
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T	T

ច្បាស់ថា $(p \vee q) \to r$ and $(p \to r) \wedge (q \to r)$ សមមូលនៃតក្ក

ដំណោះស្រាយ 9:ការប្រើប្រាស់ច្បាប់តក្កវិជ្ជាដែលយើងទទួលបាន

$p \to (q \vee r)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee (q \vee r)$ ឈ្នាប់សមមូល

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \vee r$ លក្ខណ:ផ្តុំ

$\Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q) \vee r$ លក្ខណៈទ្វេរបដិសេធន៍

$\Leftrightarrow \neg(\neg\neg p \wedge \neg q) \vee r$ លក្ខណៈដឺម៉រហ្គែន

$\Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \vee r$ លក្ខណៈទ្វេរបដិសេធន៍

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \rightarrow r$ ឈ្នាប់សមមូល

ដូច្នេះ $[p \rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \rightarrow r]$

លំហាត់10:តាមនិយមន័យទ្វេវាមិនអាចទៅរួចទេក្នុងការផ្តល់លក្ខខណ្ឌនៃតក្ក ពីរដែលមាន" →" ឬ" ↔" ។ យើងត្រូវរកលក្ខខណ្ឌសមមូលនៃតក្ករបស់វាពីរដែលមិនមានការភ្ជាប់តក្កក្រៅពី" ∧" និង" ∨" ។

1. ពី $q \rightarrow p \equiv \neg q \vee p$, ដូច្នេះពីរនៃ $q \rightarrow p$ is $1.\ \neg q \wedge p.$

2. ពី $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv \neg p \vee (q \wedge r)$ ទ្វេរបស់វាគឺ$1.\ \neg p \wedge (q \vee r).$

3. ការកាត់បន្ថយនៃ$p \rightarrow q$រូបមន្តដែលមានជាតុភ្ជាប់មានតែ∧, ∨, និងត្រូវបានផ្តល់ឱ្យខាងក្រោម។

ដូច្នេះពីរនៃ $p \leftrightarrow q$ គឺជា $(\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee p).$

ដំណោះស្រាយ 11:គោលដៅរបស់យើងគឺដើម្បីបង្ហាញថាតម្លៃនៅក្នុងជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងការពិតគឺពិតទាំងអស់។

$$\begin{aligned}
p \leftrightarrow q &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \\
&\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \\
&\equiv [(\neg p \vee q) \wedge \neg q] \vee [(\neg p \vee q) \wedge p] \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p) \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee F \vee F \vee (q \wedge p) \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s &= (a \wedge b) \rightarrow c, \\
t &= (a \rightarrow c) \vee (b \rightarrow c), \\
u &= ((a \wedge b) \rightarrow c) \leftrightarrow ((a \rightarrow c) \vee (b \rightarrow c)).
\end{aligned}$$

a	b	c	$a \wedge b$	$a \rightarrow c$	$b \rightarrow c$	s	t	u
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T	T

ដូច្នេះ u ជា tautology។

ដំណោះស្រាយ 12: ច្បាប់ម៉ូឌុលប៉ូណង់ ជា $(a \wedge (a \to b)) \Rightarrow b.$ តាង

ពីតារាងការពិតខាងលើយើងដឹងថា s គឺជា tautology. ។ ដូច្នេះ

$$s = (a \wedge (a \to b)) \to b,$$
$$t = (a \wedge (a \to b)) \leftrightarrow b.$$

a	b	$a \to b$	$a \wedge (a \to b)$	s	t
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	F
F	F	T	F	T	T

$$(a \wedge (a \to b)) \Rightarrow b.$$

ប៉ុន្តែ T មិនមែនជា tautology ទេហេតុដូចនេះហើយម៉ូឌុល ប៉ូណង់មិនមែនជាសមមូលនៃតក្កទេ។

ដំណោះស្រាយ 13: គេអោយ BG: មានល្បែងបាល់មួយ។

TD: ការធ្វើដំណើរគឺពិបាក។

AO: ពួកគេបានមកដល់ទាន់ពេល។

បរិមាណ $BG \to TD, AO \to \neg TD, AO.$

ជំហ៊ាន	មូលហេតុ
1. $BG \to TD$ 2. $AO \to \neg TD$ 3. AO 4. $\neg TD$ 5. $\neg TD \to \neg BG$	សន្មត សន្មត សន្មត 2,3 ,ម៉ូឌុល ប៉ូណង់ 1, ផ្ទុយពីវិជ្ជមាន
6. $\neg BG$	4,5,ម៉ូឌុល ប៉ូណង់

ហេតុដូច្នេះហើយការសន្និដ្ឋានថាមិនមានល្បែងបាល់គឺត្រឹមត្រូវទេតាមរយៈនៃតក្កហើយផ្អែកលើមូលដ្ឋានដែលបានផ្តល់ឱ្យ។

លំហាត់14: គេអោយ *CS*: Claghorn មានការគាំទ្រយ៉ាងទូលំទូលាយ។

RS: Claghorn ត្រូវបានស្នើសុំឱ្យឈរឈ្មោះសម្រាប់ព្រឹទ្ធសភា។

CY : Claghorn ស្រែកថា "Eureka"

បរិមាណ *CS* □□ *RS*, *CY* □□ ¬*RS*, *CY*.

សេចក្តីសន្និដ្ឋាន: ¬CS.

steps	reasons
1. $CS \rightarrow RS$	Premises
2. $CY \rightarrow \neg RS$	Premises
3. CY	premises
4. $CY \wedge (CY \rightarrow \neg RS)$	2 ^3
5. $\neg RS$	4, Modus Ponens
6. $\neg RS \rightarrow \neg CS$	1, Contrapositive
7. $\neg RS \wedge (\neg RS \rightarrow \neg CS)$	5 ^6
8. $\neg CS$	7, Modus Ponens

ដូច្នេះ"Claghorn មិនមានការគាំទ្រច្រើនទេ" គឺត្រឹម ពីកន្លែងដែលបានឱ្យប៉ុណ្ណោះ។

ដំណោះស្រាយ 15: គេអោយ *p* : Sandraបានបញ្ចប់កាងាររបស់នាង។

q : Sandra ទៅលេងបាល់បោះ។

ការជាប់ទាក់ទិន: $(p \rightarrow q)$

ប្រសិនបើ Sandra បញ្ចប់ការងាររបស់នាងនាងនឹងទៅលេងបាល់បោះ។

បំលែង: $(q \rightarrow p)$

ប្រសិនបើ Sandra ទៅលេងបាល់បោះនាងនឹងបញ្ចប់ការងាររបស់នាង។

បញ្ច្រាស់: $(\neg p \rightarrow \neg q)$

ប្រសិនបើ Sandra មិនបញ្ចប់ការងារនាងនឹងមិនទៅលេងបាល់បោះទេ។

ភាពផ្ទុយគ្នា: $(\neg q \rightarrow \neg p)$

ប្រសិនបើសានត្រា មិនទៅលេងបាល់បោះទេនាងមិនបញ្ចប់ការងាររបស់នាងទេ។

បដិសេធ $(p \wedge \neg q)$

សានត្រា បញ្ចប់ការងាររបស់នាងហើយនាងមិនទៅលេងបាល់បោះទេ។

ដំណោះស្រាយ 16:

$$\left(p\wedge(\neg r\vee q\vee\neg q)\right)\vee\left((r\vee t\vee\neg r)\wedge\neg q\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(p\wedge(\neg r\vee T)\right)\vee\left((t\vee T)\wedge\neg q\right)$$
$$\Leftrightarrow(p\wedge T)\vee(T\wedge\neg q)$$
$$\Leftrightarrow p\vee\neg q$$

ដំណោះស្រាយ 17:

$$(p\vee(p\wedge q)\vee(p\wedge q\wedge\neg r))\wedge((p\wedge r\wedge t)\vee t)$$
$$\Leftrightarrow(p\vee(p\wedge q\wedge T)\vee(p\wedge q\wedge\neg r))\wedge((p\wedge r\wedge t)\vee(T\wedge t)\qquad(1)$$
$$\Leftrightarrow(p\vee(((p\wedge q)\wedge T)\vee((p\wedge q)\wedge\neg r)))\wedge(((p\wedge r)\wedge t)\vee(T\wedge t)\qquad(2)$$
$$\Leftrightarrow(p\vee((p\wedge q)\wedge(T\vee\neg r))\wedge(((p\wedge r)\vee T)\wedge t)\qquad(3)$$
$$\Leftrightarrow(p\vee((p\wedge q)\wedge T)\wedge(T\wedge t)\qquad(4)$$
$$\Leftrightarrow(p\vee(p\wedge q))\wedge t)\qquad(5)$$
$$\Leftrightarrow((p\wedge T)\vee(p\wedge q))\wedge t\qquad(6)$$
$$\Leftrightarrow(p\wedge(T\vee q))\wedge t\qquad(7)$$
$$\Leftrightarrow(p\wedge T)\wedge t\qquad(8)$$
$$\Leftrightarrow p\wedge t\qquad(9)$$

ការពន្យល់:ក្នុង (1)ច្បាប់ឯកលក្ខណៈភាពត្រូវបានប្រើដើម្បីមាន (p ∧ q) ⇔ (p ∧ q ∧ T)និង $t\Leftrightarrow$(T ∧ t)ដែលផ្ដុំហើយយើងប្រើ (2).ច្បាប់បំនែងចែក ត្រូវបានប្រើនៅក្នុង (3). ច្បាប់ដែនកំណត់ត្រូវបានប្រើ (4).ច្បាប់ឯកលក្ខណៈភាពត្រូវបានប្រើដើម្បីមាន (5) និង (6)សម្រួលពីរ Tហើយបន្ថែមមួយ T,រៀងៗខ្លួន។ ច្បាប់បំនែងចែកត្រូវបានប្រើនៅក្នុង (7).ច្បាប់ដែនកំណត់ត្រូវបានប្រើ(8). ទីបំផុតយើងប្រើច្បាប់ឯកលក្ខណៈភាព ក្នុងជំហានចុងក្រោយ។

ដំណោះស្រាយ: 18: បញ្ជាក់ថា $(p\wedge(p\to q)\wedge(s\vee r)\wedge(r\to\neg q))\to(s\vee t)$,យើងនឹងយក

p, p → q, s ∨ r, និង r → ¬q ដូចការសន្មតដែលបានឱ្យ។

steps		reasons
1.	p	Assumption
2.	$p\to q$	Assumption
3.	q	1,2, Modus Ponens
4.	$r\to\neg q$	Assumption
5.	$q\to\neg r$	4, Contrapositive
6.	$\neg r$	3,5, Modus Ponens
7.	$s\vee r$	Assumption
8.	s	6,7, Disjunctive Syllogism
9.	$s\vee t$	8, Disjunctive Amplification

ដំណោះស្រាយ19:

Premises : $(\neg p \vee q) \rightarrow r,\ r \rightarrow (s \vee t),\ \neg s \wedge \neg u,\ \neg u \rightarrow \neg t$

Conclusion : p

steps	reasons
1. $\neg s \wedge \neg u$	Premises
2. $\neg u$	1, Conjunctive Simplification
3. $\neg u \rightarrow \neg t$	Premises
4. $\neg t$	2,3, Modus Ponens
5. $\neg s$	1, Conjunctive Simplification
6. $\neg s \wedge \neg t$	4,5, Conjunction
7. $r \rightarrow (s \vee t)$	Premises
8. $\neg(s \vee t) \rightarrow \neg r$	7, Contrapositive
9. $(\neg s \wedge \neg t) \rightarrow \neg r$	8, De Morgan's law
10. $\neg r$	6,9, Modus Ponens
11. $(\neg p \vee q) \rightarrow r$	Premises
12. $\neg r \rightarrow \neg(\neg p \vee q)$	11, Contrapositive
13. $\neg r \rightarrow (p \vee \neg q)$	12, De Morgan's law
14. $p \wedge \neg q$	10,13, Modus Ponens
15. p	14, Conjunctive Simplification

ដំណោះស្រាយ20: $((p \rightarrow q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (p \vee r)) \rightarrow (\neg q \rightarrow s)$

ការសម្រាយបញ្ជាក់ខាងក្រោមសម្រាប់ (២.៤) គឺជាអំណះអំណាងផ្ទុយគ្នា។ តាមរយៈភាពផ្ទុយគ្នាយើងសន្មតបរិមាណ និងភាពអវិជ្ជមាននៃការមិនសមស្របគឺទាំងពីរជាការពិតគឺមានន័យថាយើងមាន

Assumptions: $p \rightarrow q,\ \neg r \vee s,\ p \vee r,\ \neg(\neg q \rightarrow s)$.

steps	reasons
1. $\neg(\neg q \rightarrow s)$	Assumption, by Contradiction)
2. $\neg q \wedge \neg s$	Negation of implication
3. $\neg s$	2, Conjunctive Simplification
4. $\neg r \vee s$	Assumption
5. $\neg r$	3,4, Disjunctive syllogism
6. $p \rightarrow q$	Assumption
7. $\neg q$	2, Conjunctive Simplification
8. $\neg p$	6,7, Modus Tollens
9. $p \vee r$	Assumption
10. r	8,9, Disjunctive syllogism
11. $\neg r \wedge r$	5,10, Conjunction
12. $\neg q \rightarrow s$	Since 11 is a contradiction, 1 can't be true

2. ការសម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់សម្រាប់(2.4).

ការសន្មត: $p \rightarrow q,\ \neg r \vee s,\ p \vee r$.

steps	reasons
1. $p \rightarrow q$	Assumption
2. $\neg q \rightarrow \neg p$	Equivalence of 1
3. $p \vee r$	Assumption
4. $\neg p \rightarrow r$	Equivalence of 3
5. $\neg q \rightarrow r$	2,4, Syllogism
6. $\neg r \vee s$	Assumption
7. $r \rightarrow s$	Equivalence of 6
8. $\neg q \rightarrow s$	5,7, Syllogism

ដំណោះស្រាយ21:

Premises : $\neg p \leftrightarrow q,\ q \rightarrow r,\ \neg r$

Conclusion : p

steps		reasons
1.	$\neg p \leftrightarrow q$	Premises
2.	$\neg p \rightarrow q$	From 1
3.	$q \rightarrow \neg p$	From 1
4.	$q \rightarrow r$	Premises
5.	$\neg r \rightarrow \neg q$	4, Contrapositive
6.	$\neg r$	Premises
7.	$\neg q$	5,6 Modus Ponens
8.	$\neg q \rightarrow p$	2 Contrapositive
9.	p	7,8 Modus Ponens

ដំណោះស្រាយ22: យើងនិយាយថាប្រព័ន្ធមួយ (សំណុំនៃបរិមាណ) មិនមានភាពស៊ីចង្វាក់ទេប្រសិនបើ យើងអាចទទួលបានលទ្ធផលខ្លះពីប្រព័ន្ធដែលផ្ទុយពីគ្នា។

គេមាន MC: Jack ខកខានមិនបានមករៀនជាច្រើនដង។

FS: Jack បានឈប់មករៀន។

UE: Jackបានខ្វះការអប់រំ។

RB: Jackបានអានសៀវភៅអស់ជាច្រើនក្បាល។

បរិមាណ MC FS, FS UE, RB ¬EU, MC ∧RB.

steps		reasons
1.	$MC \wedge RB$	Premises
2.	MC	1, Conjunctive Simplification
3.	$MC \longrightarrow FS$	Premises
4.	FS	2,3, Modus Ponens
5.	$FS \longrightarrow UE$	Premises
6.	UE	4,5, Modus Ponens
7.	$RB \longrightarrow \neg UE$	Premises
8.	RB	1, Conjunctive Simplification
9.	$\neg UE$	7,8, Modus Ponens
10.	$UE \wedge \neg UE$	6,9, Conjunction

យើងមានទាំង UE និង $\neg UE$ ហេតុដូចនេះហើយបរិមាណវាមិនស្ថិតស្ថេរ

ដំណោះស្រាយ23: រំលឹកឡើងវិញនូវនិយមន័យនៃការប៉ាន់ស្មានលក្ខខណ្ឌ គឺជាការសន្និដ្ឋាន មួយប្រសិនបើ យើងអាចជំនួសរាល់អថេរនៅក្នុងលក្ខខណ្ឌដោយអង្គណាមួយនៅក្នុងដែនកំណត់របស់វាដើម្បីបង្កើតជា សំណើមួយ។

(1), (2), (4) និង(5) វាជាសន្មត(3) និង(6) វាមិនបានសន្មតទេ

ចំណាំ សន្មតថាអាចមិនមានអថេរ។ ដូច្នេះរាល់សំណើទាំងអស់ក៏អាចប៉ាន់ស្មានបានដែរហេតុដូច្នេះហើយ (៤) គឺជាការប៉ាន់ស្មានទុកជាមុន។

ដំណោះស្រាយ24: គេអោយ $D_x = \square$ ជាសកលនៃ*x*. យើងរក A – B និង B – A

$A-B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ និង $B-A = \{12, 14\}$ រក $P(x)$ និង$Q(x)$ នៃ

$P(x) = (x \in A) \wedge (x \in B)$ និង $Q(x) = (x \in A) \wedge (x \in B)$

ដូច្នេះ$T_P = A-B$ និង $T_Q = B-A$

ចំណាំ ឧទាហរណ៍មិនបានអោយ $\{x : x \in \square, 10 < x \le 15, x$ ជាចំនួនគូ $\}$ ជាចម្លើយពីព្រោះវាជាសំណុំពិតនៃ *Q*, ប៉ុន្តែមិនមែនជាការប៉ាន់ស្មានជាមួយតំលៃនៃភាពពិតនេះទេគេអោយ*B* – *A*.

ដំណោះស្រាយ25:

1. $T_P \cap T_Q = T_{P \wedge Q}$

$$\begin{aligned}
x \in T_P \cap T_Q &\Leftrightarrow x \in T_P \text{ and } x \in T_Q \\
&\Leftrightarrow P(x) = T \text{ and } Q(x) = T \\
&\Leftrightarrow (P \wedge Q)(x) = T \\
&\Leftrightarrow x \in T_{P \wedge Q}.
\end{aligned}$$

2. $T_P \cup T_Q = T_{P \vee Q}$

$$\begin{aligned}
x \in T_P \cup T_Q &\Leftrightarrow x \in T_P \text{ or } x \in T_Q \\
&\Leftrightarrow P(x) = T \text{ or } Q(x) = T \\
&\Leftrightarrow (P \vee Q)(x) = T \\
&\Leftrightarrow x \in T_{P \vee Q}.
\end{aligned}$$

3. $F(P) \cap F(Q) = F_{P \vee Q}$

$$\begin{aligned}
x \in F(P) \cap F(Q) &\Leftrightarrow x \in F(P) \text{ and } x \in F(Q) \\
&\Leftrightarrow P(x) = F \text{ and } Q(x) = F \\
&\Leftrightarrow (P \vee Q)(x) = F \qquad \text{(why?)} \\
&\Leftrightarrow x \in F_{P \vee Q}.
\end{aligned}$$

4. $F(P) \cup F(Q) = F_{P\wedge Q}$

$$
\begin{aligned}
x \in F(P) \cup F(Q) \quad &\Leftrightarrow \quad x \in F(P) \text{ or } x \in F(Q) \\
&\Leftrightarrow \quad P(x) = F \text{ or } Q(x) = F \\
&\Leftrightarrow \quad (P \wedge Q)(x) = F \qquad \text{(why?)} \\
&\Leftrightarrow \quad x \in F_{P\wedge Q}.
\end{aligned}
$$

ដំណោះស្រាយ26: គេអោយ $T_{P\rightarrow Q}$ បញ្ជាក់សំណុំនៃភាពពិត $P(x) \rightarrow Q(x)$.

1. $(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow P(x)$.

$$
\begin{aligned}
[(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow P(x)] &\Leftrightarrow T_{P\rightarrow Q} \subseteq T_P \\
&\Leftrightarrow (\underline{F_P} \cup T_Q) \subseteq T_P \\
&\Leftrightarrow (\underline{T_P} \cup T_Q) \subseteq T_P \\
&\Leftrightarrow T_P \subseteq T_P \text{ and } T_Q \subseteq T_P .
\end{aligned}
$$

យើងអាចបង្កើតវាដោយ $T_P \subseteq T_P$ ពេលដែល $T_P = \emptyset$, គឺ $T_P = U$. ប្រសិនបើ $T_P = U$, បន្ទាប់មក $T_Q \subseteq T_P$ ត្រូវ សម្រាប់ T_Q, ដូច្នេះ$T_P = U$ គឺជាលក្ខខណ្ឌទូទៅសម្រាប់ នៃ $(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow P(x)$ ក្លាយជាភាពពិត។

2. $(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow Q(x)$

$$
\begin{aligned}
[(P(x) \square\ Q(x)) \Rightarrow Q(x)] &\Leftrightarrow T_{P \square Q} \subseteq T_Q \\
&\Leftrightarrow (F_P \cup T_Q) \subseteq T_Q \\
&\Leftrightarrow F_P \subseteq T_Q \text{និង} T_Q \subseteq T_Q \\
&\Leftrightarrow F_P \subseteq T_Q.
\end{aligned}
$$

ចំណាំ លក្ខខណ្ឌទូទៅមានន័យថាមានកម្រិតតិចតួចឬខ្សោយ។

ឧទាហរណ៍ ការពិចារណា $1 < a < 10$ និង $1 < a,\ 1 \geq a$

ដំណោះស្រាយ 27: $D_x = \{a, b, c\}$

1. $\forall x P(x) = P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$.

2. $(\forall x R(x)) \wedge (\exists x S(x)) = (R(a) \wedge R(b) \wedge R(c)) \wedge (S(a) \vee S(b) \vee S(c))$.

ដំណោះស្រាយ 28: គេអោយ $D_x = D_y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, និង $P(x, y) := \{(y \geq x) \vee (x + y > 6)\}$ ដូច្នេះសំណុំភាពពិតនៃ $P(x, y)$ គឺជាសំណុំរងនៃ $T_{P(x,y)} = T_{y\geq x} \cup T_{x+y>6} \quad D_x \times D_y$

$$
T_{y\geq x} = \left\{ \begin{array}{l}
(1,1), \\
(1,2), (2,2), \\
(1,3), (2,3), (3,3), \\
(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), \\
(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5)
\end{array} \right\},
$$

$$
T_{x+y>6} = \left\{ \begin{array}{r}
(5,2), \\
(4,3), (5,3), \\
(3,4), (4,4), (5,4), \\
(2,5), (3,5), (4,5), (5,5)
\end{array} \right\}.
$$

$$T_{y\geq x} \cup T_{x+y>6} = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), \\ (1,2),(2,2), \qquad\qquad\qquad (5,2), \\ (1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3), \\ (1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4), \\ (1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5) \end{array} \right\}.$$

2. $T_{\exists x P(x,y)} = T_{P(1,y)} \cup T_{P(2,y)} \cup T_{P(3,y)} \cup T_{P(4,y)} \cup T_{P(5,y)}.$

$$\begin{aligned} T_{P(1,y)} &= \{y : (y \geq 1) \vee (y > 5)\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \\ T_{P(2,y)} &= \{y : (y \geq 2) \vee (y > 4)\} = \{2, 3, 4, 5\}, \\ T_{P(3,y)} &= \{y : (y \geq 3) \vee (y > 3)\} = \{3, 4, 5\}, \\ T_{P(4,y)} &= \{y : (y \geq 4) \vee (y > 2)\} = \{3, 4, 5\}, \\ T_{P(5,y)} &= \{y : (y \geq 5) \vee (y > 1)\} = \{2, 3, 4, 5\}. \end{aligned}$$

ដូចច្នេះ$T_{\exists x}$

3. $T_{\exists y P(x,y)} = T_{P(x,1)} \cup T_{P(x,2)} \cup T_{P(x,3)} \cup T_{P(x,4)} \cup T_{P(x,5)}.$

$$\begin{aligned} T_{P(x,1)} &= \{x : (1 \geq x) \vee (x > 5)\} = \{1\}, \\ T_{P(x,2)} &= \{x : (2 \geq x) \vee (x > 4)\} = \{1, 2, 5\}, \\ T_{P(x,3)} &= \{x : (3 \geq x) \vee (x > 3)\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \\ T_{P(x,4)} &= \{x : (4 \geq x) \vee (x > 2)\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \\ T_{P(x,5)} &= \{x : (5 \geq x) \vee (x > 1)\} = \{2, 3, 4, 5\}. \end{aligned}$$

ដូចច្នេះ$T_{\exists y P(xy)} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

4. $T_{\forall x P(x,y)} = T_{P(1,y)} \cap T_{P(2,y)} \cap T_{P(3,y)} \cap T_{P(4,y)} \cap T_{P(5,y)} = \{3, 4, 5\}.$

5. $T_{\forall y P(x,y)} = T_{P(x,1)} \cap T_{P(x,2)} \cap T_{P(x,3)} \cap T_{P(x,4)} \cap T_{P(x,5)} = \{1\}.$

ដំណោះស្រាយ29: គេអោយ $V = T_{P(x,y)}$.

សំណុំនៃកូអរដោនេទាំងអស់នៃគូបដែលមាននៅក្នុង V ត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុង $S = \{y : \exists x, (x, y) \in V\}$.

គេអោយ b, $\quad b \in T_{\exists x P(x,y)} \Leftrightarrow \exists x P(x, b)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \exists x, (x, b) \in V \\ &\Leftrightarrow b \in S. \end{aligned}$$

ដូចច្នេះ $T_{\exists x P(x,y)} = S$.

2.គេអោយ k,

$$\begin{aligned} k \in T_{\forall x P(x,y)} &\Leftrightarrow \forall x P(x,k) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in D_x,\ (x, k) \in T_{P(x,y)} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in D_x,\ (x, k) \in V \\ &\Leftrightarrow D_x \times \{k\} \subseteq V \\ &\Leftrightarrow k \in \{b : b \in D_y,\ D_x \times \{b\} \subseteq V\}. \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $T_{\forall x \in D x P(x,y)} = \{b : b \in D_y,\ D_x \times \{b\} \subseteq V\}$.

ដំណោះស្រាយ 30: រំលឹកឡើងវិញ $T_P \subseteq T_Q$ គឺស្មើនឹង $P \Rightarrow Q$.ឧបមាថា $x \in D_x$, $y \in D_y$, និង $(x + y \leq 1) \wedge (y - x \leq 1)$. បញ្ជាក់ថា $P \Rightarrow Q$ ដូចខាងក្រោម

1. ចេញពី $x + y \leq 1$:

steps	reasons
(1) $x + y \leq 1$	given
(2) $-1 \leq x$	$x \in D_x$
(3) $0 \leq y$	$y \in D_y$
(4) $-1 \leq x + y$	(2) + (3)
(5) $-1 \leq x + y \leq 1$	(1) + (4)
(6) $(x + y)^2 \leq 1$	math (5)
(7) $x^2 + 2xy + y^2 \leq 1$	math (6)

2. $y - x \leq 1$

steps	reasons
(1) $y - x \leq 1$	given
(2) $0 \leq y$	$y \in D_y$
(3) $1 \geq x$	$x \in D_x$
(4) $-1 \leq -x$	(3) $\times -1$
(5) $-1 \leq y - x \leq 1$	(2) + (4)
(6) $(y - x)^2 \leq 1$	math (5)
(7) $x^2 - 2xy + y^2 \leq 1$	math (6)

ចេញពី $x + y \leq 1$ និង $y - x \leq 1$ យើងបាន

$$x^2 + 2xy + y^2 \leq 1,$$

$$x^2 - 2xy + y^2 \leq 1$$

យក $(2.5) + (2.6)$, យើងមាន

$2x^2 + 2y^2 \leq 2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$។

ដូច្នេះយើងសន្និដ្ឋានថា $x^2 + y^2 \leq 1$, មានន័យថា

$((x+y\le 1)\wedge(y-x\le 1))\Rightarrow(x^2+y^2\le 1)$។

ដំណោះស្រាយ31: រំលឹកនិយមន័យនៃសំណុំរង.។យើងនិយាយថា S គឺជាសំណុំរងនៃ X ប្រសិនបើហើយបានតែសម្រាប់ទាំងអស់ x ប្រសិនបើ x គឺនៅក្នុង S បន្ទាប់មក x គឺនៅក្នុង X យើងអាចសរសេរនិយមន័យឡើងវិញជា៖

$S\subseteq X$ គេបាន $(x\in S)\Rightarrow(x\in X)$.

សូមចំណាំថាយើងកំពុងប្រើ "$\Rightarrow$" នៅក្នុងនិយមន័យខាងលើជំនួសដោយ "$\rightarrow$",មានន័យថា, S គឺជាសំណុំរងនៃ X ប្រសិនបើនិងបានតែមួយប្រសិនបើ $(x\in S\rightarrow x\in X)$ គឺជា tautology ។ដូច្នេះ វាជាការត្រឹមត្រូវដែលមិនត្រូវបង្ហាញគ្រប់ករណីនោះទេច្បាស់នៅក្នុងនិយមន័យទីពីរ។

ដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការរកឃើញកំហុសនៅក្នុងលំហាត់នេះចូរយើងសរសេរឡើងវិញនូវនិយមន័យនៃ សំណុំរងដោយមិនចាំបាច់លុបបរិមាណសកល។

$S\subseteq X$ សមមូល $\forall x(x\in S\rightarrow x\in X)$។

ដូច្នេះ $S\subseteq(A\cup B)$ សមមូល

$$\begin{array}{lll} & \forall x(x\in S\rightarrow x\in(A\cup B)) & (1)\\ \Rightarrow & \forall x(x\in S\rightarrow(x\in A \text{ or } x\in B)) & (2)\\ \Rightarrow & \forall x[(x\in S\rightarrow x\in A) \text{ or } (x\in S\rightarrow x\in B)] & \\ \not\Rightarrow & \forall x(x\in S\rightarrow x\in A) \text{ or } \forall x(x\in S\rightarrow x\in B) & (3)\\ \Rightarrow & (S\subseteq A \text{ or } S\subseteq B). & (4)\end{array}$$

ជំហាន (3)នៅក្នុងការបកស្រាខាងដើមគឺមិនត្រឹមត្រូវ។យើងអាចពិចារណារកឧទាហរណ៍ងាយស្រួលដើម្បីយល់ពីមូលហេតុ (2) $\not\Rightarrow$ (3)។ គេអោយ S, A, និង B ត្រូវបានកំណត់ដូចខាងក្រោម។

S =ក្មេងៗសរុប, A =ក្មេងប្រុសសុទ្ធ, B= ក្មេងស្រីសុទ្ធ។

វាច្បាស់ជា (2) គឺពិត មានន័យថា "គ្រប់ x, ប្រសិនបើ x ជាក្មេង។បន្ទាប់មក x មួយគឺទាំងក្មេងប្រុសឬក្មេងស្រី ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយ (3) គឺមិនពិតទេមានន័យថា កុមារទាំងអស់សុទ្ធតែជាក្មេងប្រុសឬកុមារទាំងអស់សុទ្ធតែជាក្មេងស្រី។

ដំណោះស្រាយ32:

$$\neg\forall x\exists y\left[(x\vee y)\to z\right]\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\exists x\neg\exists y\left[(x\vee y)\to z\right]$$
$$\Leftrightarrow\exists x\forall y\neg\left[(x\vee y)\to z\right]$$
$$\Leftrightarrow\exists x\forall y\left[(x\vee y)\to z\right]$$

ដំណោះស្រាយ33:ដើម្បីរកភាពអវិជ្ជមាននៃរូបមន្តដែលមានយើងអាចប្រើច្បាប់មូលដ្ឋាននិងច្បាប់របស់ ម័រហ្គង់ $\neg\exists xp(x)\equiv\forall x\neg p(x)$ $\wedge$ $\neg\forall xp(x)\equiv\exists x\neg p(x)$ សម្រាប់ការប៉ាន់ស្មានណាមួយp(x)។ ដូច្នេះ

1. $\neg\forall x\forall y[(x>y)\to(x-y>0)]$

$$\Leftrightarrow\exists x\neg\forall y[(x>y)\to((x-y)>0)]$$
$$\Leftrightarrow\exists x\exists y\neg[(x>y)\to((x-y)>0)]$$
$$\Leftrightarrow\exists x\exists y[(x>y)\wedge\neg((x-y)>0)]$$
$$\Leftrightarrow\exists x\exists y[(x>y)\wedge((x-y)\le 0)]$$
$$\Leftrightarrow\exists x\exists y[(x>y)\wedge(x\le y)].$$

2. $\neg\forall x\forall y[(x<y)\to\exists z(x<z<y)]$

$$\Leftrightarrow\exists x\neg\forall y[(x<y)\to\exists z(x<z<y)]$$
$$\Leftrightarrow\exists x\exists y\neg[(x<y)\to\exists z(x<z<y)]$$
$$\Leftrightarrow\exists x\exists y[(x<y)\wedge\neg\exists z(x<z<y)]$$
$$\Leftrightarrow\exists x\exists y[(x<y)\wedge\forall z\neg(x<z<y)]$$
$$\Leftrightarrow\exists x\exists y[(x<y)\wedge\forall z((z\le x)\vee(y\le z))]$$
$$\Leftrightarrow\exists x\exists y\forall z[(x<y)\wedge((z\le x)\vee(y\le z))]$$
$$\Leftrightarrow\exists x\exists y\forall z[((x<y)\wedge(z\le x))\vee((x<y)\wedge(y\le z))]$$
$$\Leftrightarrow\exists x\exists y\forall z[(z\le x<y)\vee(x<y\le z)].$$

ដំណោះស្រាយ34: គេអោយដែនកំណត់ D_x ជាសំណុំរបស់មនុស្សទាំងអស់។ កំណត់និយមន័យខាងក្រោម៖

$PB(x)$: x is a policeman in this beat.
$SC(x)$: x eats with our cook.
$ML(x)$: x is a man with long hair.
$PE(x)$: x is a poet.
$PR(x)$: x has been in prison. x
$CC(x)$: is our cook's cousin. x
$HC(x)$: is her cousin.
$LC(x)$: x loves cold mutton.
a : Amos Judd, who is a man.

ចំណាំ a ថេរនៅក្នុងDយើងមិនគិតថាវាចាំបាច់ក្នុងការកំណត់និយមន័យមួយទៀតដើម្បីសាកល្បងប្រសិនបើ x ជាបុរស។ ដូច្នេះយើងសន្មតថាAmos Judd គឺជាបុរស។ឥឡូវនេះយើងអាចសរសេរឡើងវិញនូវបរិមាណនៅក្នុងន័យនៃការប៉ាន់ស្មានខាងលើ។

$$
\begin{aligned}
p1 &: \forall x[PB(x) \to SC(x)].\\
p2 &: \neg\exists x[ML(x) \wedge \neg PE(x)]\\
p3 &: \neg PR(a).\\
p4 &: \forall x[CC(x) \to LC(x)].\\
p5 &: \forall x[PE(x) \to PB(x)].\\
p6 &: \forall x[SC(x) \to HC(x)].\\
p7 &: \forall x[\neg ML(x) \to PR(x)].
\end{aligned}
$$

ហើយយើងដឹងថា p_2 គឺសមមូលនឹងដូចខាងក្រោម។

$$
\begin{aligned}
\neg\exists x[ML(x) \wedge \neg PE(x)] &\equiv \forall x\neg[ML(x) \wedge \neg PE(x)]\\
&\equiv \forall x[\neg ML(x) \vee PE(x)]\\
&\equiv \forall x[ML(x) \to PE(x)].
\end{aligned}
$$

ដោយ $a \in D$ ហើយការសន្នដ្ឋានទាំងអស់ខាងលើលើកលែងតែ P_3 ត្រូវបានគេធ្វើឱ្យមាននូវបរិមាណ។ បរិមាណសកលយើងអាចអនុវត្តគោលការណ៍បញ្ជាក់ជាសកលនិងជំនួសអថេរ x ដោយ a ដើម្បីទទួលបានសំណើជាមួយតម្លៃពិត T ដូចខាងក្រោម។

$$
\begin{aligned}
p_1 &: PB(a) \to SC(a).\\
p_2 &: ML(a) \to PE(a).\\
p_3 &: \neg PR(a).\\
p_4 &: CC(a) \to LC(a).\\
p_5 &: PE(a) \to PB(a).\\
p_6 &: SC(a) \to HC(a).\\
p_7 &: \neg ML(a) \to PR(a).
\end{aligned}
$$

យើងមាន

steps	*reasons*
1 $\neg PR(a) \to ML(a)$	p_7, Contrapositive
2 $ML(a)$	1, p_3, Modus Ponens
3 $PE(a)$	2, p_2, Modus Ponens
4 $PB(a)$	3, p_5, Modus Ponens
5 $SC(a)$	4, p_1, Modus Ponens
6 $HC(a)$	5, p_6, Modus Ponens

ឥលូវនេះយើងអាចផ្ទេរសំណើរទៅជាភាសាអង់គ្លេសវិញដែលនឹងប្រាប់យើងពីអង្គហេតុខ្លះអំពី Amos Judd

ML(a): Amos Judd គឺជាបុរសដែលមានសក់វែង។

PE(a) : Amos Judd គឺជាអ្នកតែងកំណាព្យ។

PB(a) : Amos Judd គឺជាប៉ូលីសនៅលើការហេតុការណ៍នេះ។

SC(a) : Amos Judd បានបរិភោគអាហារជាមួយគ្នា។

HC(a): Amos Judd ជាបងប្អូនជីដូនមួយរបស់នាង។

យើងមិនដឹងថាតើ Amos Judd ជាបងប្អូនជីដូនមួយរបស់ចុងភៅរបស់យើងទេហើយយើងមិនដឹងថាតើ Amos Judd ចូលចិត្តភាពត្រជាក់ទេ។

ដំណោះស្រាយ35: គេអោយ D_x ជាសំណុំនៃវត្ថុមានជីវិតទាំងអស់។

រក P (x) : x គឺជាសត្វជ្រូក។

W (x) : x មានស្លាប។

កាប៉ាន់ស្មានដូចខាងក្រោមគឺស្មើនឹង

$$\begin{aligned} & \neg\exists x[P(x) \wedge W(x)] \\ \Longleftrightarrow\ & \forall x\neg[P(x) \wedge W(x)] \\ \Longleftrightarrow\ & \forall x[\neg P(x) \vee \neg W(x)] \\ \Longleftrightarrow\ & \forall x[P(x) \rightarrow \neg W(x)]. \end{aligned}$$

យើងអាចជ្រើសរើសយកមួយក្នុងចំណោមចម្លើយខាងក្រោម។

ដំណោះស្រាយ36: ការសន្និដ្ឋានខាងក្រោមមិនត្រឹមត្រូវតាមនៃក្កត។

បរិមាណ: ទាហានទាំងអស់អាចដើរហែក្បួនបាន។

សូមពិនិត្យមើលហើយយើងអាចកំណត់ការសេន្ទដ្ឋានដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{array}{l} \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \\ \underline{\exists x(B(x) \wedge \neg S(x))} \\ \exists x(B(x) \wedge \neg M(x)) \end{array}$$

S(x) : x គឺជាទាហាន។

B(x) : x ជាក្មេង។ M

(x) : x អាចដើរក្បួន។

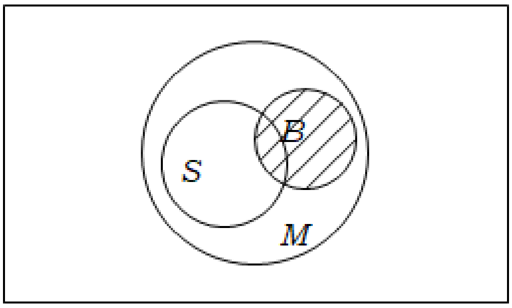
យើងអាចឆ្លើយសំណួររបស់យើងឡើងវិញដូចតទៅ៖ តើការចង់បង្ហាញខាងក្រោមមានសុពលភាពទេ ?

ពីការសន្និដ្ឋានដំបូងនិងតាមវិធាននៃការបញ្ជាក់ជាសកលដែលយើងមាន a ។

S(a) → M (a),ប៉ុន្តែយើងមិនអាចនិយាយថា ¬S(a) →¬M (a)

ពីព្រោះមិនដូចភាពផ្ទុយគ្នាការរៀបបញ្ច្រាសមិនមែនជាសមភាពទេ។ ហេតុដូច្នេះហើយទោះបីមកពីក្នុងបរិមាណដែលយើងដឹងថាមានក្មេងខ្លះដែលមិនមែនជាទាហានក៏ដោយក៏យើងមិនអាចប្រើម៉ូឌីសដើម្បីសន្និដ្ឋានថាក្មេងទាំងនោះមិនអាចដើរក្បួនបានដែរ។ និយាយម៉្យាងទៀតប្រសិនបើម្នាក់ៗមិនមែនជាទាហាននោះមិនមានន័យថាមិនមាននរណាម្នាក់អាចហែក្បួនបានឡើយ។ វាអាចទៅរួចដែលថាក្មេងទាំងអស់អាចហែក្បួនបានខណៈពេលដែលក្មេងខ្លះមិនមែនជាទាហាន។

ដើម្បីដឹងច្បាស់ជាងនេះសូមពិចារណាដ្យាក្រាមវិនខាងក្រោម។



ដែល M ជាសំណុំនៃសត្វទាំងអស់ហើយ B ជាសំណុំនៃក្មេងនិង Sគឺជាសំណុំនៃទាហានទាំងអស់។ យើងបកស្រាយ $x \in S$ ជា $S(x)$ គឺពិតដូចគ្នាសម្រាប់ $x \in M$ ។

រំលឹកឡើងវិញ $S \subseteq M \Leftrightarrow \forall x(x \in S \to x \in M)$.នៅក្នុងដ្យាក្រាម Venn $S \subseteq M$, ដែលផ្តល់នូវការសន្និដ្ឋានដំបូង $\forall x(S(x) \to M(x))$.

ដ្យាក្រាមបានបង្ហាញថា $S - B \neq \emptyset$. ដូច្នេះមានជាតុមួយចំនួនដែលមាននៅក្នុង B ប៉ុន្តែមិនមែននៅក្នុង S, ដែលជាការសន្និដ្ឋានទីពីរ។ដែលជាការសន្និដ្ឋានទីពីរ $\exists x(B(x) \wedge \neg S(x))$.

ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយដ្យាក្រាម Venn ក៏បង្ហាញផងដែរថាការសន្និដ្ឋានមិនត្រឹមត្រូវដោយមូលហេតុ B គឺជាសំណុំរងនៃ M មានក្មេងដែលមិនអាចហែក្បួនបាន។

ដំណោះស្រាយ37: គេអោយ $D_x = \square$, $D_y = \square^0$ និងកំណត់អថេរអថេរពីរ .

$P(x, y) = x$ ចែកនិង y ។

$$\begin{aligned}
&1.\forall y, P(1, y) = T\\
&2.\forall x, P(x, 0) = T\\
&3.\forall x, P(x, x) = T\\
&4.\forall y, \exists x, P(x, y) = T
\end{aligned}$$

គេអោយលេខណាមួយ y មាន x យើងអាចនិយាយថា x = 1 ដែលថា x ចែកនឹង y។

$5.\exists y, \forall x, P\ (x, y)\ = T.$
$6.\forall x, \forall y, [(P\ (x, y) \wedge P\ (y, x)) \rightarrow (x\ =\ y)]\ =\ T.$

គេឱ្យ x និង y សន្មត់ថា $(P\ (x, y) \wedge P\ (y, x))$ គឺពិត

$P\ (x, y) \Rightarrow y\ =\ ax,\ a \in \square^{0};$
$P\ (y, x) \Rightarrow x\ =\ by,\ b \in \square$

ដូច្នេះ x = ដោយ = b(ax) = abx, ហេតុដូចនេះហើយ $ab\ = 1$។ពីព្រោះទាំង a និង b ជាចំនួនគត់ដែលមិនបូកបញ្ចូលគ្នាយើងដឹងថា $a\ =\ b\ = 1$។ ដូច្នេះ $x\ =\ y$ ។

$7.\forall x \forall y \forall z \left[\left(P(x, y) \wedge P(y, z) \right) \rightarrow P\ (x, z) \right]\ =\ T$

គេមាន x, y, និង z, សន្មតថា$\left(P(x, y) \wedge P(y, z)\right)$ គឺពិត

$P(x, y) \Rightarrow y\ =\ ax,\ a \in \square^{0};$

$P\ (y, z) \Rightarrow z\ =\ by,\ b \in \square^{0}.$

ដូច្នេះ $z\ =\ b(ax)\ =\ abx.$បើ $ab \in \square^{0}$ ដូច្នេះ $P\ (x, z)$ គឺជាសំណុំនៃភាពពិត ដូច្នេះ $P\ (x, z)$ គឺពិត។

ដំណោះស្រាយ38: ពិចារណាលើលក្ខខណ្ឌ ដែលមានបរិមាណ $\forall x \exists y\ [x\ +\ y\ =\ 17]$.គេមាន$D_x$ និងD_y តាងសកលនៃ x និង y រៀងគ្នា។

1. $D_x = D_y = \square$ សំណុំចំនួនគត់។

$\forall x \exists y\ [x\ +\ y\ =\ 17]$.= ពិត

ក្នុងករណីនេះយើងមានចំនួនគត់ x យើងតែងតែអាចរកឃើញចំនួនគត់មួយ $y = 17 - x$, ដូច្នេះ

2. $x + y = 17$

$D_x = D_y = \square$ សំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

$\forall x \exists y\ [x\ +\ y\ =\ 17]$.= មិនពិត

ក្នុងករណីនេះយើងមានចំនួនគត់ណាមួយx > 17,យើងមិនអាចរកឃើញចំនួនគត់វិជ្ជមាន y ទេ

$x + y = 17$

3. D_x = សំណុំចំនួនគត់និងD_y =សំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន

$\forall x\ \exists y\ [x + y = 17]$ = មិនពិត

ក្នុងករណីនេះយើងមាន ចំនួនគត់ x> 17 យើងមិនអាចរកឃើញចំនួនគត់វិជ្ជមាន y ទេដូច្នេះ $x+y=17$

4. D_x =សំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាននិង D_y =សំណុំចំនួនគត់។

$\forall x \exists y\ [x + y = 17]$.= ពិត

ក្នុងករណីនេះយើងមានចំនួនគត់ x យើងតែងតែអាចរកឃើញ $y = 17 - x$ ដូចនោះx + y = 17។

ដំណោះស្រាយ39: គេអោយ $f(a, b) = (a \to b) \wedge (\neg a \to \neg b)$.រកតារាងនៃភាពពិតនៃ$f$។

a	b	$a \to b$	$\neg a \to \neg b$	$f(a,b)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

ប្លុក DNF នៃរូបមន្ត ដែលមានអថេរពីរគឺ (a ∧ b), (∧¬b), (¬a∧ b) និង (¬a∧¬b) ។

a	b	$a \wedge b$	$a \wedge \bar{b}$	$\bar{a} \wedge b$	$\bar{a} \wedge \bar{b}$	$f(a,b)$	
T	T	T √	F	F	F	T	√
T	F	F	T	F	F	F	
F	T	F	F	T	F	F	
F	F	F	F	F	T √	T	√

ដូច្នេះ $f(a, b) = (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$.

ដំណោះស្រាយ40:គេមាន $f(a, b) = (a \to b) \wedge (a \to \neg b)$. តារាងភាពពិតរបស់ f

a	b	$a \to b$	$a \to \neg b$	$f(a,b)$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

តារាងភាពពិតដែលជាប់ទាក់ទងសម្រាប់ប្លុកគឺ

a	b	$a \wedge b$	$a \wedge \bar{b}$	$\bar{a} \wedge b$	$\bar{a} \wedge \bar{b}$	$f(a,b)$	
T	T	T	F	F	F	F	
T	F	F	T	F	F	F	
F	T	F	F	T √	F	T	√
F	F	F	F	F	T √	T	√

ដូចនេះ $f(a,b) = (\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$

ដំណោះស្រាយ41: សំគាល់: ការប្រើប្រាស់ប្លុកនិងតារាងភាពពិតដើម្បីរក DNF ឬ CNF គឺមានលក្ខណៈមិនគួរពិបាកក្នុងការស្វែងរក DNF និង CNF តាមរបៀបនេះទេ។ ចូរដោះស្រាយបញ្ហានេះដោយប្រើការគណនាសំណើ។ ពេលខ្លះវិធីសាស្រ្តគណនាសំណើងាយស្រួលជាងវិធីសាស្រ្តតារាងនៃភាពពិតក៏មាន ។

1. $a \longrightarrow \neg b = \neg a \vee \neg b = (\neg a \vee \neg b).$

2. For $(a \wedge b) \vee c$:

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee c &= (a \vee c) \wedge (b \vee c)\\ &= ((a \vee c) \vee F) \wedge (F \vee (b \vee c))\\ &= ((a \vee c) \vee (b \wedge \neg b)) \wedge ((a \wedge \neg a) \vee (b \vee c))\\ &= ((a \vee c \vee b) \wedge (a \vee c \vee \neg b)) \wedge ((a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c))\\ &= (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c).\end{aligned}$$

ចំណាំ: ហេតុអ្វីបានជាយើងអាចបញ្ចូល f ដោយមិនផ្លាស់ប្តូរតម្លៃនៃរូបមន្តរបស់ b បញ្ហា ? ចុះករណី" ∧" វិញ ?

ដំណោះស្រាយ42: គេមាន $f = a \wedge (b \leftrightarrow c)$.យើងនឹងប្រើវិធីសាស្រ្តផ្លូវកាត់ដើម្បីរក CNF នៃ f និងការគណនាសំណើដើម្បីរក DNF ។

វិធីសាស្រ្តផ្លូវកាត់៖ ដំបូងយើងរកឃើញតារាងនៃភាពពិត f .

a	b	c	$b \leftrightarrow c$	$a \wedge (b \leftrightarrow c)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F ✓
T	F	T	F	F ✓
T	F	F	T	T
F	T	T	T	F ✓
F	T	F	F	F ✓
F	F	T	F	F ✓
F	F	F	T	F ✓

ដូចេនះសំណុំភាពមិនពិតនៃ f គឺ៖

$$F_f = \{(T,T,F),(T,F,T),(F,T,T),(F,T,F),(F,F,T),(F,F,F)\}.$$

ដូច្នេះ CNF នៃ f គឺ

$$(a,b,c) \wedge (a,b,c) \wedge (a,b,c) \wedge (a,b,c) \wedge (a,b,c) \wedge (a,b,c).$$

គណនាសំណើរ៖

$$\begin{aligned} a\wedge(b\leftrightarrow c) &= a\wedge((b\wedge c)\vee(\neg b\wedge\neg c)) \\ &= (a\wedge(b\wedge c))\vee(a\wedge(\neg b\wedge\neg c)) \\ &= (a\wedge b\wedge c)\vee(a\wedge\neg b\wedge\neg c). \end{aligned}$$

រូបមន្តចុងក្រោយខាងលើគឺ DNF នៃ f

ដំណោះស្រាយ43: ជាទូទៅ "បើសិន . . . បន្ទាប់មក . . ." អាចត្រូវបានបកប្រែទៅជាលក្ខខណ្ឌ (→),និង "មានតិច"រឺ "មានច្រើន" គួរប្រើការកំណត់បរិមាណអត្ថិភាព(∃).យើងត្រូវការសម្មតិកម្មដែលមានលក្ខណៈ ជាកាពណ៍នា"នឹង," "ឬ," និង "គ្រប់" ប្រើជាប្រយោគអង់គ្លេសគឺស្មើនឹង∧, ∨,និង ∀,រៀងគ្នានៅក្នុងកន្សោមគណិតវិទ្យាដែលត្រូវគ្នា។ ជាមួយនឹងគំនិតនេះសូមពិនិត្យមើលលក្ខខណ្ឌពីទ្រឹស្តីលេខ៖"សម្រាប់រាល់ចំនួនគត់ធំជាង 1 មានចំនួនបឋម រវាង n និង 2n ។សូមមើលទៅមួយផ្នែកទៀត"សម្រាប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ប្រសិនបើចំនួនគត់ n ធំជាង 1 នោះមានលេខមួយដែលសំខាន់និងដាច់ខាតរវាង n និង 2n"គេឱ្យ Dx ជាសំណុំនៃចំនួនគត់ទាំងអស់ហើយកំណត់និយមន័យ $P(x)$ ជា $P(x) : x$ គឺសំខាន់។

1.យើងអាចទទួលបានការសម្រាយបញ្ជាក់នៃក្កតខាងលើ៖

$$\forall n[(n>1)\rightarrow\exists x(P(x)\wedge(n<x<2n)] \qquad (2.7)$$

$$\begin{aligned} &\neg\forall n((n>1)\rightarrow\exists x(P(x)\wedge(n<x<2n))) \\ \Leftrightarrow\quad &\exists n\neg((n>1)\rightarrow\exists x(P(x)\wedge(n<x<2n))) \\ \Leftrightarrow\quad &\exists n\neg(\neg(n>1)\vee\exists x(P(x)\wedge(n<x<2n))) \\ \Leftrightarrow\quad &\exists n((n>1)\wedge\neg\exists x(P(x)\wedge(n<x<2n))) \\ \Leftrightarrow\quad &\exists n((n>1)\wedge\forall x\neg(P(x)\wedge(n<x<2n))) \\ \Leftrightarrow\quad &\exists n((n>1)\wedge\forall x(\neg P(x)\vee\neg(n<x<2n))) \\ \Leftrightarrow\quad &\exists n((n>1)\wedge\forall x(P(x)\rightarrow\neg(n<x<2n))) \\ \Leftrightarrow\quad &\exists n((n>1)\wedge\forall x(P(x)\rightarrow\neg((n<x)\wedge(x<2n)))) \\ \Leftrightarrow\quad &\exists n((n>1)\wedge\forall x(P(x)\rightarrow(\neg(n<x)\vee\neg(x<2n)))) \\ \Leftrightarrow\quad &\exists n((n>1)\wedge\forall x(P(x)\rightarrow((x\le n)\vee(x\ge 2n)))) \end{aligned}$$

2.បដិសេធ (2.7) គឺ៖

ដំណោះស្រាយ44: យើងនឹងប្រើវិធីសាស្ត្រពីរផ្សេងគ្នាដើម្បីបង្ហាញពីលទ្ធផលនេះ។

វិធីសាស្ត្រទីមួយប្រើអាគុយម៉ង់ផ្ទុយហើយវិធីទីពីរនឹងពិនិត្យទាំងអស់ករណីដែលអាចបង្ហាញថាលទ្ធផលគឺត្រឹមត្រូវទាំងអស់។

គេមាន D_x ជាសំណុំចំនួនគត់។ រក

$P(x) : x$ គឺសូម្បីតែ

យើងអាចនិយាយឡើងវិញនូវលទ្ធផលដែលបានផ្តល់អោយដូចការប៉ាន់ស្មាន

$$P\ (xy) \to \left(P(x) \vee P(y)\right) \qquad (2.8)$$

វិធីទី ៖1.ដោយវិធីផ្ទុយគ្នាសន្មតថា

$$P\ (xy) \wedge \neg\left(P\ (x) \vee P\ (y)\right) \qquad (2.9)$$

តាមច្បាប់របស់ De Morgan (2.9) គឺស្មើនឹង

$$P\ (xy) \wedge \neg P\ (x) \wedge \neg P\ (y) \qquad (2.10)$$

ប្រសិនបើ x និង y មិនមាន, បន្ទាប់មកវាគឺសេសហើយអាចត្រូវបានបង្ហាញជា

$x = 2k + 1,\ y = 2q + 1$

សម្រាប់ចំនួនគត់ k និង q ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} xy &= (2k + 1)(2q + 1) \\ &= 4kq + 2k + 2q + 1 \\ &= 2(2kq + k + q) + 1 \end{aligned}$$

ដោយសារតែ k និង q ជាចំនួនគត់យើងដឹងថា $2kq + k + q$ គឺជាចំនួនគត់ផងដែរ។ ដូច្នេះ xy គឺមិនមាន i.e., $P\ (xy)$ គឺមិនពិត។ នេះផ្ទុយពីការសន្មតថា $P\ (xy)$ គឺជាភាពពិត។ ដូច្នេះ (2.8) គឺត្រឹមត្រូវ។

វិធីទី 2៖ បើមានចំនួនគត់ពីរយើងមានបីករណី៖ 1. ទាំងពីរគឺគូ 2 ។ យើងចង់បង្ហាញថាក្នុងករណីនីមួយៗ (2.8) គឺត្រឹមត្រូវ។

1.ទាំងពីរគឺមិនមាន: គេអោយ $x = 2k,\ y = 2q$ សម្រាប់ចំនួនគត់ k និងq. P

$$\begin{aligned} (xy) \to (P(x) \vee P(y)) & \\ &\equiv P\ (4kq) \to (P\ (2k) \vee P(2q)) \\ &\equiv T \to (T \vee T) \\ &\equiv T \to T \\ &\equiv T \end{aligned}$$

2.ទាំងពីរគឺមិនមាន: គេអោយ $x = 2k + 1,\ y = 2q + 1$សម្រាប់ចំនួនគត់ k និង

$$
\begin{aligned}
q.\ & P(xy) \to (P(x) \vee P(y)) \\
& \equiv P(4kq+2k+2q+1) \to (P(2k+1) \vee P(2q+1)) \\
& \equiv F \to (F \vee F) \\
& \equiv F \to F \\
& \equiv T
\end{aligned}
$$

3.មួយសេសនិងមួយគូគេមាន $x = 2k+1, y = 2q$ សម្រាប់ចំនួនគត់ k

និង q ។

$$
\begin{aligned}
& P(xy) \to (P(x) \vee P(y)) \\
& \equiv P(4kq+2q) \to (P(2k+1) \vee P(2q)) \\
& \equiv T \to (F \vee T) \\
& \equiv T \to T \\
& \equiv T
\end{aligned}
$$

យើងបានឃើញថាក្នុងករណីទាំងអស់ (2.8) គឺជាភាពពិត។ ដូច្នេះវាគឺជាលក្ខខណ្ឌត្រឹមត្រូវសម្រាប់ការចូលរួមទាំងអស់។

ដំណោះស្រាយ45: គេមានដែនកំណត់ D_x ជាសំណុំរបស់មនុស្សទាំងអស់។ កំណត់ការប៉ាន់ស្មានដូចខាងក្រោមជាមួយអថេរ D_x ។

$P\ (x)$: x ដែលយកចិត្តទុកដាក់ការរៀន។

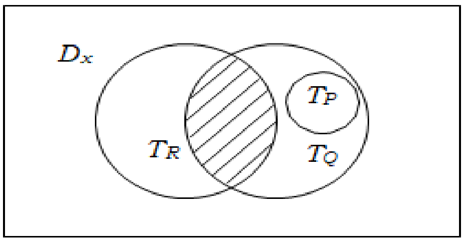
$Q\ (x)$: x ធ្វើការងារច្រើន។

$R\ (x)$: x គឺមួយនៅក្នុងចំណោមក្មេងប្រុសទាំងនោះ។

ឥឡូវនេះយើងអាចសរសេរឡើងវិញនូវបរិមាណនិងការសន្និដ្ឋានទាក់ទងនឹងការសន្និដ្ឋានដែលបានកំណត់ខាងលើ។

$$
\begin{array}{l}
P1:\quad \forall x[P(x) \to Q(x)] \\
\underline{P2:\quad \exists x[R(x) \wedge Q(x)]} \\
C:\quad \exists x[R(x) \wedge P(x)]
\end{array}
$$

សេចក្តីសន្និដ្ឋាន C មិនត្រឹមត្រូវទេពីទីកន្លែង។ ពិចារណាដ្យាក្រាមវ៉ែនដូចខាងក្រោមសម្រាប់សំណុំភាពពិតនៃការប៉ាន់ស្មាន P, Q និង R។



$T_P \subset T_Q$ ដែលពេញចិត្ត P_1 តំបន់ដែលមានម្លប់ $T_R \cap T_Q$ ដែលមិនពេញចិត្ត P_2 តំបន់ដែលមានម្លប់ $T_R \cap T_P = \varnothing$ បង្ហាញថាមិនមានឧទាហរណ៍ណាមួយនៅក្នុងសកលលោក D_x ដែលមានទាំង $R(x)$ និង $P(x)$ ពិត។ ដូច្នេះការសន្និដ្ឋាន C មិនអនុវត្តតាមទីកន្លែង។

ដំណោះស្រាយ46: គេមានដែនកំណត់ D_x ជាសំណុំរបស់មនុស្សទាំងអស់។ កំណត់ការប៉ាន់ស្មានដូចខាងក្រោមជាមួយអថេរលើ D_x។

P (x): x ជាបុរសម្នាក់។

Q(x): x ជានាយទាហ៊ានម្នាក់។

R(x): x ខ្លាំងពូកែរ។

S(x): x មានភាពក្លាហ៊ាន។

បរិមាណនិងការសន្និដ្ឋានទាក់ទងនឹងការប៉ាន់ស្មានដែលបានកំណត់ខាងលើគឺ៖

$$\begin{array}{l} P1: \exists x[P(x) \wedge Q(x)] \\ P2: \forall x[Q(x) \rightarrow R(x)] \\ P3: \forall x[Q(x) \rightarrow S(x)] \\ \hline C: \exists x[P(x) \wedge R(x) \wedge S(x)] \end{array}$$

យើងប្រើវិធីសាស្ត្រពីរផ្សេងគ្នាដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហានេះ។

វិធីទី1 គេមាន T_P, T_Q, T_R, និង T_S គឺជាសំណុំនៃភាពពិតនៃការប៉ាន់ស្មានដែលបានកំណត់ខាងលើ។ ពីក្នុងបរិមាណយើងអាចមានករណីដូចខាងក្រោម:

$$\begin{array}{lcl} P1 & \Longleftrightarrow & T_P \cap T_Q /= \varnothing \\ P2 & \Longleftrightarrow & T_Q \subseteq T_R \\ P3 & \Longleftrightarrow & T_Q \subseteq T_S \end{array}$$

ផ្អែកលើអង្គហេតុខាងលើយើងចង់បញ្ជាក់ការសន្និដ្ឋានដែលស្មើនឹង$(T_P \cap T_R \cap T_S) /= \varnothing$។

ចំពោះ $P1$,យើងដឹងថាមានសំណុំមិនទទេរមាន α មួយ $T_P \cap T_Q = \alpha$

steps	reasons
1. $a \subseteq T_Q$	Definition of $\cap$
2. $T_Q \subseteq T_R$	$P2$
3. $a \subseteq T_R$	1, 2, Definition of $\subseteq$
4. $T_Q \subseteq T_S$	$P3$
5. $a \subseteq T_S$	1, 4, Definition of $\subseteq$
6. $a \subseteq T_P$	Definition of $\cap$
7. $a \subseteq (T_P \cap T_R \cap T_S)$	3, 5, 6, Definition of $\cap$
8. $a /= \varnothing$	$P1$
9. $(T_P \cap T_R \cap T_S) /= \varnothing$	steps 7, 8

មាន ($T_P \cap T_R \cap T_S$) $\neq \emptyset$, យ៉ាងហោចណាស់ត្រូវតែមានធាតុមួយក្នុងសកលលោក (domain D_x) បែប នោះ ($P(a) \wedge R(a) \wedge S(a)$) គឺជាភាពពិត។ ដូច្នេះយើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា$\exists x(P(x) \wedge R(x) \wedge S(x)) = T$,i.e.,សេចក្តីសន្និដ្ឋាន C គឺត្រឹមត្រូវ។

វិធីទី2 ការសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើច្បាប់តក្កវិជ្ជានិងវិធាននៃការគណនាសម្រាប់ការគណនាការគិតជាបរិមាណ។

steps	reasons
1. $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$	$P1$
2. $P(a) \wedge Q(a)$	1, Existential Specification
3. $\forall x[Q(x) \rightarrow R(x)]$	$P2$
4. $Q(a) \rightarrow R(a)$	3, Universal Specification
5. $Q(a)$	2, Conjunctive Simplification
6. $R(a)$	4, 5, Modus Ponens
7. $\forall x[Q(x) \rightarrow S(x)]$	$P3$
8. $Q(a) \rightarrow S(a)$	7, Universal Specification
9. $S(a)$	5, 8Modus Ponens
10. $P(a)$	2, Conjunctive Simplification
11. $P(a) \wedge R(a) \wedge S(a)$	6, 9, 10, conjunction
12. $\exists x(P(x) \wedge R(x) \wedge S(x))$	11, Existential Generalization

ដំណោះស្រាយ47:

1.សមាជិកទាំងអស់ស្រឡាញ់គ្នា។

2.មានសមាជិកខ្លះស្រលាញ់សមាជិកខ្លះទៀត។

3.សមាជិកទាំងអស់ស្រឡាញ់សមាជិកខ្លះ។

4.មានសមាជិកខ្លះដែលស្រឡាញ់សមាជិកដទៃទៀត។

ដំណោះស្រាយ48: មានជំរើសជាច្រើនសម្រាប់ការសន្និដ្ឋានដែលអាចមកពីបរិមាណដែលមាន។ យើងគ្រាន់តែសរសេរការសន្និដ្ឋានចំនួនបីនៃការសន្និដ្ឋានជាក់ស្តែងបំផុតប៉ុន្តែមិនសំខាន់និងមើលពីរបៀបដើម្បីទាញយកក្កតពីបរិមាណ។

ដំបូងយើងកំណត់និយមន័យដែលត្រូវការខ្លះៗហើយបកប្រែប្រយោគអង់គ្លេសទៅជារូបមន្តនៃក្កត

$P(x)$: x គឺជាលេខគត់។

$Q(x)$: x គឺជាចំនួនសនិទាន។

$$\begin{array}{ll} P1: & \forall x[P(x) \rightarrow Q(x)] \\ P2: & R(\pi) \wedge \neg Q(\pi) \\ \hline \end{array}$$

$R(x)$: x គឺជាចំនួនពិត។

បរិមាណ

steps	reasons
1. $\forall x(P(x) \to Q(x))$	$P1$
2. $R(\pi) \wedge \neg Q(\pi)$	$P2$
3. $P(\pi) \to Q(\pi)$	1, Universal Specification
4. $\neg Q(\pi) \to \neg P(\pi)$	3, Contrapositive
5. $\neg Q(\pi)$	2, Conjunctive Simplification
• 6. $\neg P(\pi)$	4, 5, Modus Ponens
7. $R(\pi)$	2, Conjunctive Simplification
8. $R(\pi) \wedge \neg P(\pi)$	6,7, Conjunction
• 9. $\exists x(R(x) \wedge \neg P(x))$	8, Existential Generalization
10. $\neg P(\pi) \vee \neg R(\pi)$	6, Disjunctive Amplification
11. $\neg[P(\pi) \wedge R(\pi)]$	10, De Morgan's Law
12. $\exists x \neg(P(x) \wedge R(x))$	11, Existential Generalization
• 13. $\neg\forall x(P(x) \wedge R(x))$	12, Logical Equivalence

ក្នុងជំហាន6, π មិនមែនជាលេខគត់ទេ។ក្នុងជំហាន9 មានលេខពិតតែមិនសមហេតុសមផលទេ។

ក្នុងជំហាន 13, លេខទាំងអស់គឺទាំងគត់និងលេខពិត។

ដំណោះស្រាយ49: គេមាន m បញ្ជាក់ម៉ាការីត ដែល

$P(x)$: x ជាបណ្ណារក្ស។

$Q(x)$: x យល់ដឹងពីប្រព័ន្ធ។

យើងចង់ប្រើក្បួននៃការបញ្ជាក់ជាសកលនិងម៉ូឌុឡPonens។ប្រសិនបើការសន្និដ្ឋានដែលមិនស្គាល់គឺ"ម៉ាការីតគឺជាអ្នកធ្វើការនៅបណ្ណាល័យម្នាក់" នោះយើងអាចសន្និដ្ឋានដូចខាងក្រោម។

$$\begin{array}{l} P1: \forall x[P(x) \to Q(x)] \\ \underline{P2: P(m) \qquad\qquad} \\ \ C: \quad Q(m) \end{array}$$

steps	reasons
1. $\forall x(P(x) \to Q(x))$	$P1$
2. $P(m)$	$P2$
3. $P(m) \to Q(m)$	1, Universal Specification
4. $Q(m)$	2, 3, Modus Ponens

ដែល $P(m)$ មានន័យថា៖ម៉ាការីតជាបណ្ណារក្ស។

ដំណោះស្រាយ50: បង្ហាញកស្តុតាង $\exists x[P(x) \vee Q(x)] \Leftrightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$.

សម្រាប់ $\Rightarrow$ ទិសដៅសន្មត $\exists x[P(x) \vee Q(x)]$.

steps	reasons
1. $\exists x[P(x) \vee Q(x)]$	Assumption
2. $P(a) \vee Q(a)$	Existential Specification, 1
3. $\exists xP(x) \vee Q(a)$	Existential Generalization, 2
4. $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$	Existential Generalization, 3

សម្រាប់ $\Leftarrow$ ទិសដៅសន្មត $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$,

steps	*reasons*
1. $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$	Assumption
2. $P(a) \vee \exists xQ(x)$	1, Existential Specification
3. $P(a) \vee Q(b)$	2, Existential Specification
4. $[P(a) \vee Q(b)] \vee [P(b) \vee Q(a)]$	3, Disjunctive Amplification
5. $[P(a) \vee Q(a)] \vee [P(b) \vee Q(b)]$	4, Associative, Commutative
6. $\exists x[P(x) \vee Q(x)] \vee \exists x[P(x) \vee Q(x)]$	5, Existential Generalization
7. $\exists x[P(x) \vee Q(x)]$	$A \vee A \equiv A$

នេះបញ្ចប់នៃការសម្រាយបញ្ជាក់។

ចំណាំ ប្រុងប្រយ័ត្នខ្ពស់ក្នុងជំហ៊ានទី ៣ នៃការសម្រាយបញ្ជាក់នៃទិសដៅ$\Leftarrow$។ យើងត្រូវប្រើនិមិត្តសញ្ញាពីរផ្សេងគ្នាគឺ a និង b ពីព្រោះវាត្រូវបានបញ្ជាក់ពីបរិមាណពីរដែលមានអត្ថិភាពខុសគ្នាហើយវាអាចឬមិនស្មើ។

ដំណោះស្រាយ51: បង្ហាញថា $\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$.

សម្រាប់ $\Rightarrow$ ទិសដៅ, ដោយវិធីនៃការផ្ទុយ, សន្មត

$\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \wedge \neg[\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)]$. ជំហាន

	reasons
1. $\neg[\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)]$	Assumption
2. $\neg[P(a) \wedge \forall xQ(x)]$	1, Universal Specification
3. $\neg[P(a) \wedge Q(a)]$	2, Universal Specification
4. $\exists x\neg[P(x) \wedge Q(x)]$	3, Existential Specification
5. $\neg\forall x[P(x) \wedge Q(x)]$	4, Logical Equivalence

ការសន្និដ្ឋាននៅក្នុងជំហានទី ៥ ផ្ទុយពីការស្មានរបស់យើង។

ចំណាំ យើងជ្រើសរើសដូចគ្នានៅក្នុងជំហ៊ានទី ២ និងទី ៣ ។

សម្រាប់$\Leftarrow$ ទិសដៅ, ដោយវិធីនៃការផ្ទុយ, សន្មត

$[\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)] \wedge \neg\forall x[P(x) \wedge Q(x)]$

steps	*reasons*
1. $\neg\forall x[P(x) \wedge Q(x)]$	Assumption
2. $\exists x\neg[P(x) \wedge Q(x)]$	1, Logical Equivalence
3. $\neg[P(a) \wedge Q(a)]$	2, Existential Specification
4. $\neg P(a) \vee \neg Q(a)$	3, De Morgan's law
5. $\exists x\neg P(x) \vee \exists x\neg Q(x)$	4, Existential Generalization
6. $\neg\forall xP(x) \vee \neg\forall xQ(x)$	5, Logical Equivalence
7. $\neg[\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)]$	6, De Morgan's law

ជំហានទី ៧ ផ្តល់នូវសេចក្តីសន្និដ្ឋានដែលផ្ទុយពីការស្មានរបស់យើង៖

$\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$.

ដូច្នេះទិសដៅទាំងពីរ។ នេះបញ្ចប់ការសម្រាយបញ្ជាក់

ដំណោះស្រាយ52: បង្ហាញថា $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \Rightarrow \forall x[P(x) \vee Q(x)]$, ដោយការផ្ទុយ - សន្មតថា

$[\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)] \wedge \neg\forall x[P(x) \vee Q(x)]$.

steps		reasons
1.	$\neg\forall x[P(x) \vee Q(x)]$	Assumption
2.	$\exists x\neg[P(x) \vee Q(x)]$	1, Logical Equivalence
3.	$\neg[P(a) \vee Q(a)]$	2, Existential Specification
4.	$\neg P(a) \wedge \neg Q(a)$	3, De Morgan's law
5.	$\neg P(a)$	4, Conjunctive Simplification
6.	$\exists x\neg P(x)$	5, Existential Generalization
7.	$\neg\forall xP(x)$	6, Logical Equivalence
8.	$\neg Q(a)$	4, Conjunctive Simplification
9.	$\exists x\neg Q(x)$	8, Existential Generalization
10.	$\neg\forall xQ(x)$	9, Logical Equivalence
11.	$\neg\forall xP(x) \wedge \neg\forall xQ(x)$	7, 10, Conjunction
12.	$\neg[\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)]$	11, De Morgan's law

ជំហានទី ១២ ដែលមានការសន្និដ្ឋានដែលផ្ទុយពីការស្មានរបស់យើង៖ $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$.នេះបញ្ជាក់ពីទ្រឹស្តីបទ។

ដំណោះស្រាយ53: ដើម្បីបដិសេធ $\forall x[P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$,យើងនឹងបង្កើតឧទាហរណ៍ដែលមិនយល់ស្របមួយ។គេមានសំណុំសកលជា *{a, b}*, ហើយអោយ p, q ជាកត្តាកំណត់ចំនួនពីរជាមួយនឹងការពិតដែលបានកំណត់នៅក្នុងតារាងខាងក្រោម។, $\forall x[P(x) \vee Q(x)] \not\Rightarrow \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$. , $\forall x[P(x) \vee Q(x)] \not\Rightarrow \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$.

ដូច្នេះ , $\forall x[P(x) \vee Q(x)] \not\Rightarrow \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$.

	a	b
$P(x)$	T	F
$Q(x)$	F	T

$$\begin{aligned}\forall x[P(x) \vee Q(x)] &= [P(a) \vee Q(a)] \wedge [P(b) \vee Q(b)\\ &= [T \vee F] \wedge [F \vee T]\\ &= T \wedge T\\ &= T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) &= [P(a) \wedge P(b)] \vee [Q(a) \wedge Q(b)]\\ &= F \vee F\\ &= F\end{aligned}$$

ដំណោះស្រាយ54: យើងបានដឹងរួចហើយ $\sqrt{2}$ គឺមិនសមហេតុផល។ ឥឡូវពិចារណាលេខ $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ យើងមិនដឹងទេ$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ គឺមិនសមហេតុផល។ ប៉ុន្តែវាប្រាកដថាមានតែពីរករណីប៉ុណ្ណោះ។

ករណី1 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ គឺសមហេតុផល។ គេមាន a = $\sqrt{2}$ និង b = $\sqrt{2}$ បន្ទាប់មកទាំង a និង b គឺមិនសមហេតុផលនិង a^b គឺសមហេតុផល។

ករណី2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ គឺសមហេតុផល។ គេមាន a =$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ និង b =$\sqrt{2}$ ។

$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ដូច្នេះទាំង a និង b គឺមិនសៈ a^b = លនិង a^b គឺៈ =$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$= ។

ក្នុងករណីទាំងពីរនេះយើងអាចអះអាងថាមាន a និង b ដែល a និង b មិនសមហេតុផលនិង a^b គឺសមហេតុផល។

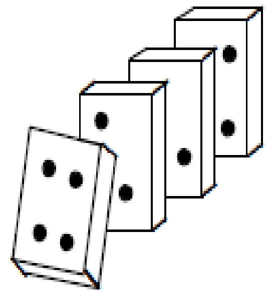
ជំពូកទី៣.អនុមាណរួមនៃគណិតវិទ្យា

3.1.របៀបគិតទស្សនៈគំនិត

អនុមាណរួមគណិតវិទ្យាជាផ្នែកមួយដែលមានសារៈសំខាន់បំផុតនិងជាបញ្ចកទេសដ៏មានអំណាចបំផុតសម្រាប់បញ្ជាក់ពីអំណះអំណាងរបស់គណិតវិទ្យា។ទ្រឹស្តីបទនៃគណិតវិទ្យាជាច្រើនលំបាកអំពីចំនួនគត់វិទ្យាទីហ្វអាចដោះស្រាយបានយ៉ាងងាយស្រួលតាមអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា។វាគឺងាយស្រួលព្រោះក្របខណ្ឌនៃសម្រាយបញ្ជាក់គឺតែមួយនិងឋិតនៅក្រោមគំនិតរបស់អនុមាណរួមគណិតវិទ្យាជាការយល់ដឹងបែបអព្ភន្តរញ្ញាណ។

គំនិតយ៉ាងច្រើនច្បាប់ដូណីណូគ្មានព្រំដែនកំណត់ត្រូវបានរៀបចំឡើងជាជួរ។សម្រាយតាមវិចារកំណើននៃគណិតវិទ្យាគឺទំនងជាច្បាប់ពន្យល់យ៉ាងត្រឹមត្រូវដូចលេខខាងក្រោមនេះ៖

ប្រសិនបើដូមីណូប្រអប់ទីមួយដួលនិងសម្រាប់ប្រអប់ដូមីណូ n នោះ ប្រសិនបើជាវាដួលនូវចំនួនទី n^{th} ដងនៃប្រអប់ដូមីណូលទ្ធផលរហូតដល់ចុងក្រោយចំនួនដងនៃទី $(n+1)^{st}$ ដងប្រអប់ដូមីណូនោះនាំឲ្យដូមីណូនៃប្រអប់ផ្សេងទៀតនៅតាមជួរនោះគឺវានឹងដួលផងដែរ។



3.1.1.លក្ខខណ្ឌចាំបាច់នៃការប្រើវិចារកំណើនគណិតវិទ្យា

នៅក្នុងការធ្វើដូចដូមីណូខាងលើដើម្បីអាច (1) តំរង់ដូមីណូនិង(2) កំណត់ដូមីណូដំបូងគេនៅក្នុងជួរគឺជាល័ក្ខខ័ណ្ឌចាំបាច់ពីរសំរាប់ការទំលាក់ដូមីណូទាំងអស់។ ល័ក្ខខ័ណ្ឌទាំងពីរនេះគឺជាល័ក្ខខ័ណ្ឌចាំបាច់ដូចគ្នាសំរាប់ការអាចប្រើការបញ្ចូលគណិតវិទ្យា។ឧបមាថាជាវណ្ណៈយុត្តិកនិកាយសាវតាប្រេតផាបកឺរើតធីងចិនអេសបើកាលីលេនស៊ីនអេលប៊ែលវេនបានបញ្ហាទិញ។

ឧទាហរណ៍: (1) យើងអាចមានចំនួនធាតុទាំងអស់នៅអេសមួយម្តង ៗ និង (2) យើងអាចកំណត់អត្តសញ្ញាណធាតុទី1 ក្នុងការរាប់បន្ទាប់មកការបង្កើតគណិតវិទ្យាទំនងជាវិធីដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់សេចក្តីថ្លែងការណ៍។ ជាពិសេសឈុតណាដែលមានសណ្តាប់ធ្នាប់ល្អអាចត្រូវបានតំណាងជា។

S $=\{s_0, s_1, s_2, \dots\}$

នៅក្នុងការតំណាងនេះ (1) ចំពោះធាតុណាមួយដែលមាននៅក្នុង S មាន $n\in\mathbb{N}$ ដូចជាថា $a = s_n$ (ដូមីណូទាំងអស់ត្រូវបានតម្រង់ជួរយ៉ាងត្រឹមត្រូវ) ហើយ (2) s_0 គឺជាអត្តសញ្ញាណដែលត្រូវបានគេហៅថាធាតុតិចបំផុត (s_0) បម្រើជាដូមីណូទីមួយក្នុងបន្ទាត់ដែលត្រូវធ្លាក់។

ឧទាហរណ៍:

កំណត់ដូចជាលេខធម្មជាតិចំនួនគត់លេខគូលេខសេស លេខគុណនៃ 5 ។ ល។ គឺជាសំណុំដែលមានលំដាប់លំដោយធម្មតាដែលតែងតែត្រូវបានគេប្រទះនៅក្នុងគណិតវិទ្យា។

ពួកគេអាចត្រូវបានតំណាងជា៖

ចំនួនគត់ធម្មជាតិ : $\{1,2,3,4,\ldots\}$;

ចំនួនគត់ : $\{0,1,\ -1,2,-2,3,-3,\ldots.\}$;

ចំនួនគត់គូ : $\{0,2,-2,4,-4,\ldots.\}$;

ចំនួនគត់សេស : $\{1,-1,3,-3,5,-5,\ldots\}$;

ពហុគុណ :$\{0,5,-5,10,-10,\ldots\}$;

ចំពោះភ័ស្តុតាងបញ្ហាសគណិតវិទ្យាកម្រិតខ្ពស់បន្ថែមទៀតសំណុំដែនអាចជាលេខសនិទានលេខបឋមឬសំណុំផ្សេងទៀតដែលមានសណ្តាប់ធ្នាប់ល្អ។

3.1. 2. មូលដ្ឋានគ្រឹះទ្រឹស្តីវិចារអំណើននៃគណិតវិទ្យា

ទ្រឹស្តីមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យាគឺសាមញ្ញណាស់។ វាមិនមានអ្វីក្រៅពីការអនុវត្តម្តងហើយម្តងទៀតនៃក្បួនឡូជីខលគឺម៉ូឌីសពន្លឺ។ ឧបមាថា៖ $S = \{s_0, s_1, s_2, \ldots\}$

ហើយយើងបានបង្ហាញថា $\left[P(s_0) = T\right] \wedge [\forall n \in NP(s_n) \to P(s_n+1)]$.បើ $i\in\mathbb{N}$ ណាមួយយើងអាចអះអាងបានថា $P\,(s_i) = T$ ដោយការបង្វ មូលហេតុ ក្រោម។

ជំហ៊ាន

1. P(s_0)	បង្ហាញ
2. $P(s_0) \to P(s_2)$	បង្ហាញ
3. P(s_1)	1,2, ម៉ូឌូឡូ Ponens
5. $P(s_2) \to P(s_2)$	បង្ហាញ
5. $P(s_2)$	3,4 ម៉ូឌូឡូ Ponens
1. 6. $P(s_2) \to P(s_3)$	បង្ហាញ

7. P (s_3) , 5,6
ដោយដាក់កម្រិត

P (s_{i-1})

ដោយដាក់កម្រិត

1. P (s_{i-1}) → P(s_i) បង្ហាញ

P (s_i)

ដោយដាក់កម្រិត

ដូច្នេះយើងអាចអះអាងថាសម្រាប់ទាំងអស់ដែលនៅក្នុង S, P (a) គឺជាសេចក្តីថ្លែងការណ៍ពិត។

វិចារណកថាៈនៅក្នុងបញ្ហាភាគច្រើនដើម្បីបង្ហាញថា

3.1.3.**អនុមាណរួមគតគណិតវិទ្យានៃទម្រង់ទីមួយ**

ឧបមាថាសំណុំសកល (ដែន) គឺជាសំណុំនៃចំនួនគត់មិនមែនអវិជ្ជមានហើយ P (n) គឺជាទ្រព្យសម្បត្តិណាមួយនៃចំនួនគត់មិនមែនអវិជ្ជមាន។ យើងចង់បង្ហាញថា P (n) គឺជាការពិតសម្រាប់

n = 0,1,2, ... ; ពោលគឺ∀n ជារបស់P (n) ។ បន្ទាប់មកនីតិវិធីដូចខាងក្រោមអាចត្រូវបានអនុវត្ត។

ជំហានទី ១៖ បញ្ជាក់ថា P (0) ជាការពិត។ ជំហាននេះត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាជំហានមូលដ្ឋានហើយលទ្ធផលដែលបានបង្ហាញ P (0) = T ត្រូវបានគេហៅថាមូលដ្ឋាននៃអាំងឌុច។ ជំហានទី ២៖ ទុក n ជាចំនួនគត់ ហើយសន្មតថា P (n) ពិត។ ការសន្មត់នេះត្រូវបានគេហៅថាសម្មតិកម្មកម្លាំងខ្សោយ។ ជំហានទី ៣៖ ប្រើការសន្មត់នៅជំហ៊ានទី ២ ដើម្បីបញ្ជាក់ថា P (n + 1) គឺជាការពិត។ ជំហាននេះត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាជំហានដំបូង។ ប្រសិនបើយើងអាចបង្ហាញពីមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃជំហ៊ានទី ១ និងផលប៉ះពាល់នៃជំហ៊ានទី ៣ នោះយើងអាចអះអាងថា P (n) ពិតសំរាប់ទាំងអស់

n = 0,1,2, ... វិធីសាស្រ្តកស្តុតាងនេះត្រូវបានគេស្គាល់ថាគណិតវិទ្យា អាំងរឹតទ័រនៃទម្រង់ទី ១ ឬអាំងឌុចខ្សោយវិចារណកថាៈនីតិវិធីក័ស្តុតាងខាងលើគឺជាការអនុវត្តនៃការអនុញ្ញាតិដូចខាងក្រោមៈ

$1.\, P(0)$
$2.\forall n\left[P(n) \rightarrow P(n+1)\right]$
$3.\forall n\, P(n);$

កន្លែងដែលការអះអាងទី 1 P (0) ត្រូវបានបង្ហាញជាជំហានទី 1និងការអះអាងទី2

$\forall n\left[P(n) \rightarrow P(n+1)\right]$ ត្រូវបានបង្ហាញដោយការជ្រើសរើសតម្លៃដែលបំពាននៃ n សម្រាប់ P (n) ក្នុងជំហានទី 2 និងដោយផលប៉ះពាល់បានបង្ហាញក្នុងជំហ៊ានទី 3។

វិចារណៈកថា៖ មនុស្សម្នាក់មិនត្រូវច្រឡំដោយសេចក្ដីថ្លែងនៅក្នុងជំហ៊ានទី ២" ទុកឱ្យ n ជាចំនួនគត់ថេរ តាមចិត្តនិងសន្មត់ថា P (n) = T″ និងគោលដៅ" សំរាប់ n P (n) = T″ ដែលយើងចង់ បញ្ជាក់ អក្សរ n នៅក្នុងជំហ៊ានទី ២ បង្ហាញពីឧទាហរណ៍មួយនៅក្នុងដែនហើយអក្សរ n នៅក្នុងសេចក្ដីថ្លែងការណ៍ $\forall n P(n);$ គឺជាអថេរដែលមាននៅលើដែន។ បន្ទាប់ពីជំហានទី ២ វត្ថុ n ជាចំនួនថេរ ។ ការកែសំរួលដូច ខាងក្រោមនេះធ្វើឱ្យឱអាម៉ានបញ្ជាក់ច្បាស់ប៉ុន្តែវាធ្វើឱ្យភ័ស្តុតាងមានភាពផ្ដាំផ្ដូងផងដែរហេតុដូច្នេះហើយ សម្រាប់ភាពសាមញ្ញសៀវភៅសិក្សាភាគច្រើនមិនប្រើវាទេ។

ជំហានទី ២៖ សម្រាប់សម្មតិកម្មខាងក្នុងយើងសន្មត់ថា៖

$P\ (n)\ =\ T$ នៅពេល n ស្មើនឹង ខ្ញុំសម្រាប់ខ្ញុំមួយចំនួននៅក្នុងដែន។

ជំហានទី៣៖ នៅក្នុងជំហានខាងក្នុងយើងបង្ហាញថា៖

បន្ទាប់មកយើងសន្និដ្ឋានថាសម្រាប់ n ទាំងអស់នៅក្នុងដែន P (n) = T ។

វិចារណកថាៈក្នុងករណីខ្លះសម្មតិកម្មកម្លាំងខ្សោយមិនអាចផ្ដល់មូលដ្ឋានគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីបញ្ជាក់ថា P (n + 1) ពិតនៅក្នុងជំហ៊ានទី ៣ ទេ។ យើងត្រូវការសម្មតិកម្មកម្លាំងខ្លាំងជាងមុនដែលត្រូវបានណែនាំនៅក្នុងផ្នែក បន្ទាប់។

3.1.4.**អនុមានរួមគណិតវិទ្យានៃលំនាំទម្រង់ទី២**

ឧបមាថាសំណុំសកល (ដែន) គឺជាសំណុំនៃចំនួនគត់មិនមែនអវិជ្ជមានហើយ $P(n)$ គឺជាទ្រព្យ សម្បត្តិណាមួយនៃចំនួនគត់មិនមែនអវិជ្ជមាន។ យើងចង់បង្ហាញថា $P(n)$ គឺជាការពិតសម្រាប់ $n\ =\ 0,1,2,\ ...k$;ពោលគឺ $\forall nP\ \left(n\right)$។ នីតិវិធីដូចខាងក្រោមអាចត្រូវបានអនុវត្ត។

ជំហានទី ១៖ បញ្ជាក់ថា $P\,(0)$ ជាការពិត។ ជំហាននេះត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាជំហានមូលដ្ឋានហើយលទ្ធ ផលដែលបានបង្ហាញ $P\ (0)\ =\ T$ ត្រូវបានគេហៅថាមូលដ្ឋាននៃអាំងឌុច។ ជំហ៊ានទី ២៖ ទុក n ជាចំនួន គត់កម្រ តាមដែនកណត់ហើយសន្មត់ថា $P\ (0),\ P(1),\ \ldots,\ P\ (n)$ ពិត។ ការសន្មត់នេះត្រូវបានគេហៅថា សម្មតិកម្មកម្លាំងខ្លាំង។

ជំហានទី ៣៖ ប្រើការសន្មតដើម្បីបញ្ជាក់ថា P (n +1) គឺជាការពិត។ ជំហាននេះត្រូវបានគេស្គាល់ថាជា ជំហានដំបូង។

ប្រសិនបើយើងអាចបង្ហាញពីមូលដ្ឋានគ្រឹះក្នុងជំហានទី ១ និងការជាប់ទាក់ទងក្នុងជំហានទី ៣ នោះយើង អាចអះអាងថាទ្រេត (P)ពិតសម្រាប់ទាំងអស់ $n\ =\ 0,1,2,\ ...k$; វិធីសាស្ត្រនៃភស្តុតាងនេះត្រូវបានគេដឹង ជាការបញ្ចូលគណិតវិទ្យានៃទម្រង់ទី ២ ឬ កម្លាំងខ្លាំង។

វិចារណកថាៈនីតិវិធីភ័ស្តុតាងខាងលើគឺជាការអនុវត្តនៃការអនុញ្ញាតិដូចខាងក្រោមៈ

1. $P(0)$

$2.\forall n[(P(0) \wedge P(1) \wedge \cdots \wedge P(n)) \rightarrow P(n+1)]$

$3.\forall n P(n)$

វិចារណកថា៖ ពេលខ្លះយើងបញ្ជាក់ថា $P(n)$ គឺជាការពិតចំពោះ $n \in S$ ដែល $S = \{s_0, s_1, s_2, \ldots\}$ និង s_0 ប្រហែលជាមិនស្មើនឹង 0 ឬក្នុងករណីខ្លះ S មិនអាចជា សំណុំនៃលេខទាំងអស់។ ប្រសិនបើនោះជាជំហ៊ានមែននោះជំហ៊ានមូលដ្ឋានផ្លាស់ប្តូរទៅជា:

ជំហានទី ១៖ បង្ហាញថា $P(s_0)$ គឺជាការពិត។

ចារណកថា:នៅក្នុងបញ្ហាមួយចំនួនគេអាចអះអាងថា $P(n)$ គឺជាការពិតសំរាប់រាល់ $n \in \{0,1,2, \ldots\}$ ប៉ុន្តែមូលដ្ឋានមិនមែន P (0) ទេតែ P (1) ឬ P (2) ។ វាមានសារៈសំខាន់ណាស់ក្នុងការទទួលស្គាល់ទ្រព្យសម្បត្តិនេះ។ បើមិនដូច្នោះទេភ័ស្តុតាងមិនត្រឹមត្រូវត្រូវបានទទួល។ មើលទី១៧ នៅក្នុងផ្នែកបញ្ហានៃជំពូកនេះនិងកំណត់ចំណាំរបស់វានៅទំព័រ ១៣៣

3.2. **វិចារកំណើនគណិតវិទ្យា និង និយមន័យ**

អាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យានិងការហៅខ្លួនឯងមានទំនាក់ទំនងគ្នាយ៉ាងជិតស្និទ្ធ។ ពួកគេគួរតែត្រូវបានគេមើលឃើញថាជាផ្នែកពីរនៃកាក់តែមួយ។ ការហៅឡើងវិញគឺជាឧបករណ៍ដែលមានសារៈប្រយោជន៍ខ្លាំងសម្រាប់សំណុំមុខងារមុខងារ ១ និងវាក្យសម្ព័ន្ធការសរសេរកម្មវិធី ២។

3.2.1.**និយមន័យអនុគមន៍**

តាមទ្រឹស្តីមុខងារដែលអាចគណនាបានអាចត្រូវបានរកឃើញឡើងវិញ។នៅខាងក្រោមយើងយកទស្សនៈថាអាគុយម៉ង់នៃមុខងារ f យកតម្លៃ សំណុំចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន។ ជាទូទៅមុខងារដែលត្រូវបានធ្វើឡើងដដែលៗមានសំណុំដែនដែលមិនមានចំនួនច្រើន។

មុខងារ f អាចត្រូវបានហៅឡើងវិញដូចខាងក្រោម:

1. គុណតម្លៃនៃមុខងារនៅចំណុចមួយចំនួន។ ឧទាហរណ៍ $f(0), f(1)$ គឺជាក់លាក់។ តម្លៃបែបនេះត្រូវបានគេហៅថាតម្លៃដំបូង។
2. តម្លៃនៃមុខងារនៅ$(n+1)$ ទាក់ទងនឹង $f(0), f(1), \ldots, f(n)$ និង n ខ្លួនវា។
3. សរសេរសេចក្តីថ្លែងចុងក្រោយដែលក្នុងករណីភាគច្រើនអានថា ជំហ៊ានទី ១ និងទី ២ គឺជាជំហ៊ានតែ ២ គត់ដែលមិនមានមុខងារ f ។

វិចារណកថា:ខ្លឹមសារនៃការហៅខ្លួនឯងគឺភាពសាមញ្ញរបស់វាដែលជួយយើងឱ្យយល់ពីមុខងារដែលត្រូវបានគេពិចារណាប៉ុន្តែមិនមែនជាការបង្ហាញរបស់វាទេនៅពេលដែលយើងត្រូវបានគេស្នើសុំអោយតំលៃនៃមុខងារនោះ។ យើងចូលចិត្តគណនាមុខងារមួយដោយប្រើរូបមន្តទម្រង់បិទរបស់ខ្លួនជំនួសឱ្យការប្រើការហៅខ្លួនឯងដោយផ្ទាល់។ អាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យាមិនមានអ្វីដែលត្រូវធ្វើជាមួយការបន្ថែមរូបមន្តបិទសម្រាប់មុខងារ

ដែលបានផ្តល់ឱ្យនោះទេ 3 ប៉ុន្តែវាគឺជាបច្ចេកទេសដ៏មានឥទ្ធិពលសម្រាប់ការផ្ទៀងផ្ទាត់ថារូបមន្តបិទដែលបានផ្តល់ឱ្យគឺជារូបមន្តត្រឹមត្រូវមួយសម្រាប់មុខងារដែលបានហៅឡើងវិញ។

ឧទាហរណ៍: សូមអោយមុខងារនេះយកជាចំនួនគត់មិនមែនអវិជ្ជមានជាអាគុយម៉ង់របស់វាហើយត្រូវបានគេយកមកប្រើជាថ្មីឡើងវិញ។

1: f(0) = 0។

គំនិត 1 ទាក់ទងនឹងមុខងារត្រូវបានពិចារណានៅក្នុងជំពូកទី 5 ។

២ អនុភាព ២.៦ ក្នុងជំពូកទី ២ គឺជាឧទាហរណ៍មួយនៃការហៅខ្លួនឯងសំរាប់រូបមន្តនៃរូបមន្តដែលបានបង្កើតឡើងយ៉ាងល្អ។

3:ជំពូកទី ៨ នឹងពិភាក្សាលំអិតអំពីការដោះស្រាយបញ្ហាទំនាក់ទំនងកើតឡើងដដែលៗ

2: គ្រប់ $\forall n \geq 0,\ f(n+1) = f(n)+(n+1).$

យើងទាញបាន៖

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0,\\
f(1) &= f(0)+1 = 0+1 = 1,\\
f(2) &= f(1)+2 = 0+1+2 = 3,\\
f(3) &= f(2)+3 = 0+1+2+3 = 6, \ldots
\end{aligned}$$

និងការសន្និដ្ឋានថា f (n) គឺជាការបូកសរុបនៃលេខធម្មជាតិទី f_i ទម្រង់បិទជិតនៃ f ត្រូវបានផ្តល់ជា។

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \forall n \geq 0 \qquad (3.1)$$

យើងអាចប្រើវិធីគណិតវិទ្យាដើម្បីបញ្ជាក់ថាសមភាព (3.1) គឺត្រឹមត្រូវ ៤។មូលដ្ឋានគ្រឹះអាក់ខានៈតម្លៃដំបូងនៃចជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃអាំងឌុច។

ជាពិសេសយើងបង្ហាញថា f (0) = 0 × (0 + 1) 2 ។ វាច្បាស់ណាស់ថាសមភាព។ (3.1) កាន់កាប់នៅពេល n = 0 ហេតុដូចនេះហើយមូលដ្ឋានសង្កត់។

សម្គាល់: f (0) = 0 ត្រូវបានផ្តល់ជាផ្នែកមួយនៃផ្នែកនៃ f ហើយយើងបានផ្ទៀងផ្ទាត់វាដោយប្រើរូបមន្ត (3.1) ។សម្មតិកម្មដែលមិនចង់បាន: សន្មតថាបានផ្តល់ឱ្យណា n ≥ 0 សមភាព (3.1) ពោលគឺ

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

សម្គាល់ៈយើងបានដកចេញនូវបរិមាណសកលជាសកលក្នុងសមភាព (3.1) ពីព្រោះ n មិនមានភាពលំអៀងបន្ទាប់ពីជំហាននេះ។

ជំហានប្រានចោល: ក្នុងជំហាននេះយើងចាំបាច់ត្រូវបង្ហាញវា។

$f(n)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\ ,\forall n\ge 0$

យើងត្រូវប្រើការហៅឡើងវិញនៃ f ដើម្បីឱ្យមាន។

$$f(n+1)\ =\ f(n)+(n+1). \qquad (2.2)$$

ឧទាហរណ៍នេះយើងមិនស្មានច្បាស់ថាជាការពិតក្នុងដែនរបស់វាទេ។ ជាក់ស្តែង, ការប៉ាន់ស្មា។

ឧទាហរណ៍នេះយើងមិនស្មានច្បាស់ថាជាការពិតក្នុងដែនរបស់វាទេ។ ជាក់ស្តែង

$$P(n): f(n)\ =\ \frac{n(n+1)}{2}$$

និង $D_n\ =\ N_0$ ។ ជាទូទៅប្រសិនបើការទស្សន៍ទាយច្បាស់ពីបរិបទបញ្ហាយើងអាចលុបវាដើម្បីកែលម្អការបង្រួមកស្តុតាង។ សូមប្រៀបធៀបដំណោះស្រាយទៅនឹងលំហាត់ទី ៦ និង ៧ ផ្ទុយទៅវិញប្រសិនបើប្រធានបទមិនច្បាស់ការទាយទុកមុនត្រឹមត្រូវនិងដែនរបស់វាអាចជួយយើងឱ្យឈានជំហានដំបូង (សូមមើលបញ្ហាលេខ ៣២) ។ នៅក្នុងដំណោះស្រាយភាគច្រើននៅក្នុងផ្នែកទី ៣.៥ ។

បន្ទាប់មកយើងជំនួស $f(n)$ ក្នុង (3.2) ដោយ $\frac{n(n+1)}{2}$ យើងបាន៖

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n)+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះយើងអាចសន្និដ្ឋានថា $\forall n\ge 0,\quad f(n)=\frac{n(n+1)}{2}$ និងនាំឲ្យទម្រង់បិទសម្រាប់អនុគមន៍

គឺត្រឹមត្រូវ។

3.2.2. **អនុមាណរួមគណិតវិទ្យា និង និយមន័យផ្ទាល់**

យើងនឹងណែនាំឲ្យស្គាល់នូវសារៈសំខាន់នៃវិធីកំណើនគណិតវិទ្យា ត្រូវបានគេហៅថាសំណង់នៃអនុមាណរួមនៅក្នុងចំណាងជើងរងនេះ។ ជាតំបូងអនុញ្ញាត្តឲ្យយើងស្វែងរកសំណុំមួយដោយការប្រើប្រាស់និយមន័យ។

3.2.2.1. **និយមន័យអនុគមន៍**

តាមទ្រឹស្តីមុខងារដែលអាចគណនាបានអាចត្រូវបានរកឃើញឡើងវិញ។ នៅក្នុងចំណុចខាងក្រោមនេះយើងគិតពីអំណះអំណាងនៃអំណះអំណាងនៃមុខងារ f យកតម្លៃនៅក្នុងសំណុំនៃចំនួនគត់មិនមែនអវិជ្ជមាន។ ជា

ទូទៅមុខងារដែលត្រូវបានធ្វើឡើងដដែលៗមានសំណុំដែនដែលមិនមានចំនួនច្រើន។មុខងារ f អាចត្រូវបានហៅឡើងវិញដូចខាងក្រោមៈ១៖ គុណតម្លៃនៃមុខងារនៅចំណុចមួយចំនួនៈ

ឧទាហរណ៍៖ $f\ (0), f\ (1)$ គឺជាក់លាក់។ តម្លៃបែបនេះត្រូវបានគេហៅថាតម្លៃដំបូង។

២៖ គុណតម្លៃនៃមុខងារនៅ $(n+1)$ ទាក់ទងនឹង $f\ (0), f\ (1), \dots, f\ (n)$ និង n ខ្លួនវា។

៣៖ សរសេរសេចក្ដីថ្លែងចុងក្រោយដែលក្នុងករណីភាគច្រើនអានថា ជំហ៊ានទី ១ និងទី ២ គឺជាជំហ៊ានតែពីរគត់ដែលមិនដំណើរការ f ។

វិចារណកថាៈ ខ្លឹមសារនៃការហៅខ្លួនឯងគឺភាពសាមញ្ញរបស់វាដែលជួយយើងឱ្យយល់ពីមុខងារដែលត្រូវបានគេពិចារណាប៉ុន្តែមិនមែនជាការបង្ហាញរបស់វាទេនៅពេលដែលយើងត្រូវបានគេស្នើសុំអោយតំលៃនៃមុខងារនោះ។ យើងចូលចិត្តគណនាមុខងារមួយដោយប្រើរូបមន្តទម្រង់បិទរបស់ខ្លួនជំនួសឱ្យការប្រើការហៅខ្លួនឯងដោយផ្ទាល់។ អាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យាមិនមានអ្វីដែលត្រូវធ្វើជាមួយការបន្ថែមរូបមន្តបិទសម្រាប់មុខងារដែលបានផ្តល់ឱ្យនោះទេ 3 ប៉ុន្តែវាគឺជាបច្ចេកទេសដ៏មានឥទ្ធិពលសម្រាប់ការផ្ទៀងផ្ទាត់ថារូបមន្តបិទដែលបានផ្តល់ឱ្យគឺជារូបមន្តត្រឹមត្រូវមួយសម្រាប់មុខងារដែលបានហៅឡើងវិញ។

ឧទាហរណ៍ ៣.២ ទុកឱ្យអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍មិនមែនអវិជ្ជមានជាអាគុយម៉ង់របស់វាហើយត្រូវបានរកឃើញឡើងវិញដូចខាងក្រោម។

1: $f(0) = 0$

2: $\forall\, n \geq 0,\ f(n+1) = f(n) + (n+1)$

យើងកត់សំគាល់ថា

$$f(0) = 0,$$
$$f(1) = f(0)+1 = 0+1 = 1,$$
$$f(2) = f(1)+2 = 0+1+2 = 3,$$
$$f(3) = f(2)+3 = 0+1+2+3 = 6,$$

និងការសន្និដ្ឋានថា f (n) គឺជាការបូកសរុបនៃលេខធម្មជាតិទី f_i ទម្រង់បិទជិតនៃ f ត្រូវបានផ្តល់ជា។

$f(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ យើងអាចប្រើវិធីគណិតវិទ្យាដើម្បីបញ្ជាក់ថាសមភាព (3.1) គឺត្រឹមត្រូវ ៤។

មូលដ្ឋានគ្រឹះអាក់ខានៈតម្លៃដំបូងនៃចជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃអាំងឌុចស្យុង។

ជាពិសេសយើងបង្ហាញថា $f\ (0) = \dfrac{0 \times (0+1)}{2}$ ។

វាច្បាស់ណាស់ថាសមភាព (៣.១) មាននៅពេល n = 0 ហេតុដូចនេះហើយមូលដ្ឋានមាន។

សម្គាល់ៈ $f\ (0) = 0$ ត្រូវបានផ្តល់ជាផ្នែកមួយនៃផ្នែកនៃ f ហើយយើងបានផ្ទៀងផ្ទាត់វាដោយប្រើរូបមន្ត (3.1) ។

សម្មតិកម្មប្រានចោលៈ សន្មតថាបានផ្តល់ឱ្យណាមួយ f_iថេរ $n \geq 0$, សមភាព។

$$f(n) = \frac{(n+1)}{2}$$

សម្គាល់ៈយើងបានដកចេញនូវបរិមាណជាសកលក្នុងសមភាព (3.1) ពីព្រោះ n មិនមានភាពលំអៀងបន្ទាប់ពីជំហាននេះ។ជំហានប្រានចោលៈ ក្នុងជំហាននេះយើងចាំបាច់ត្រូវបង្ហាញវា។

$f\ (n+1)\ =\ \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ យើងត្រូវប្រើការហៅឡើងវិញនៃ f ដើម្បីឱ្យមាន។

$f(n+1)\ = f(n)+(n+1)$

ឧទាហរណ៍នេះយើងមិនស្មានច្បាស់ថាជាការពិតក្នុងដែនរបស់វាទេ។ ជាក់ស្តែង, ការប៉ាន់ស្មានគឺ។

$P(n): f(n+1)\ = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ និង $D_n\ =\ N_0$ ។ ជាទូទៅប្រសិនបើការទស្សន៍ទាយច្បាស់ពីបរិបទបញ្ហាយើងអាចលុបវាដើម្បីកែលម្អការបង្រួមភស្តុតាង។ សូមប្រៀបធៀបដំណោះស្រាយទៅនឹងបញ្ហាទី ៦ និង ៧ ផ្ទុយទៅវិញប្រសិនបើប្រធានបទមិនច្បាស់ការទាយទុកមុនត្រឹមត្រូវនិងដែនរបស់វាអាចជួយយើងឱ្យឈានជំហានដំបូង (សូមមើលលំហាត់ ៣២) ។ នៅក្នុងដំណោះស្រាយភាគច្រើននៅក្នុងផ្នែកទី ៣.៥ ។ បន្ទាប់មកយើងប្រើសម្មតិកម្មដើម្បីជំនួស $f\ (n)$ ក្នុង (3.2) ដោយ $\frac{n(n+1)}{2}$

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= f(n)+(n+1)\\
&= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

ដូច្នេះយើងអាចអះអាងថាសម្រាប់ទាំងអស់ $\forall n \geq 0,\ f\ (n)\ =\ \frac{n\ (n\ +\ 1)}{2}$ ហេតុដូចនេះសំណុំបែបបទដែលបានបិទសម្រាប់ f គឺត្រឹមត្រូវ។

3.2.2.2.**និយមន័យកំណើនសម្រាប់សំណុំនិងសំណង់ទិចារកំណើន**

តាមទ្រឹស្តីមុខងារដែលអាចគណនាបានអាចត្រូវបានរកឃើញឡើងវិញ។ នៅក្នុងចំណុចខាងក្រោមនេះយើងគិតពីអំណះអំណាងនៃអំណះអំណាងនៃមុខងារ f យកតម្លៃនៅក្នុងសំណុំនៃចំនួនគត់មិនមែនអវិជ្ជមាន។ ជាទូទៅមុខងារដែលត្រូវបានធ្វើឡើងដដែលៗមានសំណុំដែនដែលមិនមានចំនួនច្រើន។ មុខងារ f អាចត្រូវបានហៅឡើងវិញដូចខាងក្រោមៈ

1. គុណតម្លៃនៃមុខងារនៅចំណុចមួយចំនួន។ ឧទាហរណ៍ f (0), f (1) គឺជាក់លាក់។ តម្លៃបែបនេះត្រូវបានគេហៅថាតម្លៃដំបូង។
2. គុណតម្លៃនៃមុខងារនៅ n + 1 ទាក់ទងនឹង f (0), f (1), ... , f (n) និង n ខ្លួនវា។
3. សរសេរសេចក្តីថ្លែងចុងក្រោយដែលក្នុងករណីភាគច្រើនអានថា ជំហ៊ានទី ១ និងទី ២ គឺជាជំហ៊ានតែពីរគត់ដែលមិនដំណើរការមុខងារ f ។

វិចារណកថាៈខ្លឹមសារនៃការហៅខ្លួនឯងគឺភាពសាមញ្ញរបស់វាដែលជួយយើងឱ្យយល់ពីមុខងារដែលត្រូវបានគេពិចារណាប៉ុន្តែមិនមែនជាការបង្ហាញរបស់វាទេនៅពេលដែលយើងត្រូវបានគេស្នើសុំអោយតំលៃនៃមុខងារនោះ។ យើងចូលចិត្តគណនាមុខងារមួយដោយប្រើរូបមន្តទម្រង់បិទរបស់ខ្លួនជំនួសឱ្យការប្រើការហៅខ្លួនឯងដោយផ្ទាល់។ អាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យាមិនមានអ្វីដែលត្រូវធ្វើជាមួយការបន្ថែមរូបមន្តបិទសម្រាប់មុខងារ

ដែលបានផ្តល់ឱ្យនោះទេ 3 ប៉ុន្តែវាគឺជាបច្ចេកទេសដ៏មានឥទ្ធិពលសម្រាប់ការផ្ទៀងផ្ទាត់ថារូបមន្តបិទដែលបានផ្តល់ឱ្យគឺជារូបមន្តមួយដែលត្រឹមត្រូវសម្រាប់មុខងារដែលបានហៅឡើងវិញ។
ឧទាហរណ៍ ៣.២ ទុកឱ្យអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍មិនមែនអវិជ្ជមានជាអាគុយម៉ង់របស់វាហើយត្រូវបានរកឃើញឡើងវិញដូចខាងក្រោម។1. $F(0) = 0;$ គំនិត ១ ទាក់ទងនឹងមុខងារត្រូវបានពិចារណានៅក្នុងជំពូកទី ៥។ ការអនុវត្តន៍ ២.៦ ក្នុងជំពូកទី ២ គឺជាឧទាហរណ៍មួយនៃការពិចារណាឡើងវិញសំរាប់វាក្យសម្ព័ន្ធនៃរូបមន្តដែលបានបង្កើតឡើងយ៉ាងល្អ។ ៣ ជពូកទី៨ នឹងពិភាក្សាលម្អិតអំពីការដោះស្រាយបញ្ហាទំនាក់ទំនងកើតឡើងដដែលៗ។
បន្ទាប់មកយើងប្រើសម្មតិកម្មដើម្បីជំនួស $f(n)$ ក្នុង (3.2) ដោយ $\frac{n\ (n\ +\ 1)}{2}$ ។

$$f(n+1) = f(n)+(n+1)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ដូច្នេះយើងអាចអះអាងថាសម្រាប់ $\forall n \geq 0$, $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ ហេតុដូចនេះសំណុំបែបបទដែលបានបិទសម្រាប់ f គឺត្រឹមត្រូវ។

3.2.3.**សំណងនិងនិយមន័យរបស់សំណុំ**

យើងនឹងណែនាំវ៉ាវ្យង់គណិតវិទ្យាដែលមានបំរែបំរួលដ៏សំខាន់មួយដែលហៅថាការបង្កើតរចនាសម្ព័ន្ធនៅក្នុងផ្នែកនេះ។ ចូរយើងសិក្សាជាដំបូងនូវវិធីរៀបចំសំណុំបែបបទដោយប្រើការហៅខ្លួនឯង។ គំនិតគឺ: (១) ផ្តល់នូវធាតុដំបូងមួយចំនួនសម្រាប់សំណុំហើយ (២) បញ្ជាក់ពីវិធានមួយចំនួនក្នុងការបង្កើតធាតុថ្មីដោយប្រើធាតុចាស់ដែលមានរួចហើយនៅក្នុងសំណុំ។

សំណុំ S អាចត្រូវបានបញ្ជាក់ឡើងវិញដូចខាងក្រោម:

1. សម្គាល់ធាតុមួយចំនួននៃឈុតអេស។

2.ពន្យល់ពីរបៀបទទួលបានធាតុថ្មីនៃឈុត S ពីធាតុចាស់នៃឈុត។

3. សរសេរសេចក្តីថ្លែងការណ៍បញ្ចប់ដែលក្នុងករណីភាគច្រើនអាន (១) និង (២) គឺជាមធ្យោបាយតែពីរដើម្បីបង្កើតធាតុនៃសំណុំអេស។

ឧទាហរណ៍ ៣.៣ ទុកឱ្យ S ជាសំណុំខ្សែ ១ និង 0 ហើយត្រូវបានធ្វើឡើងវិញដូចខាងក្រោម៖

1: 1∈S, 100∈S.

2: បើ s∈S, នោះ 11s∈S.

3:បើs∈S, នោះ 0s∈S.

4.គ្មានអ្វីក្រៅពីខ្សែដែលបង្កើតឡើងដោយយោងទៅតាមច្បាប់ 1, 2, និង 3 គឺជាធាតុនៅក្នុងអេស។ តារាងខាងក្រោមបង្ហាញធាតុមួយចំនួននៅក្នុងសំណុំនិងវិធានដែលបានប្រើ។

បង្កើតធាតុនីមួយៗនៅក្នុងតារាងរៀងៗខ្លួន។

	elements	Rules uesd
s_0	1	1
s_1	001	1,3
s_2	1100111	1,2,3,2
s_3	001100001	1, 3,3,2,3
s_4	11001100001	1, 3,3,2,3,2
s_5	00001100001	1, 3,3,2,3,3

នៅក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើដែលបានផ្តល់ឱ្យធាតុណាមួយ s ∈ S យោងទៅតាមច្បាប់ដែលយើងអាចបង្កើតធាតុថ្មីពីរពី s, ឧ, 11s (ដោយប្រើច្បាប់ទី 2) និង 00 (ប្រើច្បាប់ទី 3) ។ ឧទាហរណ៍ប្រសិនបើយើងដឹងថា s3 ,S បន្ទាប់មកយើងអាចអនុវត្តវិធាន ២ និង ៣ ទៅ s៣ ដើម្បីទទួលបាន ១១s៣ និង 00s ៣ ដែលជា ៤ និង s៥ រៀងៗខ្លួនហើយពួកគេក៏ត្រូវបញ្ចូលក្នុងអេសអេសម្យ៉ាងវិញទៀត ១១១១ ឧទាហរណ៍មិនមែនជាសមាជិករបស់អេសព្រោះយើងមិនអាចមានលេខ ១១១១ ដោយប្រើច្បាប់ដែលបានផ្តល់ឱ្យ។ ឥឡូវសំណួរគឺថាតើទំនាក់ទំនងនិងទ្រឹស្តីបទគណិតវិទ្យាមានទំនាក់ទំនងគ្នាយ៉ាងដូចម្តេច? ដើម្បីឆ្លើយសំណួរនេះអនុញ្ញាតឱ្យ ss ពិនិត្យមើល $s_0, \ldots, s_5$ នៃសំណុំ S បានទទួលខាងលើ។ យើងដឹងថាគ្រប់ធាតុទាំងអស់មានលេខគូលេខ 00 និងលេខសេស ១០ ។ តើការសង្កេតនេះត្រឹមត្រូវទេ។ តើយើងអាចបង្ហាញវាដោយរបៀបណា? បច្ចេកទេសល្អបំផុតសម្រាប់បញ្ជាក់បញ្ហាប្រភេទនេះគឺការបង្កើតគណិតវិទ្យា។ ជាទូទៅប្រសិនបើសំណុំមួយត្រូវបានរកឃើញម្តងហើយម្តងទៀតហើយយើងសង្កេតឃើញថាការរកឃើញឡើងវិញផ្តល់នូវទ្រព្យសម្បត្តិរួមមួយដែលបានចែករំលែកដោយធាតុទាំងអស់នៅក្នុងសំណុំបន្ទាប់មកយើងអាចប្រើវិធីគណិតវិទ្យាដើម្បីបញ្ជាក់ពីការសង្កេត។ ការគោរពគឺថាលំដាប់នៃធាតុនៅក្នុងសំណុំ S លែងមានតទៅទៀត (ទោះបីជា S នៅតែជាសំណុំដែលបានរៀបចំយ៉ាងល្អក៏ដោយ) ។ ដើម្បីជំនះបញ្ហានេះយើងណែនាំបំរែបំរួលគណិតវិទ្យាដែលហៅថាអាំងតេក្រាលរចនាសម្ព័ន្ធ។ យើងមិនតម្រង់ជួរមើលឃើញធាតុនៅក្នុងសំណុំ។ ផ្ទុយទៅវិញយើងស្រមៃថាធាតុនៅក្នុងសំណុំត្រូវបានតម្រង់ជួរដោយយោងទៅតាមចំនួនដងនៃច្បាប់ដែលត្រូវបានប្រើដើម្បីបង្កើតធាតុទាំងនោះ។ ឧទាហរណ៍ប្រសិនបើ s នៅកន្លែងណាមួយក្នុងជួរបន្ទាប់មកធាតុបន្ទាប់គឺ

លេខ 00 និង ១១ ពីព្រោះលេខ 00 និង ១១ ត្រូវបានទទួលពី s ដោយអនុវត្តវិធានដែលបានផ្តល់មួយម្តង ទៀត។ ដូច្នេះប្រសិនបើទ្រព្យសម្បត្តិដែលបានផ្តល់ P ត្រូវបានគេអះអាងថាមានលក្ខណៈជាសកលនៅក្នុង សំណុំ S នោះយើងគួរតែអាចបង្ហាញពីផលប៉ះពាល់នេះ។

$\forall s \in S\ [P(s) \rightarrow P(00s) \wedge P(11s)]$.

ជំហាននៃភស្តុតាងដោយការណែនាំរចនាសម្ព័ន្ធត្រូវបានចែងខាងក្រោម។ និយាយជារួមសូមឱ្យសំណុំ S ត្រូវ បានបញ្ជាក់ឡើងវិញដូចខាងក្រោម:

1. $s_0, s_1, \ldots, s_k \in S$

2. បើ $s \in S$, នាំឲ្យ $r_0(s), r_1(s), \ldots, r_l(2) \in S$

3.មានតែធាតុដែលបញ្ជាក់ក្នុង១ រឺបង្កើតដោយច្បាប់ក្នុង ២ ប៉ុណ្ណោះគឺជាធាតុនៅ s ។

យើងចង់បញ្ជាក់ថាធាតុទាំងអស់នៅក្នុង s មានលក្ខណសម្បត្តិ P ពោលគឺជាឧទាហរណ៍។

$\forall s \in S\ \left[P(s)\ =\ T\right]$ បន្ទាប់មកនីតិវិធីដូចខាងក្រោមអាចត្រូវបានអនុវត្ត។

ជំហានទី១៖ បញ្ជាក់ថា $P\ (s_0), P\ (s_1), \ldots, P\ (s_k)$ សុទ្ធតែជាការពិត។ ជំហាននេះគឺជាជំហានមូលដ្ឋាន នៃការបង្កើតរចនាសម្ព័ន្ធ។

ជំហ៊ានទី២៖ ចូរចាត់ទុកជាធាតុដែលមិនសមហេតុផលនៅក្នុងសំណុំ S ហើយសន្មតថា P (s) គឺពិត។នេះគឺជា សម្មតិកម្មខាងក្នុង។

ជំហានទី៣៖ ប្រើការសន្មតដើម្បីបញ្ជាក់ថា $P\ (r_0\ (s)), P\ (r_1\ (s)), \ldots, P\ (r_l\ (s))$ សុទ្ធតែជាការពិត។ ជំហាននេះគឺជាជំហានបង្កើតថ្មី។ ប្រសិនបើយើងអាចបង្ហាញមូលដ្ឋាននៅក្នុងជំហានទី១ និងការជាប់ ទាក់ទងក្នុងជំហានទី៣ នោះយើងអាចអះអាងបានថា $P(s)$ គឺពិតសំរាប់អេសអេសទាំងអស់។ វិធីសាស្ត្រនេះ ត្រូវបានគេហៅថាការបញ្ចូលរចនាសម្ព័ន្ធពីព្រោះយើងកំពុងពិនិត្យមើលរចនាសម្ព័ន្ធនៃធាតុនៅក្នុងសំណុំ ដែលរចនាសម្ព័ន្ធត្រូវបានផ្តល់ឱ្យដោយច្បាប់។ ធាតុណាដែលមិនមានដើមអាចត្រូវបានបំបែកទៅជាបំណែក តូចៗមួយចំនួនហើយទ្រព្យសម្បត្តិរបស់វាគឺជាលទ្ធផលនៃលក្ខណៈសម្បត្តិរបស់បំណែករបស់វា។

ឧទាហរណ៍ ៣.៤ ពិចារណាលើសំណុំ S បានរកឃើញ ក្នុងឧទាហរណ៍នៅលើទំព័រ ១០៩។ បង្ហាញដោយ ការបញ្ចូលរចនាសម្ព័ន្ធថារាល់ធាតុនៅក្នុង S មានលេខគូលេខ 0 និងលេខសេស ១០ ។

មូលដ្ឋានគ្រឹះអាក់រអួល: វាច្បាស់ណាស់ថាខ្សែទាំងពីរ" ១" និង" ១០០" មានលេខ 0 និងលេខសេស ១០ ។ ដូច្នេះមូលដ្ឋានខាងក្នុងមាន។ សម្មតិកម្មប្រានបោល: សន្មតថាអេសអេសនិងសមានលេខគូលេខ 0 និង លេខសេស ១០ ។

ជំហានអសមត្ថភាពៈវាច្បាស់ណាស់ថាប្រសិនបើការសន្មត់ថាជាការពិតនោះលេខ 0 និង ១១ មានទាំង លេខ ០០ និងលេខសេស ១០ ។

ដូច្នេះការសង្កេតគឺត្រឹមត្រូវ។

3.3. **វិចារអំណើន**

អាំងឌុចស្យុងគឺជាទម្រង់ពិសេសនៃអាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យាដែលយើងអាចបង្ហាញពីសេចក្តីថ្លែងគណិតវិទ្យា ដែលមានអថេរច្រើនជាងមួយដែលពាក់ព័ន្ធ។ អាំងឌុចស្យុងត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាអាំងឌុចស្យទ្វេក្នុងករណី ដែលសេចក្តីថ្លែងគណិតវិទ្យាមុខវិជ្ជាមានអថេរពីរ។ ពិចារណាមុខងារ ។

A: □ × □ → □ រកឃើញដូចខាងក្រោម

$$\begin{aligned}
&(i).\ A(0,m) = m+1;\\
&(ii).\ A(n+1,0) = A(n,1);\\
&(iii).\ A(n+1,m+1) = A(n,A(n+1,m))
\end{aligned}$$

ទ្រឹស្តីបទៈ $\forall m,n,\ A(n,\ m) > m$ ។ យើងនឹងបង្ហាញទ្រឹស្តីបទតាមរយៈការបង្កើតដោយផ្ទាល់មុនពេល យើងផ្តល់ទ្រឹស្តីបទជាមូលដ្ឋានដើម្បីបង្ហាញអំពីជំហានរបស់យើង។ សូមឱ្យ m និង n ដូរលើ N ។

មូលដ្ឋាន: $\forall m,\ A\ (0,\ m) > m$ ។ វាលេចឡើងយ៉ាងច្បាស់ពីការគិត (i)។

សម្មតិកម្មអវត្តមាន:□ ×□ សន្មត់ថា $\forall m[A(n,m) > m]$.

ជំហានដែលមិនចង់បាន: យើងចង់បង្ហាញថា $\forall m\ [A\ (n\ +\ 1, m) > m]$។ សម្រាប់ $m\ =\ 0$ យើងមាន $A\ (n\ +\ 1,0)\ =\ A\ (n,\ 1)$ តាមលក្ខណៈខាងលើ។

(ii) និងដោយសម្មតិកម្ម $A\ (n,\ 1) > 1$, ដូច្នេះ, $A\ (n\ +\ 1,\ 0) > 1 > 0.$ សម្រាប់ $m > 0$យើងមាន។

$A(n+1,m) = A(n, A(n+1,m-1))$ តាមនិយមន័យ (iii) $A(n+1,m-1)$ តាមសមត្ថកម្ម

$A(n+1,m) \geq A(n+1,m-1)+1 = A(n, A(n+1,m-2))+1$ តាមនិយមន័យ (iii) $A(n+1,m-2)+1$

តាមសមត្ថកម្ម

$A(n+1,m) \geq A(n+1,m-2)+2 \ldots A(n+1,m) \geq A(n+1,m-m)+m = A(n+1,0)+m = A(n,1)+m > 1+m$

តាមសមត្ថកម្ម:

ដូច្នេះ $\forall m,\ [A\ (n\ +\ 1,\ m) > m]$។

3.3.1. **តក្កវិជ្ជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃអាំងឌុចស្យុង**

យើងប្រើឧទាហរណ៍មុនហើយរកឃើញ ពីរកន្លែងនិងមួយកន្លែងព្យាករណ៍ពី Q និង P រៀងគ្នា

លើលេខធម្មជាតិដូចខាងក្រោម។

$Q(n,m)\Delta = A(n,m) > m, P(n)\Delta = \forall m Q(n,m).$

ដូច្នេះយើងអាចសរសេរទ្រឹស្តីបទឡើងវិញយោងទៅតាមសមីការតក្កវិជ្ជាដូចខាងក្រោម។

$\forall n \forall m\left[A(n,m) > m\right] \Leftrightarrow \forall n \forall m Q(n,m) \Leftrightarrow \forall n P(n).$

ដើម្បីបញ្ជាក់∀nP (n) ដោយអាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យាយើងអនុវត្តច្បាប់ដែលយើងធ្លាប់ស្គាល់។

$P(0)\forall n[P(n) \Rightarrow P(n+1)] \ / \forall n P(n).$

ប្រើអនុគមន៍របស់គី, ការបន្ថែមខាងលើអាចត្រូវបានសរសេរឡើងវិញដូចជា។

$\forall m Q(0,m)\forall n[\forall m Q(n,m) \Rightarrow \forall m Q(n+1,m)] \ / \forall n \forall m Q(n,m).$

ដូច្នេះអាំងតង់ស៊ីតេ នៅក្នុងកស្តុតាងខាងក្នុងដែលយើងទើបតែបានបង្ហាញ

, មូលដ្ឋានខាងក្នុងនៃវិចារកំណើន

$\forall m, Q\ (0,\ m)$ និងសម្មតិកម្មខាងក្នុងគឺ $\forall m, Q\ (n,\ m)$ ។

3.3.2.**លំហាត់**

អនុសញ្ញាសម្រាប់ផ្នែកផ្សេងទៀតនៃជំពូកនេះ៖

•ប្រសិនបើយើងមិនបញ្ជាក់ពីចំណុចផ្សេងទៀតទេ n មានជួរលើសលេខ N0 ពោលគឺn∊ {0,1,2,3, ... } ។ អថេរសន្មស្សន៍ទាំងអស់នៅក្នុងលេខយោងគឺជាលេខគត់។ TH តំណាងអោយសម្មតិកម្មខាងក្នុង។

បញ្ហាទី ១៖ ការអះអាង:

$$\sum_{1\le k\le n} 2^k = 2^{n+1}$$

មិនត្រឹមត្រូវ។ រកកំហុសនៃភស្តុតាងដែលមិនត្រឹមត្រូវដូចតទៅ៖

១. សន្មតថាសំរាប់ n ថេរ។

2.បន្ថែម $2n+1$ ទៅភាគីទាំងពីរនៃសមភាពខាងលើ។ យើងមាន:

$$\sum_{1\le k\le n} 2^k + 2^{n+1} = 2^{n+1} + 2^{n+1}$$
$$\sum_{1\le k\le n+1} 2^k = 2\times 2^{n+1}$$
$$\sum_{1\le k\le n+1} 2^k = 2^{n+1+1}$$

នេះបញ្ជាក់លទ្ធផល។ បញ្ហាទី ២៖ ពិចារណាលើលំដាប់លេខ $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ត្រូវបានគេចាត់ទុកថា:

1: $a_0 = 2$, និង $a_1 = 3$.

2: $\forall n \geq 2$, កំណត់ $a_n = 2a_n - 1 - a_n - 2.$

យើងត្រូវបានផ្តល់ការអះអាងដូចខាងក្រោមៈ

មិនមានជាតុនៅក្នុងលំដាប់ស្មើនឹង 1 ទេ។

យើងបង្ហាញភស្តុតាងដូចខាងក្រោម។ តើភស្តុតាងមិនត្រឹមត្រូវ? ប្រសិនបើយើងអាចបង្ហាញថា $a_0 = 1$ ហើយលំដាប់កំពុងកើនឡើងឧទាហរណ៍សម្រាប់ n ទាំងអស់ $a_n + 1 > a_n$ បន្ទាប់មកយើងអាចអះអាងថាគ្មានជាតុនៅក្នុងលំដាប់អាចស្មើនឹង 1 ទេ។

មូលដ្ឋានគ្រឹះអាក់រអួល៖ វាច្បាស់ណាស់ថាលេខ $a_0\ 6 = 1$ ។ សម្មតិកម្មមូលដ្ឋាននិង សម្មតិកម្មដោយចេតនា៖ សន្មតថា $1+1 > 1$។ ជំហានដែលមិនចេះរីងស្ងួត៖ ចេញពីលំដាប់នៃសម្មតិកម្មនិងសម្មតិកម្មយើងមាន។

$a_n + 2 = 2a_n + 1 - a_n > 2a_n + 1 - a_n + 1 = a_n + 1.$ដូច្នេះ , $a_n + 2 > a_n + 1;$ បញ្ហាទី 3 : ទុក $n \in \square$ ហើយពិចារណា:

$1{\cdot}1! + 2{\cdot}2! + 3{\cdot}3! + \cdots + n{\cdot}n!.$

1. ប្រើកំណត់ចំណាំដើម្បីបង្ហាញកន្សោមខាងលើ។

2. រករូបមន្តសម្រាប់វា។

បញ្ហាទី ៤ : បង្ហាញរូបមន្តដែលទទួលបានសម្រាប់ (៣.៣) ដោយអាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យា។

បញ្ហាទី ៥ : សូម $n \in \square$ ហើយពិចារណា។

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}$$

1. ប្រើ $\sum$ ពន្យល់ដើម្បីបង្ហាញកន្សោមខាងលើ។
2. រករូបមន្តសម្រាប់វា។

បញ្ហាទី ៦ : បង្ហាញរូបមន្តដែលទទួលបានសម្រាប់ (៣.៤) ដោយគណនាគណិតវិទ្យា។

បញ្ហាទី ៧ : បញ្ជាក់ថា៖ $\sum_{1 \leq k \leq n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

បញ្ហាទី ៨ : បញ្ជាក់ដោយកំណើនកំណត់គណិតវិទ្យានោះ៖ $\sum_{0\le k\le n} 3^k = \frac{\left(3^{n+1}-1\right)}{2}$

បញ្ហាទី ៩ : បញ្ជាក់ដោយកំណើនកំណត់គណិតវិទ្យានោះ៖ $\sum_{1\le k\le n} k^2 = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$

បញ្ហាទី ១០ : បញ្ជាក់ដោយកំណើនកំណត់គណិតវិទ្យានោះ៖ $\sum_{1\le k\le n} k(k-1) = \frac{n\left(n+1\right)\left(n-1\right)}{3}$

បញ្ហាទី ១១ : បញ្ជាក់ដោយកំណើនកំណត់គណិតវិទ្យានោះ៖

$$\sum_{1\le k\le n} k(k-1)(k-2) = \frac{n\left(n+1\right)\left(n-1\right)(n-2)}{4}$$

បញ្ហាទី ១២ : ប្រើសមភាព (៣.៥), ៣.៦) និង (៣.៧) ដើម្បីទាញយករូបមន្តសំរាប់។

បញ្ហាទី ១៣ : បង្ហាញទម្រង់បិទជិតដែលទទួលបានសម្រាប់ (៣.៨) ដោយអាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យា។

បញ្ហាទី ១៤ : បង្ហាញដោយគណិតវិទ្យាដែលសំរាប់ផលវិជ្ជមានទាំងអស់។

$$\sum_{0\le k\le n} \left(-2\right)^k = \frac{(1-2^{n+1})}{3}$$

បញ្ហាទី ១៥ : បង្ហាញដោយការគណនាគណិតវិទ្យាដែល $\forall n \ge 1$ $\sum_{1\le k\le n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

បញ្ហាទី ១៦ : បង្ហាញដោយការគណនាគណិតវិទ្យាដែល $\sum_{1\le k\le n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{\left(n+1\right)^2}$ $\forall n \ge 1$

បញ្ហាទី ១៧ : បង្ហាញវត្ថុខាងក្រោមដោយគណិតវិទ្យា $\overline{\bigcup_{1\le i\le n} A_i} = \bigcap_{1\le i\le n} \overline{A_i}$ ។

ដែល n ជាចំនួនគត់និង $n \ge 2$ និង $A_1, \dots, A_n$ គឺជាសំណុំណាមួយ។ នេះគឺជាច្បាប់ទូទៅរបស់ឌឺម៉ហ្គែន។

បញ្ហាទី ១៨ : ទុក a និង b ជាចំនួនគត់ពីរ។ បង្ហាញតាមវិចារកំណើនគណិតវិទ្យាថាសំរាប់ចំនួនគត់ $n \ge 1, a^n - b^n$
អានគឺជាពហុគុណនៃ a – b ។ ចំណាំថាអ្នកត្រូវបានស្នើសុំឱ្យបង្ហាញគណិតវិទ្យាដូច្នេះអ្នកមិនអាចប្រើការ
ពិតដូចតទៅនេះទេ៖

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

បញ្ហាទី ១៩ : សូមអោយ x ជាចំនួនពិតនិង x > 1. បញ្ជាក់ថាសំរាប់ n ទាំងអស់ >1

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

បញ្ហាទី ២០ : សូមអោយលេខ X ជាចំនួនពិតដូចជា x> 0 និង x ខុសពី 1។

$$x, x^x, x^{(x^x)}, x^{(x^{(x^x)})}, \ldots$$

X គឺជាលំដាប់ដែលកើនឡើង។

បញ្ហាទី ២១៖ បង្ហាញដោយអាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យាថាប្រសិនបើ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានវិជ្ជមាននោះ អាចបែងចែកបានដោយលេខ 4 ។ $1 + 3^n \quad n \in \mathbf{Z}$

បញ្ហាទី ២២៖ បង្ហាញថាផលបូកនៃគូបនៃចំនួនគត់បីជាប់គ្នាអាចបែងចែកបានដោយលេខ ៩ ។

បញ្ហាទី ២៣៖ បញ្ជាក់ដោយការបង្កើតគណិតវិទ្យាសម្រាប់ទាំងអស់ដែល

Z គឺជាសំណុំនៃចំនួនគត់ទាំងអស់។ $$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ is even,} \\ -1 & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

បញ្ហាទី ២៤ : សូមអោយ c (n) ជាលំដាប់នៃចំនួនគត់ដូចនោះ។

$$c(0) = 1, c(1) = 1, c(2) = 3, \quad n \geq 1,$$

និងសម្រាប់ទាំងអស់

$$c(n+2) = 3c(n+1) - 3c(n) + c(n-1).$$

បញ្ជាក់ថាសម្រាប់ទាំងអស់គ្នា $n \geq 0, \quad c(n) = n^2 - n + 1.$

បញ្ហាទី ២៥ : រក b (n) ដូចខាងក្រោម:

$$b(n+2) + 2b(n+1) + b(n) = 0, n \geq 0,$$

និង b (0) = 1 និង b(1) = 1 បញ្ជាក់ថា:

$$b(n) = (1 - 2n)(-1)^n, n \geq 0.$$

បញ្ហាទី ២៦៖ ប្រើអនុគមន៍នៃខ (n) ដែលមានក្នុងបញ្ហាលេខ 25 បង្ហាញថាប្រសិនបើ b(0) =1 និង b(1) = –3, បន្ទាប់មក។

$$b(n) = (1 + 2n)(-1)^n, n \geq 0.$$

បញ្ហាទី ២៧៖ ចូរយើងពិចារណាលំដាប់លំដោយដ៏ល្បីល្បាញមួយដែលមានឈ្មោះថាលេខ Fibonacci។

$$\begin{aligned} &f_0 = 0, \\ &f_1 = 1, \\ &f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ for } n \geq 2. \end{aligned}$$

បង្ហាញដោយអាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យាដែលសម្រាប់លេខ ០៩ ទាំងអស់។

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

បញ្ហាទី ២៨៖ ទុកអោយ S ជាសំណុំជាមួយធាតុ n ។ បង្ហាញដោយអាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យាថាចំនួនសរុបនៃសំណុំរងនៃ S ដែលមានធាតុពីរគឺ n (n – 1) / 2 ។

បញ្ហាទី ២៩៖ ទុកអោយ $P(n)$ ជាចំនួនអតិបរមានៃចំនុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់ជាច់ស្រយាល n ក្នុងប្លង់។ បង្ហាញដោយអាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យាថាសំរាប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ $\forall n \geq 2,\ P(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ ។

បញ្ហាទី ៣០៖ ទុកឱ្យ និង $x_n + 1$ និង $x_1 = 1$ ។ បញ្ជាក់ដោយគណិតវិទ្យា ណែនាំថាសំរាប់លេខ $n \geq 1,$ ទាំងអស់។

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + \tfrac{1}{x_n^2}}. \qquad 1 \leq x_n \leq \sqrt{n}.$$

បញ្ហាទី ៣១ : លេខអាម៉ូនិកដូចះ

$$H_n = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i}, \quad n \geq 1.$$

បង្ហាញដោយអាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យា៖ $H_{2^n} \geq \left(1 + \frac{n}{2}\right), \quad n \geq 0.$

បញ្ហាទី ៣២ ៈសូមតាងខ្សែអក្សរទទេ។ សូមឱ្យ A ជាសំណុំនៃសេចក្តីមិនគោរពវិន័យណាមួយ។ កញ្ចក់នៅលើអេសអាចត្រូវបានគេចាត់ទុកថាជាខ្សែដែលអានទៅមុខដូចគ្នានឹងថយក្រោយ។ ឧទាហរណ៍" ម៉ាក់″ និង" ឪពុក″ គឺជាអ្នកជំនាញខាងអក្សរក្រមអង់គ្លេស។ យើងកំណត់សំណុំ S ដូចខាងក្រោម៖

1. $\lambda \in S$

2. $\forall a \in A,\ a \in S$

4 **3.** $\forall a \in A\ \forall x \in S,\ axa \in S$ ត្រដោយច្បាប់ខាងលើ។បង្ហាញដោយអាំងឌុចស្យុងរចនាសម្ព័ន ដែល S ស្មើនឹងសំណុំនៃក្រាំងទាំងអស់នៅលើអេ។

បញ្ហាទី ៣៣: ទុកឱ្យ S ជាសំណុំនៃខ្សែរបស់ដែលត្រូវបានរកឃើញឡើងវិញដូចខាងក្រោម៖

1. a ∈ S, b ∈ S.

2. ប្រសិនបើ μ ∈ S និង ν ∈ S, បន្ទាប់ពី μν ∈ S.

3. គ្មានអ្វីក្រៅពីខ្សែដែលបង្កើតឡើងដោយយោងទៅតាមច្បាប់ ១ និង ២ គឺជាធាតុនៅក្នុង S។

យើងក៏អនុវត្តប្រតិបត្តិការបញ្ច្រាសឡើងវិញនៅលើអេសជា៖

1. R(a) = a, និង R(b) = b.

2. ប្រសិនបើ μ ∈ S, បន្ទាប់ពី R(aμ) = R(μ)a, និង R(bμ) = R(μ)b.

បញ្ជាក់ដោយការបញ្ចូលរចនាសម្ព័ន្ធដែលសំរាប់ μ ν∈S។

R(μν) = R(ν)R(μ).

ញ្ហាទី ៣៤៖ ទុកឲ្យ S និង R មានបញ្ហាដូចក្នុងបញ្ហាមុន។ បញ្ជាក់ថាសំរាប់ μ ∈ S។

បញ្ហាទី ៣៥ : ទុក Σ = {a, b} និងΛជាខ្សែអក្សរទទេ។ De fi ne A ⊆ Σ ∗ ដោយច្បាប់ខាងក្រោម។

1. Λ ∈ A.

2. ប្រសិនបើ ω ∈ A, បន្ទាប់ពី aωb ∈ A.

3. ប្រសិនបើ μ,ν ∈ A, បន្ទាប់ពី μν ∈ A.

4. រាល់ $\omega \in A$ ត្រូវតែមកពីលេខនៃការអនុវត្តច្បាប់ 1, 2, រឺ 3 ។

បង្ហាញដោយអាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យាដែលសម្រាប់រាល់ $\omega \in A,$ ω មាន ជាច្រើន a′s និង b′s ។

បញ្ហាទី ៣៦៖ ទុកឱ្យ A ត្រូវបានដោះស្រាយដូចបញ្ហាមុន។ បង្ហាញដោយអាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យាថាបើ ω ∈ A, បន្ទាប់មកចំនួន a ស្មើនឹងឬធំជាងចំនួនលេខ b នៅរៀងរាល់ pre x នៃ ω។ សម្គាល់ៈបុរេ ω ∈ A នៃ ω គឺ Λ ឬផ្នែកដំបូងនៃ ω។ ឧទាហរណ៍ប្រសិនបើ ω = អាបាបាបន្ទាប់មក Λ, អា, អាបា, អែប, អាបាបានិង អាបាបគឺអាចទៅរួចទាំងអស់មុន pre xes នៃ ω ។

ចម្លើយ

ដំណោះស្រាយទី១ ៖ មូលដ្ឋាននៃអាំងរឹតទ័រមិនត្រូវបានបង្ហាញទេ។ វាមិនត្រឹមត្រូវទេពីព្រោះសម្រាប់ n = 1 ។ដែលមិនស្មើគ្នា

ដំណោះស្រាយទី២ ៖ ភស្តុតាងមិនត្រឹមត្រូវ។ ភ័ស្តុតាងបង្ហាញថា $2^{1+1} = 4.$ ហើយអះអាងថាវាជាមូលដ្ឋាននៃអាំងរឹតទ័រ។ យោងទៅតាមសម្មតិកម្មដែលបានផ្តល់នៅក្នុងភស្តុតាងមូលដ្ឋានត្រឹមត្រូវ $a_0 \neq 1$ និង

ដើម្បីមើលកំហុសឱ្យកាន់តែច្បាស់សូ $\sum_{1\leq k\leq 1} 2^k = 2^1 = 2,$ ដាប់ $a_0 = 3,$ យើងមាន $a_1 > a_0.$

តែ $a_1 = 2.$ និង $a_2 = 1.$ វ៉ានគ្រឹះនៃការបង្ហាញតែភស្តុតាងទាំងនេះប៉ុណ្ណោះ។ ប៉ុន្តែមិននិយាយពីបញ្ហានោះទេ $a_0 > a_1$ $a_0 \neq 1$ ។

ដំណោះស្រាយទី៣ ៖

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! \;=\; \sum_{1 \le k \le n} k \cdot k!.$$

2. ដើម្បីទទួលបានសំណុំបែបបទបិទសម្រាប់ផលបូកខាងលើយើងកត់សម្គាល់ថា

K = (K + 1) – 1 សម្រាប់តែ K ប៉ុនណ្ណោះ។

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! \\
&\quad = (2 \cdot 1! - 1!) + (3 \cdot 2! - 2!) + (4 \cdot 3! - 3!) + \cdots + ((n+1) \cdot n! - n!) \\
&\quad = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \cdots + ((n+1)! - n!) \\
&\quad = (n+1)! - 1.
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ ៖

$$\sum_{1 \le k \le n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

ដំណោះស្រាយទី៤ ៖ សូមចាំថាគោលដៅរបស់យើងគឺដើម្បីបង្ហាញថាសមីការ

(៣ប្រកាន់ខ្ជាប់នូវគុណតំលៃទាំងអស់នៃលេខ) ។

ដោយអាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យា៖ $n \ge 1.$

មូលដ្ឋានគ្រឹះ៖ n = 1

$$\sum_{1 \le k \le 1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1,$$

$$(1+1)! - 1 = 1.$$

នោះមានន័យថាភាគីទាំងសងខាងស្មើនឹង ១។

•សម្មតិកម្មអវត្តមាន៖ ឧបមាថា៖

$$\sum_{1 \le k \le n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

តាមការសន្និដ្ឋាន ៖

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \le k \le n+1} k \cdot k! &= \sum_{1 \le k \le n} k \cdot k! + (n+1) \cdot (n+1)! \\
&= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\
&= (n+2) \cdot (n+1)! - 1 \\
&= (n+2)! - 1.
\end{aligned}$$

ដូច្នេះសម្រាប់ទាំងអស់នៃ $n \in \mathbf{N}$, គឺត្រឹមត្រូវ។

ដំណោះស្រាយទី៥ ៖

1. $$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} \;=\; \sum_{1 \le k \le n} \frac{1}{(3k-2) \cdot (3k+1)}.$$

2. ក្នុងបញ្ហានេះយើងប្រើសមភាពសំរាប់អ្នកណាម្នាក់។

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}\\
&=\frac{1}{3}(\frac{1}{1}-\frac{1}{4})+\frac{1}{3}(\frac{1}{4}-\frac{1}{7})+\frac{1}{3}(\frac{1}{7}-\frac{1}{10})+\cdots+\frac{1}{3}(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1})\\
&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\\
&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right).
\end{aligned}
$$

ដូច្នេះកន្សោមសំណុំបែបបទបិទនៃផលបូកគឺ៖

$$\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{(3k-2)\cdot(3k+1)}\ =\ \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

ដំណោះស្រាយទី៦ ៖ គោលដៅរបស់យើងគឺដើម្បីបង្ហាញដោយអាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យា។

តាមការសន្និដ្ឋាន ៖ n = 1។

$$
\begin{aligned}
\text{LHS}\ &=\frac{1}{3\cdot 1-2}\times\frac{1}{3\cdot 1+1}\ =\ \frac{1}{4},\\
\text{RHS}\ &=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot 1+1}\right)\ =\ \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

សម្មតិកម្ម៖ ឧបមាថា៖ $\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{(3k-2)\cdot(3k+1)}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$

តាមការសន្និដ្ឋាន៖

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1\le k\le n+1}\frac{1}{(3k-2)\cdot(3k+1)}\\
&=\left(\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{(3k-2)\cdot(3k+1)}\right)+\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}\\
&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)+\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)} && [\textbf{by IH}]\\
&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}+\frac{3}{(3n+1)\cdot(3n+4)}\right)\\
&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{3n+4-3}{(3n+1)\cdot(3n+4)}\right)\\
&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{3n+1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}\right)\\
&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+4}\right)
\end{aligned}
$$

ដូច្នេះ ទិន្នន័យទាំងអស់នៃ $n\in\mathbf{N}$ គឺត្រឹមត្រូវ។

ដំណោះស្រាយទី៧៖ Let $D_n=\mathbf{N}$, and [5]

$$P(n)^6:\sum_{1\le k\le n}k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

តាមការសន្និដ្ឋាននៃ n = 1។

$$1 \times 2 = \frac{1}{3}(1 \times 2 \times 3)$$

ដូច្នេះ P(1) = T។

តាមសម្មតិកម្មះ សន្មតិថា P(n) = T មានន័យថា

$$P(n) \neq \sum_{1 \leq k \leq n} k(k+1) \text{ and } P(n) \neq \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

5.ដោយចូលរួមពីបញ្ហានេះនិងចាប់ពីពេលក្រោយតទៅយើងនឹងបញ្ជាក់យ៉ាងច្បាស់នូវបុព្វកថានិងដែនរបស់វា។

ចំណាថា P(n) គឺជាបុព្វកថាមួយ; ចំពោះតម្លៃណាក៏ដោយ x នៃ n តម្លៃរបស់វាគឺមិនពិតឬមិនពិត។ វាមិនតំណាងឱ្យផលបូកឬតម្លៃរបស់វានៅផ្នែកម្ខាងទៀតនៃសមភាពទេ។

$$P(n) \neq \sum_{1 \leq k \leq n} k(k+1) \text{ and } P(n) \neq \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

តាមការសន្និដ្ឋានះ យើងអាចសរសេរបានថា P(n + 1) = ពិត។ និយាយម៉្យាងទៀតយើងចង់បញ្ជាក់ថាសមភាពខាងក្រោមគឺត្រឹមត្រូវះ

$$\sum_{1 \leq k \leq n+1} k(k+1) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3).$$

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq k \leq n+1} k(k+1) &= \left(\sum_{1 \leq k \leq n} k(k+1)\right) + (n+1)((n+1)+1) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \qquad \textbf{[by IH]} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3} \\
&= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{0\le k\le n+1} 3^k &= \left(\sum_{0\le k\le n} 3^k\right) + 3^{n+1} \\
&= \frac{3^{n+1}-1}{2} + 3^{n+1} \\
&= \frac{3^{n+1}-1+2\cdot 3^{n+1}}{2} \\
&= \frac{3\cdot 3^{n+1}-1}{2} \\
&= \frac{3^{n+1+1}-1}{2} \\
&= \frac{3^{n+2}-1}{2}.
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $P(n+1) = T.$ គឺជាការពិត។

ដំណោះស្រាយទី៨៖ $\forall n \in D_n, P(n)$

Let $D_n = \mathbf{N}$, and

$$P(n) : \sum_{0\le k\le n} 3^k = \frac{(3^{n+1}-1)}{2}.$$

តាមការសន្និដ្ឋាន៖ n = 1។

$$\sum_{0\le k\le 1} 3^k = 3^0 + 3^1 = 4,$$
$$\frac{(3^{1+1}-1)}{2} = \frac{9-1}{2} = 4.$$

ដូច្នេះ P(1) = T។ $\sum_{0\le k\le n+1} 3^k = \frac{(3^{n+2}-1)}{2}.$

តាមសម្មតិកម្ម៖ សន្មតិថា P(n) = T. i.e.

តាមសម្មតិកម្ម៖ $\sum_{0\le k\le n} 3^k = \frac{(3^{n+1}-1)}{2}.$

យើងចង់បញ្ជាក់ថា P (n + 1) គឺជាការពិតយើងចង់បញ្ជាក់ថា៖

P(n+1) = T.

ដូច្នេះ P(n) ត្រូវនិង n នៅក្នុង D_n
$$\begin{aligned}
\sum_{0\le k\le n+1} 3^k &= \left(\sum_{0\le k\le n} 3^k\right) + 3^{n+1} \\
&= \frac{3^{n+1}-1}{2} + 3^{n+1} \\
&= \frac{3^{n+1}-1+2\cdot 3^{n+1}}{2} \\
&= \frac{3\cdot 3^{n+1}-1}{2} \\
&= \frac{3^{n+1+1}-1}{2} \\
&= \frac{3^{n+2}-1}{2}.
\end{aligned}$$

ដំណោះស្រាយទី៩៖ គេអោយ $D_n = N$។

$$P(n) : \sum_{1 \le k \le n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

$$1^2 = \frac{1}{6} \times 1 \times 2 \times 3$$

តាមការសន្និដ្ឋាន៖ n = 1។

ដូច្នេះ P(n) ត្រូវនិង n នៅក្នុង D_n

តាមការសន្និដ្ឋាន៖ n = 1។

តាមការសន្មតិ៖ គេអោយ $i \in D_n$, ហើយគេសន្មតិថា P(i) = T. i.e.

$$\sum_{1 \le k \le i} k^2 = \frac{1}{6} i(i+1)(2i+1).$$

ការសន្និដ្ឋាន៖ គេមាន P(i + 1);

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \le k \le i+1} k^2 &= (1^2 + 2^2 + \cdots + i^2) + (i+1)^2 \\
&= \left(\sum_{1 \le k \le i} k^2 \right) + (i+1)^2 \\
&= \frac{1}{6} i(i+1)(2i+1) + (i+1)^2 \qquad \textbf{[by IH]} \\
&= \frac{1}{6} (i+1)(i(2i+1) + 6(i+1)) \\
&= \frac{1}{6} (i+1)(2i^2 + 7i + 6) \\
&= \frac{1}{6} (i+1)(i+2)(2i+3)) \\
&= \frac{1}{6} (i+1)((i+1)+1)(2(i+1)+1)).
\end{aligned}$$

P(i +1) = T.

ដូច្នេះយើងមាន $\forall n \in D_n, P(n)$

- ដំណោះស្រាយទី១០៖ នាំអោយ $D_n = \mathbf{N}$, និង

$$P(n) : \sum_{1 \le k \le n} k(k-1) = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1).$$

- តាមការសន្និដ្ឋានៈ គេបាន n = 1.

  នាំអោយយើងបានៈ $1 \times (1-1) = \frac{1}{3} \times (1+1) \times 1 \times (1-1).$

- តាមសម្មតិកម្ម ៈ គេអោយ ដោយ $i \in D_n,$ P(i) = T.

$$\sum_{1 \le k \le i} k(k-1) = \frac{1}{3}(i+1)i(i-1).$$

តាមការសន្និដ្ឋានៈ គេបាន P(i + 1).

$$\begin{aligned}\sum_{1 \le k \le i+1} k(k-1) &= \left(\sum_{1 \le k \le i} k(k-1)\right) + (i+1)((i+1)-1) \\ &= \frac{1}{3}(i+1)i(i-1) + i(i+1) \qquad \textbf{[by IH]} \\ &= \frac{1}{3}(i+1)i(i-1+3) \\ &= \frac{1}{3}(i+1)i(i+2).\end{aligned}$$

P(i + 1) = T.

គេបាន $\forall n \in D_n, P(n)$

- ដំណោះស្រាយទី១១ៈ គេអោយ $D_n = \mathbf{N}.$

  $$P(n) \ : \ \sum_{1 \le k \le n} k(k-1)(k-2) = \frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2).$$

- តាមការសន្និដ្ឋានៈ គេបាន n = 1.

  LHS នៃ $P(n)$ is $1(1-1)(1-2) = 0,$

  ហើយនិង RHS គឺ $\frac{1}{4}(1+1)1(1-1)(1-2) = 0$ ដោយសារទាំងសងខាងស្មើរគ្នា។

P(1) = (0=0)=T.

តាមសម្មតិកម្មយើងបានៈ $i \in D_n,$ អាយ P(i) =T. i.e.

$$\sum_{1 \le k \le i} k(k-1)(k-2) = \frac{1}{4}(i+1)i(i-1)(i-2)$$

តាមការសន្និដ្ឋានៈ ដែលបញ្ជាក់ថា P(i+1) គឺពិតជាត្រឹមត្រូវ យើងអាចបង្ហាញវាដោយៈ

$$\sum_{1\le k\le i+1} k(k-1)(k-2) = \frac{1}{4}(i+2)(i+1)i(i-1).$$

$$\begin{aligned}\sum_{1\le k\le i+1} & k(k-1)(k-2) \\ &= \sum_{1\le k\le i} k(k-1)(k-2) + (i+1)i(i-1) \\ &= \frac{1}{4}(i+1)i(i-1)(i-2) + (i+1)i(i-1) \\ &= \frac{1}{4}(i+1)i(i-1)\left((i-2)+4\right) \\ &= \frac{1}{4}(i+1)i(i-1)(i+2).\end{aligned}$$

$$P(i+1) = T.$$

ដូច្នេះយើងបាន $\forall n \in D_n, P(n)$ គឺពិត។

ដំណោះស្រាយទី១២៖ សូមសង្កេតមើលលក្ខណៈសម្បត្តិដូចខាងក្រោម។ តាង f (k) និង g (k) ជាមុខងារពីររបស់ k ថេរ។ យើងមានសមភាពដូចខាងក្រោម។

$$\sum_{1\le k\le n} (f(k)+g(k)) = \sum_{1\le k\le n} f(k) + \sum_{1\le k\le n} g(k).$$

$$\sum_{1\le k\le n} af(k) = a\left(\sum_{1\le k\le n} f(k)\right).$$

គេអាចផ្ទៀងផ្ទាត់បាន៖
$$\begin{aligned}k^3 &= k(k-1)(k-2) + 3k^2 - 2k. \\ &= k(k-1)(k-2) + 2k(k-1) + k^2.\end{aligned}$$

តាមបម្រាប់៖
$$\sum_{1\le k\le n} k^3 = \left(\sum_{1\le k\le n} k(k-1)(k-2)\right) + 2\left(\sum_{1\le k\le n} k(k-1)\right) + \sum_{1\le k\le n} k^2.$$

បន្ទាប់មកយើងប្រើលទ្ធផលពីបញ្ហាមុន ៗ ដើម្បីទទួលបាន។

$$\begin{aligned}\sum_{1\le k\le n} k^3 &= \frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2) + \frac{2}{3}(n+1)n(n-1) + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{12}n(n+1)[3(n-1)(n-2) + 8(n-1) + 2(2n+1)] \\ &= \frac{1}{12}n(n+1)(3n^2 - 9n + 6 + 8n - 8 + 4n + 2) \\ &= \frac{1}{12}n(n+1)(3n + 3n^2) \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.\end{aligned}$$

ដំណោះស្រាយទី១៣៖ គេបាន $D_n = \mathbf{N}$, និង

$$P(n): \quad \sum_{1 \le k \le n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

តាមការសន្និដ្ឋាន៖ n = 1.វាងាយស្រួលក្នុងការផ្ទៀងផ្ទាត់ថាសម្រាប់៖ n = 1ទាំងសងខាងនៃសមភាពគឺ 1 ។

$$1^3 = \frac{1}{4} 1^2 (1+1)^2.$$

ដូច្នេះ P(1) = ពិត។

- តាមសម្មតិកម្មយើងមាន ហើយ $i \in D_n$,) = T, i.e.,

$$\sum_{1 \le k \le i} k^3 = \frac{1}{4} i^2 (i+1)^2.$$

- សម្មតិកម្ម P(i+1),

$$\begin{aligned} \sum_{1 \le k \le i+1} k^3 &= \sum_{1 \le k \le i} k^3 + (i+1)^3 \\ &= \frac{1}{4} i^2 (i+1)^2 + (i+1)^3 \\ &= \frac{1}{4} (i+1)^2 (i^2 + 4(i+1)) \\ &= \frac{1}{4} (i+1)^2 (i^2 + 4i + 4) \\ &= \frac{1}{4} (i+1)^2 (i+2)^2. \end{aligned}$$

នោះ P(i+1) = T.

ដូច្នេះ $\forall n \in D_n, P(n) = T.$

ដំណោះស្រាយទី១៤៖ $D_n = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$, និងឌីណោស

$$P(n): \sum_{0 \le k \le n} (-2)^k = \frac{1}{3}(1 - 2^{n+1}).$$

- មូលដ្ឋាននៃ n = 1. យើងជ្រើសរើសយក ១ ជាមូលដ្ឋានពីព្រោះ ១ គឺជាធាតុទីមួយនៃឌីនៅក្នុងការរាប់របស់យើងហើយកត់សំគាល់ថាអេឌីអេសនៃសមភាព។

និង RHS នៃសមភាពគឺ $\sum_{0 \le k \le 1} (-2)^k = (-2)^0 + (-2)^1 = -1, \quad \frac{1}{3}(1 - 2^2) = -1.$

ដូចនេះ P(1) = T។

- សម្មតិកម្មបង្ហាញ៖ យើងមាន $i \in D_n$, ហើយនិង P(i) = T, i.e.,

$$\sum_{0 \le k \le i} (-2)^k = \frac{1}{3}(1 - 2^{i+1}).$$

- សម្មតិកម្មបញ្ជាក់៖ គេមាន n = i + 2. យើងយក i + 2 ពីព្រោះ i + 2 ចំនួនគត់សេសវិជ្ជមាននៅជាប់ i។

$$\begin{aligned}\sum_{0\le k\le i+2}(-2)^k &= \sum_{0\le k\le i}(-2)^k+\sum_{i+1\le k\le i+2}(-2)^k\\ &=\frac{1}{3}(1-2^{i+1})+(-2)^{i+1}+(-2)^{i+2} \qquad \text{[by}\\ &=\frac{1}{3}[1-2^{i+1}+3(-2)^{i+1}+3(-2)^{i+2}]\\ &=\frac{1}{3}[1-2^{i+1}+3(-2)^{i+1}+3(-2)(-2)^{i+1}]\\ &=\frac{1}{3}[1-2^{i+1}+3(-2)^{i+1}-6(-2)^{i+1}]\\ &=\frac{1}{3}[1-(1-3+6)\times 2^{i+1}]\\ &=\frac{1}{3}(1-(-2)^2(-2)^{i+1}) \quad \text{since } i+1 \text{ is even}\\ &=\frac{1}{3}(1-(-2)^{i+3})\\ &=\frac{1}{3}(1-2^{i+3}) \quad \text{since } i+3 \text{ is even.}\end{aligned}$$

P(i+2) = T.

ដូច្នេះ គេមាន $\forall n\in D_n, P(n)$ ។

ដំណោះស្រាយទី១៥៖ ដេលី P(n) គ្រប់ $\frac{1}{2}.\quad n\ge 1$

$$P(n):\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$$

- សម្មតិកម្មបង្ហាញ៖ ដែល n = 1, វាងាយស្រួលក្នុងការផ្ទៀងផ្ទាត់ថាភាគីទាំងពីរនៃសមភាពស្មើ ។

$$\text{LHS}=\sum_{1\le k\le 1}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}=1/2.$$
$$\text{RHS}=1-\frac{1}{1+1}=1/2.$$

- សម្មតិកម្មអវត្តមាន៖ សន្មតថា P(n) គឺត្រូវនិង I,e.

$$\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$$

- សម្មតិកម្មវត្តមាន ៖ ដើម្បីបញ្ជាក់ P(n+1) ។

$$\begin{aligned}\sum_{1\le k\le n+1}\frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\ &=1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} \qquad [\mathrm{I}\\ &=1-\frac{(n+2)-1}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{1\le k\le n+1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} &= \sum_{1\le k\le n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}+\frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2}\\ &= 1-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2}\\ &= 1-\frac{(n+2)^2-2(n+1)-1}{(n+1)^2(n+2)^2}\\ &= 1-\frac{n^2+4n+4-2n-2-1}{(n+1)^2(n+2)^2}\\ &= 1-\frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}\\ &= 1-\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2}\\ &= 1-\frac{1}{(n+2)^2}\end{aligned}$$

ដូច្នេះ P(n+1) គឺត្រឹមត្រូវ។

ដំណោះស្រាយទី១៦៖ ដេលី គ្រប់ $n \geq 1$

$$P(n):\sum_{1\le k\le n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

- មូលដ្ឋានដែលមិនចេះនិយាយ n = 1.

$$\sum_{1\le k\le 1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{2+1}{1^2\cdot 2^2}=3/4.$$

$$1-\frac{1}{(1+1)^2}=3/4.$$

ដូច្នេះ P(1) គឺត្រឹមត្រូវ។

- សម្មតិកម្មបញ្ឆោតទាំងឡាយ៖ សន្មតថា P(n) ។

$$\sum_{1\le k\le n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

- សម្មតិកម្មបញ្ជាក់៖ ដើម្បីបញ្ជាក់ P(n+1) គឺត្រឹមត្រូវ។

ដូច្នេះ P(n+1) គឺត្រឹមត្រូវ។

$$\sum_{1\le k\le n+1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\sum_{1\le k\le n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}+\frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$$
$$=1-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$$
$$=1-\frac{(n+2)^2-2(n+1)-1}{(n+1)^2(n+2)^2}$$
$$=1-\frac{n^2+4n+4-2n-2-1}{(n+1)^2(n+2)^2}$$
$$=1-\frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$$
$$=1-\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2}$$
$$=1-\frac{1}{(n+2)^2}$$

ដូច្នេះ $P(n+1)$ គឺពិត។

ដំណោះស្រាយ17: គេមាន A_i កំណត់សំណុំមួយណា $i\in\mathbb{N}$, និង $P(n)$ ធ្វើជាគំរូសម្រាប់ $n\in\{2, 3, 4, \ldots\}$,

$$P(n):\overline{\bigcup_{1\le i\le n}A_i}=\bigcap_{1\le i\le n}\overline{A_i}.$$

- **មូលដ្ឋានគ្រឹះ**
  សម្រាប់ n = 2 យើងត្រូវបញ្ជាក់ថា

$$\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}.$$

វាគឺជាច្បាប់បុរាណរបស់ De Morgan នៅក្នុងតក្កវិជ្ជាហើយត្រូវបានគេដឹងថាជាការពិត។ ដូច្នេះមូលដ្ឋានខាងក្រោម។

- **សម្មតិកម្មអាំងតង់ស៊ីតេ** សន្មត $n=k$ និង $P(k)=T$, i.e.,

$$\overline{\bigcup_{1\le i\le k}A_i}=\bigcap_{1\le i\le k}\overline{A_i}.$$

- **ជំហាន Inductive** គេមាន $n=k+1$.

$$\overline{\bigcup_{1\le i\le k+1}A_i}=\overline{(\bigcup_{1\le i\le k}A_i)\cup A_{k+1}}.$$

បើយើងយក $(\bigcup_{1\le i\le k}A_i)$ A, និង A_{k+1} ដូច B, យើងមាន

$$\overline{(\bigcup_{1\le i\le k}A_i)\cup A_{k+1}}=\overline{(\bigcup_{1\le i\le k}A_i)}\cap\overline{A_{k+1}}.$$

ការប្រើប្រាស់សម្មតិកម្មដែលយើងមាន

$$\overline{(\bigcup_{1\le i\le k}A_i)}\cap\overline{A_{k+1}}=(\bigcap_{1\le i\le k}\overline{A_i})\cap\overline{A_{k+1}}$$
$$=\bigcap_{1\le i\le k+1}\overline{A_i}.$$

នោះជាភស្តុតាង $P(k+1) = T$.

ដូច្នេះ $\forall n \geq 2$, $P(n)$ នៃ T.ប្រសិនបើយើងចង់អះអាងថា $[\forall n \geq 1, P(n)]$ ក៏ពិតដែរយើងត្រូវបង្ហាញករណីពិសេស n = 1 និងមូលដ្ឋានគ្រឹះ n, 2 = ដាច់ដោយឡែកពីគ្នា។ វាជារឿងតូចតាចដើម្បីបង្ហាញថា P (1) គឺជាភាពពិតប៉ុន្តែ P (1) = T មិនមែនជាមូលដ្ឋាននៃអាំងវឺតទ័រទេ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា P (2) = T ជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃការបង្កើតពីព្រោះ P (1) មិនបញ្ជាក់ពី P (2) ទេ។

ដំណោះស្រាយ18: គេមាន $D_n = \mathbf{N}$, និង $P(n) : (a-b)/(a^n - b^n)$,

ដែល $(a-b) \mid (a^n - b^n)$ មានន័យថា $a^n - b^n$ អាចបែងចែកបានដោយ a – b ។ និយាយម៉្យាងទៀត យើងត្រូវបង្ហាញថាសំរាប់ n ថេរណាមួយមានចំនួនគត់ k ដូចជាថា – bn = a (a – b) ។ ចំណាំថា k អាចជាមុខងារនៃ a, b, និង n ។

- **មូលដ្ឋានគ្រឹះ** សំរាប់ $n = 1$, $a^n - b^n = a - b$ ហើយវាច្បាស់ណាស់ $(a-b)$ បែងចែក $(a-b)$, i.e.,$(a-b)/(a^1 - b^1)$ គឺពិត។ ដូច្នេះ $P(1)$=ពិត
- **សម្មតិកម្មអាំងតង់ស៊ីតេ** គេមាន $i \in D_n$, $i > 1$,និងសន្មត់ P (i) = T , i.e.,$(a-b) \mid (a^i - b^i)$,
- **ជំហាន Inductive** យើងចង់ដឹងថាតើ $a^{i+i} - b^{i+1}$ អាចបែងចែកបានដោយ a – b.

$a^{i+1} - b^{i+1} = aa^i - ba^i + ba^i - bb^i = a^i(a-b) + b(a^i - b^i)$. ពីសម្មតិកម្មខាងក្នុងយើងដឹងថាមានចំនួនគត់ kបែបនោះ

$(a^i - b^i) = k(a-b)$.

$$\begin{aligned} a^{i+1} - b^{i+1} &= a^i(a-b) + bk(a-b) \\ &= (a-b)(a^i + bk). \end{aligned}$$

វាច្បាស់ណាស់ថា ai + bk គឺជាចំនួនគត់ពីព្រោះ a, b, i, និង k គឺជាចំនួនគត់។

ដូច្នេះ$(a-b) \mid (a^{i+1} - b^{i+1})$.$P(i+1)$ គឺពិត

ដូច្នេះសម្រាប់ទាំងអស់គ្នា $n \geq 1$, $a^n - b^n$ អាចបែងចែកបានដោយ a – b.

ដំណោះស្រាយ19: ឧបមា x > 0, $D_n = \{2, 3, 4, \ldots\}$, និង $P(n) : (1+x)^n > 1 + nx$.

- **មូលដ្ឋាននៃវិសេសានុមាន** n = 2.

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x, \text{ ពីព្រោះ } n^2 > 0.$$

- **សម្មតិកម្មអាំងតង់ស៊ីតេ** គេមាន $i \in D_n$ និងសន្មត់ P (i) = T , នោះ $(1+x)^i > 1 + i$

- **ជំហានដំបូង:** យើងចង់បញ្ជាក់ពី P (i + 1) គឺពិត. $(1 + x)^{i+1} = (1 + x)^{i}(1 + x)$
$>(1+ix)(1+x)$ និង $x>0$
$=1+(i+1)x+ix^2$
$>1+(i+1)x$ ដោយ $n^2>0, i>0$
ចំណាំ លក្ខខណ្ឌដែលបានផ្តល់ឱ្យ x> 0 និងសម្មតិកម្ម គឺចាំបាច់ដើម្បីអះអាង

$(1 + x)^{i}(1 + x) > (1 + ix)(1 + x)$.

គេអាចរកឧទាហរណ៍ប្រឆាំងបានយ៉ាងងាយប្រសិនបើ $x < 0$.

ដំណោះស្រាយ20: យើងបង្ហាញពីលំដាប់

$$x, x^x, x^{(x^x)}, x^{(x^{(x^x)})}, \ldots$$

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \ldots$$

$$a_1 = x,$$
$$a_2 = x^x = x^{a_1},$$
$$a_3 = x^{(x)^x} = x^{a_2},$$
$$\ldots\ldots$$

ជាទូទៅ, $a_n = x^{a_{n-1}}$ សម្រាប់ $n \geq 2$. គេមាន $D_n = \mathbf{N}$, និង

$P(n) : a_n < a_{n+1}$.

យើងចង់បញ្ជាក់ថាប្រសិនបើ x> 1 បន្ទាប់មកសម្រាប់ទាំងអស់ n, P (n) គឺជាការពិត។

- **មូលដ្ឋាន** $n = 1$.យើងពិភាក្សាអំពីករណីទាំងពីរ: $x > 1$ and $0 < x < 1$.
1.ឧបមាថា $0 < x < 1$. ក្នុងករណីនេះយើងដឹងថាកំណត់ហេតុនោះ $x < 0$. ពី $0 < x < 1$,យើងមាន កំណត់ហេតុ $x < x \cdot$ កំណត់ហេតុ x ។ វាដូចខាងក្រោម $x < x^x$.

2. $x > 1$,បន្ទាប់មកវាច្បាស់ហើយ $x < x^x$ ប្រសិនបើ $x > 1$.

ដូច្នេះក្នុងករណីទាំងពីរយើងមាន

$a_1 < a_2, P(1) =$ ពិត

- **សម្មតិកម្មអាំងតង់ស៊ីតេ** សន្មត P (i) គឺជាភាពពិតសម្រាប់ $i \in D_n$, មានន័យ $a_i < a_{i+1}$.
- **ជំហានដំបូង:** យើងចង់បញ្ជាក់ P (i + 1) ក៏ជាភាពពិតដែរ។ ដោយប្រើសម្មតិកម្មយើងមាន

$$a_i < a_{i+1} \Rightarrow x^{a_i} < x^{a_{i+1}} \qquad \text{ពីព្រោះ} x > 1$$
$$\Rightarrow P(i+1) = T.$$

ដូច្នេះវាគឺជាលំដាប់ដែលកើនឡើង។

ដំណោះស្រាយ21: ជាសំណុំនៃចំនួនគត់សេសវិជ្ជមានមានន័យថា D_n ={1, 3, 5 . . .}, និងរក

$P(n)$: $1 + 3^n$ អាចបែងចែកបានដោយ 4។

- **មូលដ្ឋាននៃវិសេសានុមាន:** n = 1 យើងជ្រើសរើសយក ១ ជាមូលដ្ឋានពីព្រោះ ១ គឺជាធាតុទីមួយនៅក្នុងដែនកំណត់។
- ជាក់ស្តែង ១ + ៣១ = ៤ ដែលអាចបែងចែកបាន ៤ ។ P (1) = T.

សម្មតិកម្មអាំងតង់ស៊ីតេ: សន្មត P (n) = T ,មានន័យថា, $1 + 3^n$ អាចបែងចែកបានដោយ 4. សំគាល់: n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ជំហានដំបូង: យើងចង់បញ្ជាក់ថា P (n +2) = T ,មានន័យយើងចង់បង្ហាញថា$1 + 3^{n+2}$ 2 អាចបែងចែកបានដោយ 4។

ចំណាំ យើងជ្រើសរើសយក n + 2 ជំនួស n + 1 ពីព្រោះ n + 2 គឺជាលេខសេសដែលនៅជាប់នឹង n ថេរក្នុងសម្មតិកម្មអាំងតង់ស៊ីតេចំណែក n + 1 មិនមែនជាធាតុនៅក្នុង D_n។

ពីសម្មតិកម្មខាងក្នុងយើងអាចសន្មតថា 1 + 3n = 4k, ដែល k

គឺជាលេខគត់។ យើងមាន
$$\begin{aligned} 1+3^{n+2} &= 1+9\cdot 3^n \\ &= (1+3^n)+8\cdot 3^n \\ &= 4k+8\cdot 3^n \\ &= 4(k+2\cdot 3^n). \end{aligned}$$

ពីព្រោះ k និង n ជាចំនួនគត់ $k + 2 \cdot 3^n$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់។ ដូច្នេះ$1 + 3^{n+2}$ អាចបែងចែកបានដោយលេខ ៤ P (n + 2) = T.ដូច្នេះ P (n) គឺជាភាពពិតសម្រាប់ n ទាំងអស់នៅក្នុងដែន។

ដំណោះស្រាយ22: ដែននៃបញ្ហានេះរាប់បញ្ចូលទាំងចំនួនគត់វិជ្ជមាននិងអវិជ្ជមាន។ មធ្យោបាយងាយស្រួលបំផុតគឺត្រូវបំបែកដែនជាពីរផ្នែកគឺចំនួនគត់វិជ្ជមាននិងចំនួនគត់អវិជ្ជមាន។ បន្ទាប់មកយើងបង្ហាញសេចក្តីថ្លែងការណ៍ដោយអាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យានៅក្នុងដែនវងទាំងពីរដាច់ដោយឡែកពីគ្នា។

(1) គេមាន D_n = {0, 1, 2, 3, . . .}រក

$$P(n) : 9 \mid (n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)$$

- **មូលដ្ឋាននៃវិសេសានុមាន** n = 0.

  $0^3 + 1^3 + 2^3 = 9.$

  P (0) គឺពិត.
- **សម្មតិកម្មអាំងតង់ស៊ីតេ** សន្មតថា $i \in D_n$, និង P (i) គឺពិត, i.e.,

  $i^3 + (i + 1)^3 + (i + 2)^3 = 9k,$
- **ជំហានដំបូង:** សន្មតថា $P(i + 1)$ គឺពិត។

$$\begin{aligned}(i+1)^3+(i+2)^3+(i+3)^3 &= (i+1)^3+(i+2)^3+i^3+9i^2+27i+27\\ &= (i^3+(i+1)^3+(i+2)^3)+9i^2+27i+27\\ &= 9k+9(i^2+3i+3)\\ &= 9(k+i^2+3i+3)\end{aligned}$$

ពីព្រោះ $k+i^2+3i+3$ ដូច្នេះជាចំនួនគត់$9|((i-1)^3+(i-2)^3+(i-3)^3)P(i-1)$ គឺពិត។

ដែនទាំងពីរបញ្ចូលគ្នាយើងមានថាផលបូកនៃគូបនៃចំនួនគត់បីជាប់គ្នាអាចបែងចែកបានដោយ ៩។

ដំណោះស្រាយ23: ដំបូងយើងបង្ហាញថាលក្ខខណ្ឌនេះត្រឹមត្រូវនៅក្នុងផ្នែកមិនអវិជ្ជមាននៃដែនកំណត់។ គេមាន $D_n=\{0\}\cup N$ និងកំណត់

$$P(n):(-1)^n=\begin{cases}-1, & \text{បើ } n \text{ ចំនួនសេស}\\ 1, & \text{បើ } n \text{ ចំនួនគូ}\end{cases}$$

យើងនឹងបង្ហាញថា $P(n)=T$ សម្រាប់$n\in D_n$។

- **មូលដ្ឋាននៃវិសេសានុមាន** $n=0$.

0 គឺគូហើយ $(-1)^0=1$. ដូច្នេះ $P(0)=T$ ។

- **សម្មតិកម្មអាំងតង់ស៊ីតេ** $n=i$.

$$(-1)^n=\begin{cases}-1 & \text{ប្រសិនបើ } n \text{ សេស។}\\ 1 & \text{ប្រសិនបើ } n \text{ គឺ}\end{cases}$$

- **ជំហាននៃអនុមាណរួម** $n=i+1$.

$(-1)^{i+1}=-1.(-1)^i=-1.1$ បើ i ជាចំនួនគូ

$(-1)^{i+1}=-1.(-1)^i=-1.-1$បើ i ជាចំនួនសេស

ដូច្នេះ $P(i+1)$ គឺពិត។

យើងបានបង្ហាញថាការទស្សន៍ទាយនេះគឺជាការពិតសម្រាប់ចំនួនគត់មិនមែនអវិជ្ជមាន។ យើងអាចប្រើបច្ចេកទេសដូចគ្នាដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងបញ្ហាមុនពេលគឺយើងអាចបញ្ជាក់បន្ថែមទៀតថាលក្ខខណ្ឌ នេះត្រឹមត្រូវសម្រាប់ផ្នែកផ្សេងទៀតនៃដែន (លេខអវិជ្ជមាន) ។ ឬយើងអាចប្រើលទ្ធផលដែលយើងទើបតែទទួលបាននិងអាគុយម៉ង់ខាងក្រោម។ពីលទ្ធផលដែលបានបង្ហាញខាងលើប្រសិនបើ n ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមានយើងដឹងថា 2n គឺសូម្បីតែនិង $\left(-\frac{1}{2n}\right).2n=1$ ។ សង្កេតការពិតដូចខាងក្រោម:ប្រសិនបើ $n\in N$ បន្ទាប់មក

$$(-1)^{-n} = \frac{1}{(-1)} = \frac{(-1)^{2n}}{(-1)^{n}} = (-1)^{n}$$

ហេតុដូច្នេះហើយយើងអាចអះអាងបានថាសំរាប់អាយហ្សិចទាំងអស់ P (i) តែងតែជាការពិត។

នោះបង្ហាញពីទ្រឹស្តីបទខាងក្រោមនេះជាការសម្រាយបញ្ជាក់មួយទៀតសម្រាប់លំហាត់ខាងលើ។ វាមានលក្ខណៈផ្គងបន្តិចប៉ុន្តែវាបង្ហាញពីរបៀបរៀបចំដែនកំណត់ឡើងវិញដូច្នេះយើងអាចពិនិត្យមើលដែនទាំងមូលដោយមិនបាត់បង់ធាតុរបស់វាឡើយ។ តោះពិចារណាលំដាប់លំដោយដូចខាងក្រោមៈ

Z : 0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, 4, −4, . . .

វាច្បាស់ណាស់ថាលេខណាមួយនៅក្នុង Z ត្រូវតែស្ថិតនៅក្នុងលំដាប់ Z នៅកន្លែងណាមួយ។ គេមាន Z_i សូមបញ្ជាក់ i^{th} លេខនៅក្នុងZ,ពេលដែល i ≥ 1. គេមាន Dn = N. រក

$P(n):(-1)^{z_n} = 1$ បើ z_n ជាចំនួនគូ

$P(n):(-1)^{z_n} = -1$ បើ z_n ជាចំនួនសេស

ដូច្នេះលំហាត់ខាងលើរបស់យើងអាចត្រូវបានគេមើលឃើញថា:

បញ្ជាក់ថា $n \in D_n$, P (n) គឺពិត

- **មូលដ្ឋាន** n = 1.

z_1 = 0 ដូច្នេះ z_1 គឺជាគូនិង $(-1)^0 = 1$. ដូច្នេះ P (1) = T ។

- **សម្មតិកម្មអាំងតង់ស៊ីតេ** n = i.

ឧបមា P (i) = T , i.e.

$(-1)^{z_n} = 1$ បើ z_n ជាចំនួនគូ

$(-1)^{z_n} = -1$ បើ z_n ជាចំនួនសេស

- **ជំហានដំបូង:** n = i + 1.

មានតែតម្លៃពីរដែលអាចធ្វើបានសម្រាប់ z_{i+1} នៅក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃz_i, i.e., .$z_{i+1} = -z_i$ ប្រសិនបើ z_i គឺវិជ្ជមាន ឬ $z_{i+1} = -z_i + 1$

គឺអវិជ្ជមាន។យើងនឹងពិភាក្សាលំហាត់នេះដោយករណី។

ករណី 1: $z_{i+1} = -z_i$.

$(-1)^{z_i+1} = (-1)^{-z_i} = \frac{-1}{(-1)^{z_i}} = \frac{1}{1} = 1$ បើ z_i ជាចំនួនគូ

$(-1)^{z_i+1} = (-1)^{-z_i} = \frac{-1}{(-1)^{z_i}} = \frac{1}{-1} = -1$ បើ z_i ជាចំនួនសេស

ពី Z យើងដឹងថាក្នុងករណីនេះប្រសិនបើ z_i គឺ បន្ទាប់មក z_{i+1} គឺសូម្បីតែហើយប្រសិនបើហ្សី Z សេសនោះ Z +1 គឺសេស។

ដូច្នេះ

$(-1)^{z_{i+1}} = 1$ បើ z_{i+1} ជាចំនួនគូ

$(-1)^{z_{i+1}} = -1$ បើ z_{i+1} ជាចំនួនសេស

ករណី2: $z_{i+1} = -z_i + 1$.

$(-1)^{z_{i+1}} = (-1)^{-z_i+1} = \frac{-1}{(-1)^{z_i}} = \frac{-1}{1} = -1$ បើ z_i ជាចំនួនគូ

$(-1)^{z_{i+1}} = (-1)^{-z_i+1} = \frac{-1}{(-1)^{z_i}} = \frac{-1}{-1} = 1$ បើ z_i ជាចំនួនសេស

ពី Z យើងដឹងថាក្នុងករណីនេះប្រសិនបើ Z គឺសូម្បីតែ, បន្ទាប់មកអាយ Z +1 គឺសេសហើយប្រសិនបើ Z សេសនោះ $Z+1$ គឺស្មើ។

ដូច្នេះ

$(-1)^{z_{i+1}} = 1$ បើ z_{i+1} ជាចំនួនគូ

$(-1)^{z_{i+1}} = -1$ បើ z_{i+1} ជាចំនួនសេស

ក្នុងករណីទាំងពីរ P (i + 1) គឺជាការពិតនេះបង្ហាញពីលំហាត់។

ដំណោះស្រាយ24 នេះបង្ហាញពីបញ្ហា។ យើងអាចសរសេរឡើងវិញនូវទំនាក់ទំនងដែលកើតឡើង ជាមុនៈ

$$\forall n \geq 1,\ c(n+2) = 3c(n+1) - 3c(n) + c(n-1)$$
$$\Rightarrow \forall n \geq 3,\ c(n) = 3c(n-1) - 3c(n-2) + c(n-3).$$

គេមាន c(0) = c(1) = 1, និង c(2) = 3។

- **មូលដ្ឋាននៃវិសេសានុមាន** n = 0,1,2

  ដើម្បីបញ្ជាក់ថា $n \geq 0$, $c(n) = n^2 - n + 1$, let $D_n = \mathbf{N}^0$, និងកំណត់

$$P(n) : c(n) = n^2 - n + 1.$$

$$c(0) = 0 - 0 + 1 = 1.$$
$$c(1) = 1 - 1 + 1 = 1.$$
$$c(2) = 4 - 2 + 1 = 3.$$

ដូច្នេះ P (0) = P (1) = P (2) = T .

- **សម្មតិកម្មអាំងតង់ស៊ីតេ** សន្មតថាសម្រាប់ថេរ $n \in D_n$, ប្រសិនបើ $0 \le i \le n$,
- នោះនាំឱ្យ P (i) = T , i.e.,$c(i) = i^2 - i + 1$.

នេះគឺជាសម្មតិកម្ម

- **ជំហានជំបូង:** បង្ហាញថា P (n + 1) = T .ដើម្បីគណនាតម្លៃនៃ c (n + 1) យើងអាចប្រើតម្លៃនៃ c (n), c (n – 1) និង c (n - 2) ដែលបានផ្តល់នៅក្នុងសម្មតិកម្មអាំងតង់ស៊ីតេព្រោះអាគុយម៉ង់ n n - 1, និង n - 2 ស្ថិតនៅក្នុងដែននៃសម្មតិកម្មអាំងតង់ស៊ីតេ។ យើងមាន

$$c(n) = n^2 - n + 1,$$
$$c(n-1) = (n-1)^2 - (n-1) + 1,$$
$$c(n-2) = (n-2)^2 - (n-2) + 1.$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}
&c(n+1)\\
&= 3c(n) - 3c(n-1) + c(n-2)\\
&= 3(n^2 - n + 1) - 3((n-1)^2 - (n-1) + 1) + (n-2)^2 - (n-2) + 1\\
&= 3n^2 - 3n + 3 - 3n^2 + 9n - 9 + n^2 - 5n + 7\\
&= n^2 + n + 1\\
&= (n^2 + 2n + 1) - (n+1) + 1\\
&= (n+1)^2 - (n+1) + 1.
\end{aligned}$$

យើងមានលទ្ធផលខាងលើដោយប្រើនិយមន័យនៃ c (n + 1) និងសម្មតិកម្មហើយលទ្ធផលយល់ព្រមតាមរូបមន្តបិទជិតដែលបានផ្តល់សម្រាប់ c (n + 1) ។នេះបញ្ចប់ការសម្រាយបញ្ជាក់។

ដំណោះស្រាយ25: សូមប្រយ័ត្នក្នុងការកែសម្រួលដែន n ដូចដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងឯកសាបន្ទាប់

$$\begin{aligned}
&\forall n \ge 0[b(n+2) + 2b(n+1) + b(n) = 0]\\
&\equiv \forall n \ge 0[b(n+2) = -2b(n+1) - b(n)]\\
&\equiv \forall n \ge 2[b(n) = -2b(n-1) - b(n-2)].
\end{aligned}$$

នោះហើយជាមូលហេតុដែលលំហាត់នេះត្រូវបញ្ជាក់ថា b(n)ត្រូវបានកំណត់ដោយសមីការបន្ទាប់ពីតំលៃពីរដំបូង។ សូមប្រៀបធៀបលំហាត់នេះទៅនឹងលេខ 77 មុន។

រក $b(0) = b(1) = 1$. Let $D_n = \mathbf{N}^0$ and

$$P(n) : b(n) = (1 - 2n)(-1)^n.$$

- **មូលដ្ឋាននៃវិសេសានុមាន** n = 0, និង n = 1. យើងត្រូវយក P (0) និង P (1) ធ្វើជាមូលដ្ឋានរបស់យើងពីព្រោះទាំង b (–1) និង b (–2) មិនត្រូវបានកំណត់ហើយហេតុដូចនេះ b (0) និង b (1) មិនអាច

ទទួលបានដោយប្រើទ ។សមីការ $b(n) = -2b(n-1) - b(n-2)$ ក្នុងជំហាននេះ។ [ហេតុផល សម្រាប់លំហាត់បន្ទាប់

$$b(0) = 1 = (1-0)(-1)^0.$$
$$b(1) = 1 = (1-2)(-1)^1.$$

$P(0) = P(1) = T.$

- **សម្មតិកម្មអាំងតង់ស៊ីតេ** Let $i \in D_n$, និង $1 \leq i$.
  ឧបមាប្រសិនបើ $n \leq i$, បន្ទាប់មក $P(n) = T$, i.e.,

  $\forall n \in D_n, (n \leq i) \Rightarrow (b(n) = (1-2n)(-1)^n).$

- **ជំហានដំបូង:** គេមាន $n = i + 1$.

$$\begin{aligned}
b(n) &= b(i+1) \\
&= -2b((i+1)-1) - b((i+1)-2) \\
&= -2b(i) - b(i-1) \\
&= -2(1-2i)(-1)^i - (1-2(i-1))(-1)^{i-1} \\
&= -2(1-2i)(-1)^i - (3-2i)(-1)^{i-1} \\
&= (-1)^{i-1}(-2(1-2i)(-1) - (3-2i)) \\
&= (-1)^{i-1}(-1-2i) \\
&= (-1)^2(-1)^{i-1}(1-2-2i) \\
&= (1-2(i+1))(-1)^{i+1} \\
&= (1-2n)(-1)^n.
\end{aligned}$$

យើងអាចសួរថាហេតុអ្វីយើងមិនកំណត់ $b(n)$ ដូចនេះ

$\forall n \geq 0[b(n) = -b(n+2) - 2b(n+1)]$

ដោយប្រើសមីការដែលបានផ្តល់ឱ្យដោយផ្ទាល់ដោយមិនចាំបាច់លៃតម្រូវដែន n ។ តើយើងអាចកំណត់មុខងារផ្អែកលើតម្លៃអនាគតរបស់វាជំនួសឱ្យតម្លៃមុនរបស់វាទេ ? តាមទ្រឹស្តីចម្លើយគឺថាមែនប៉ុន្តែវាហួសពីវិសាលភាពនៃការចាប់អារម្មណ៍របស់យើងក្នុងការប្រើប្រាស់អាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យា។

$P(i+1) = T.$

ដូច្នេះ $\forall n \in D_n$, $P(n)$ គឺពិត។

ដំណោះស្រាយ26៖ រកb$(0) = 1$, $b(1) = -3$. គេមាន $D_n = \mathbf{N}^0$,

និង$P(n) : b(n) = (1+2n)(-1)^n$។

- **មូលដ្ឋាននៃវិសេសានុមាន** $n = 0$, និង $n = 1$

$b(0) = 1 = (1+0)(-1)^0.$

$b(1) = -3 = (1+2)(-1)^1.$

$P(0) = P(1) = T.$

- **សម្មតិកម្មអាំងតង់ស៊ីតេ** គេមាន $i \in D_n$, និង $1 \le i$.ឧបមាប្រសិនបើ $n \le i$, បន្ទាប់មក$P(n) = T$, i.e. $\forall n \in D_n, (n \le i) \Rightarrow (b(n) = (1+2n)(-1)^n)$.
- **ជំហានជំបូង:** គេមាន $n = i + 1$.

$$\begin{aligned} b(n) &= b(i+1) \\ &= -2b((i+1)-1) - b((i+1)-2) \\ &= -2b(i) - b(i-1) \\ &= -2(1+2i)(-1)^i - (1+2(i-1))(-1)^{i-1} \\ &= -2(1+2i)(-1)^i - (2i-1)(-1)^{i-1} \\ &= (-1)^{i-1}(-2(1+2i)(-1) - (2i-1)) \\ &= (-1)^{i-1}(3+2i) \\ &= (-1)^2(-1)^{i-1}(1+2+2i) \\ &= (1+2(i+1))(-1)^{i+1} \\ &= (1+2n)(-1)^n. \end{aligned}$$

$$P(i+1) = T.$$

ដូច្នេះ $\forall n \in D_n$, $P(n)$ គឺពិត។

ដំណោះស្រាយ27: គេមាន $f_0 = 0,\ f_1 = 1,$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, សម្រាប់ $n \ge 2$.

យើងចង់បង្ហាញថា $n \ge 0$,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

- **មូលដ្ឋាននៃវិសានុមាន** $n = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 \right) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \times (1-1) \\ &= 0 = f_0. \end{aligned}$$

$n = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} \right) \\ &= 1 = f_1 \end{aligned}$$

- **សម្មតិកម្មអាំងតង់ស៊ីតេ** ក្នុងលក្ខណៈសាមញ្ញខាងក្រោមនេះយើងបញ្ចូលពាក្យវិជ្ជមាននិងពាក្យអវិជ្ជមានពីរ និងប្រើ

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ \text{and}\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= f_n + f_{n-1}\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)+\tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\times\left[\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\times\left[\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\times\left(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\times\left(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right]\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\times\left[\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\times\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\times\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\times\left[\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]
\end{aligned}$$

- **ដំណោះស្រាយ28** បញ្ជាក់ដោយការណែនាំថាចំនួនសរុបនៃសំណុំរងមានជាតុពីរយ៉ាងពិតប្រាកដនៅក្នុង សំណុំនៃជាតុ n គឺ n (n – 1) / 2 ។

វាច្បាស់ណាស់ថាប្រសិនបើ A ជាសំណុំនៃជាតុ ២ ជាតុរងតែមួយនៃជាតុ A ដែលមានជាតុពីរគឺខ្លួនវាផ្ទាល់។ ហើយចាប់តាំងពី 1 = 2 (2–1) / 2 មូលដ្ឋានទទួលបាន

ឧបមាថាយើងមានសំណុំ A ជាមួយជាតុហើយគេមាន n ≥ 2 ។ ហើយឧបមាថាយើងដឹងរួចហើយដោយសម្មតិកម្មថាមាន n (n – 1) / 2 សំណុំរងជាច្រើននៃ A ដែលមាន 2 ជាតុ។ ឥលូវនេះយើងបន្ថែមជាតុថ្មីទៅក្នុងកហើយពិនិត្យមើលសំណុំ ដែលមានជាតុ ២ ? ដែលមានជាតុ ២ បូកនឹងរាល់ផ្នែករងនៃ singleton នៃសហជីពចាស់ដែលមាន {a} ។ តាមមើលទៅអាចាស់មានអក្សរតូចធំមានស៊ីលីពីន។ ដូច្នេះអាថ្មីមាន (n (n – 1) / 2 + n) - មីងរងដែលមានជាតុ ២ ដែលទំហំថ្មីនៃអេគឺ n + 1 ។ និង

$$\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{(n+1)n}{2}.$$

នេះបង្ហាញពីជំហានខាងក្នុងនិងបំពេញការសម្រាយបញ្ជាក់នៃលំហាត់នេះ។

គេក៏ប្រហែលជាចង់មានទំនាក់ទំនងកើតឡើងដដែលយោងទៅតាមការពិភាក្សាខាងលើនិងបង្ហាញលទ្ធផលដោយការបង្កើតជាផ្លូវការ។ ខាងក្រោមនេះជាភស្តុតាង។

តាង t (n) ជាចំនួនសំណុំរងដែលមានជាតុ ២ នៃសំណុំជាមួយជាតុ n ។ តាមពិតទៅ t (0) = 0 ប្រសិនបើ n ≥ 1 យើងអាចហៅបានដដែលៗដូចខាងក្រោម។ សម្រាប់n≥1,

$$t(n) = t(n-1)+(n-1).$$

ឥឡូវសូមបង្ហាញការអះអាងនោះ $n \ge 0$, $t(n) = n(n-1)/2$. រក $D_n = N_0$, និង

$$P(n) \ : \ t(n) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

- **មូលដ្ឋាននៃវិសេសានុមាន** $n = 0$.

$$t(0) = 0 = \frac{1}{2} \times 0 \times (0-1).$$

ដូច្នេះ, $P(0) = T$.

- **សម្មតិកម្មអាំងតង់ស៊ីតេ** គេមាន $i \in D_n$.

ឧបមាប្រសិនបើ $n \le i$, បន្ទាប់មក $P(n) = T$,មានន័យថា៖

$$t(n) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

- **ជំហាននៃអនុមាណរួម** គេមាន $n = i+1$.

$$\begin{aligned} t(n) &= t(i+1) = t(i) + i \\ &= \frac{1}{2}i(i-1) + i = \frac{1}{2}i(i-1+2) \\ &= \frac{1}{2}(i+1)((i+1)-1) = \frac{1}{2}n(n-1). \end{aligned}$$

$P(i+1) = T$.

ដូច្នេះ សម្រាប់សំណុំណាមួយដែលមានធាតុ n សំណុំមាន $n(n-1)/2$- សំណុំរងជាច្រើនមានធាតុពិត ២ ។

ដំណោះស្រាយ29: បង្ហាញដោយការណែនាំថាសំរាប់ចំនួនគត់ $n \ge 2$ សំណុំនៃចំនុចប្រសព្វទាំងអស់នៃបន្ទាត់ n ខុសគ្នានៅមានច្រើនជាង $n(n-1)/២$ ជាតុ។ ផ្តល់ឧទាហរណ៍ដែលបង្ហាញយ៉ាងច្បាស់ថាមានច្រើនហើយតិចជាងនេះផង។ឧបមាថាយើងមានបន្ទាត់ n រួចហើយនៅមានចំនួនចំនុចប្រសព្វអតិបរមា។ ប្រសិនបើយើងគូរបន្ទាត់ថ្មីនៅលើយន្តហោះយើងមិនអាចណែនាំច្រើនជាងចំនុចប្រសព្វថ្មីទេ។ ដូច្នេះ ប្រសិនបើ $p(n)$ ជាចំនួនអតិបរមានៃចំនុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់ដាច់ ៗ គ្នា n ទំនាក់ទំនងនឹងកើតឡើងដដែល $p(n) = p(n-1)+(n-1)$។នេះពិតជាដូចគ្នានឹងទំនាក់ទំនងកើតឡើង ដដែលៗនៅក្នុងលំហាត់មុនដែរ។ យើងរំលងការសម្រាយនៅទីនេះ។

ដំណោះស្រាយ30: រក$P(n)$ សម្រាប់$n \ge 1$

$P(n) : 1 \le x_n \le \sqrt{n}$.

- **មូលដ្ឋាននៃវិសេសានុមាន** $n = 1$. $x1 = 1$, និង$1 \le x_1 \le \sqrt{1}$.
- **ជំហាន Inductive** បង្ហាញថា $P(n+1)$ គឺពិត។

ពីសម្មតិកម្មយើងដឹងថា $1 \le x_n \le \sqrt{n}$.

$$1 \le x_n \le \sqrt{n} \Rightarrow 1 \le x_n^2 \le n$$
$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{x_n^2} \le x_n^2 + \frac{1}{x_n^2} \le n + \frac{1}{x_n^2}.$$

ពីព្រោះ $1 \le x_n^2 \Rightarrow \frac{1}{x_n^2} \le 1$, $\quad 1 \le 1 + \frac{1}{x_n^2}$ and $n + \frac{1}{x_n^2} \le n + 1$.

ដូច្នេះ

$$1 \le 1 + \frac{1}{x_n^2} \le x_n^2 + \frac{1}{x_n^2} \le n + \frac{1}{x_n^2} \le n+1$$
$$\Rightarrow 1 \le x_n^2 + \frac{1}{x_n^2} \le n+1$$
$$\Rightarrow 1 \le x_{n+1}^2 \le n+1$$
$$\Rightarrow 1 \le x_{n+1} \le \sqrt{n+1}.$$

P (n + 1) គឺពិត

វិធីសាស្ត្រទី២ មានវិធីមួយទៀតដើម្បីបង្ហាញពីជំហានបង្កើតថ្មី។

- **ជំហានដំបូង:** បង្ហាញថា P(n+1) គឺពិត។

ពីសម្មតិកម្មដែលយើងដឹង $1 \le x_n \le \sqrt{n}$, និង $1\ \sqrt{n} \le 1\ x_n \le 1$

$$1 \le x_n^2 \le n \qquad (3.11)$$
$$\frac{1}{n} \le \frac{1}{x_n^2} \le 1 \qquad (3.12)$$

ដោយបន្ថែម (3.11) និង (3.12) យើងទទួលបាន $$1 + \frac{1}{n} \le x_n^2 + \frac{1}{x_n^2} \le n + 1.$$

ពីព្រោះ $1 \le 1 + \frac{1}{n}$, យើងមាន

$$1 \le x_n^2 + \frac{1}{x_n^2} \le n+1$$
$$\Rightarrow 1 \le x_n^2 + \frac{1}{x_n^2} \le n+1$$
$$\Rightarrow 1 \le x_{n+1}^2 \le n+1$$
$$\Rightarrow 1 \le x_{n+1} \le \sqrt{n+1}.$$

P(n+1)គឺពិត

ដំណោះស្រាយ31

មូលដ្ឋាននៃវិសេសានុមាន n = 0.

$$H_{2^n} = H_1 = \sum_{1\le i\le 1} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} \ge 1 + \frac{0}{2}.$$

$$H_{2^n} \geq \left(1+\frac{n}{2}\right).$$

សម្មតិកម្មអវត្តមាន សន្មត

ជំហាននៃអនុមាណរួម

$$\begin{aligned}
H_{2^{n+1}} &= H_{2\cdot 2^n} \\
&= \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^n+2^n} \\
&= H_{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^n+2^n} \\
&\geq 1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^n+2^n} \\
&\geq 1+\frac{n}{2}+\overbrace{\frac{1}{2^n+2^n}+\frac{1}{2^n+2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n+2^n}}^{2^n} \\
&= 1+\frac{n}{2}+\frac{2^n}{2^n+2^n} \\
&= 1+\frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $n \geq 0,\ H_{2^n} \geq \left(1+\frac{n}{2}\right).$

- **ដំណោះស្រាយ32:** គេមាន A* កំណត់សំណុំនៃខ្សែដែលអាចធ្វើបានទាំងអស់ពី A,ដែល A* ។ តាង μ ជួរ A* ហើយទុក | μ | តាងប្រវែង μ ។ យើងនឹងបង្ហាញទ្រឹស្តីបទដោយអាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យាលើប្រវែងនៃខ្សែអក្សរ។ សូមឱ្យយើងជាដំបូងដែននិងព្យាករណ៍ P (n) ។

$$\begin{aligned}
D_n &: \{0,1,2,3,\ldots\}, \\
P(n) &: \forall \mu \in A^*, [(|\mu| = n) \Rightarrow (\mu \in S \leftrightarrow \mu \text{ is a } \textit{palindrome})].
\end{aligned}$$

- **មូលដ្ឋាននៃវិសេសានុមាន** n = 0 និង n = 1.
ដោយឯកភាពរបស់ S, λ ∈ S,និងដោយភាពខុសគ្នានៃការដូច្នេះ P(0) = T.។
ប្រសិនបើ |μ| = 1បន្ទាប់មកតាមក្បួនលេខ ២ រាល់តួអក្សរដែលមាននៅក្នុងអក្សរ A គឺស្ថិតនៅក្នុង P ហើយវាក៏ជាកញ្ចក់នៅលើកញ្ចក់ផងដែរ A. P(1) = T.
- **សម្មតិកម្មអវិជ្ជមាន** យើងមាន $i \in D_n$, និង 1≤i.
ឧបមាប្រសិនបើ n≤i, ហើយ P(n) = T, មានន័យថា

$$\forall \mu \in A^*, [(|\mu| \leq i) \Rightarrow (\mu \in S \leftrightarrow \mu \text{ is a } \textit{palindrome})].$$

- **ជំហានដំបូង:** គេមាន n = i + 1. ដោយសារតែយើងសន្មតថា 1 ≤ខ្ញុំនៅក្នុងសម្មតិកម្មយើងមាន 2 ≤ n ។ នេះនឹងធ្វើឱ្យការពិភាក្សារបស់យើងមានភាពសាមញ្ញពីព្រោះដូចដែលអ្នកនឹងឃើញយើងមិនចាំបាច់ពិចារណាលើវិធាន ១ និង ២ នៅក្នុងជំហាននៃជំហានដំបូងឡើយ។ សូមកត់សម្គាល់ថានេះគឺត្រឹមត្រូវពីព្រោះករណីនៅពេលដែល n = 0 និង n = 1 ត្រូវបានបង្ហាញជាមូលដ្ឋាន។
គេមាន $\mu \in A^*$ និង |μ|= i+1.

1. ប្រសិនបើ$\mu \in S$, ហើយ μត្រូវបំពេញតាមវិធាន ៣. វិធាន ១ និង ២ ត្រូវបានបដិសេធព្រោះ $2 \le |\mu|$. ដូច្នេះ μ ត្រូវតែជាខ្សែដូចជា a∈Aនិង $\nu \in S$.យើងក៏ដឹងថា $|\nu| = i-1$ និងដោយសម្មតិកម្ម $\nu \in S$ ប្រសិនបើហើយមានតែក្នុងករណីដែលνជាក្រាហ្វិចប៉ុណ្ណោះ។ដូច្នេះ ν គឺជាក្រាមីញ៉ូមនៅលើអេហើយ A.ក៏ជាក្រាមីញ៉ូមនៅលើ A.។ ដូច្នេះ$\mu \in S \rightarrow \mu$ លក្ខណៈឆ្លុះ។
2.ប្រសិនបើ μគឺជាបានបញ្ជាក់នៅលើ A និង $2 \le |\mu|$, μ ត្រូវតែជាខ្សែអក្សរដូច ava, ពេលដែល $a \in A$ និង ν គឺជាកញ្ចក់នៅលើអេ។ ចាប់តាំងពី $|\nu| = i-1$, និងដោយសម្មតិកម្មអាំងតង់ស៊ីតេខ្លាំង$\nu \in S$ ប្រសិនបើនិងមានតែប្រសិនបើνជាក្រាហ្វិច។ ដូច្នេះ$\nu \in S$ហើយតាមច្បាប់ ៣ a។ ដូច្នេះ μលក្ខណៈឆ្លុះ$\rightarrow \mu \in S$.នោះនាំឱ្យ $P(i+1) = T$។
សម្រាប់ប្រវែងណាមួយ n, $P(n)$ គឺពិតដែលមានន័យថា S គឺជាសំណុំនៃក្រាំងដូងលើA.។

សម្គាល់: ភស្តុតាងដែលបានផ្តល់ជូនខាងលើប្រើទម្រង់ដើមនៃអាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យា។

យើងមិនទាន់បានឃើញរចនាសម្ព័ន្ធនៅឡើយទេ។ សូមប្រៀបធៀបការសម្រាយបញ្ជាក់ ខាងក្រោមជាមួយសម្រាយបញ្ជាក់ មុន។ យើងនឹងឃើញថាមពលពេញលេញនៃការបង្កើតរចនាសម្ព័ន្ធនៅក្នុងលំហាត់ពីរចុងក្រោយនៃជំពូកនេះ។

វិធីសាស្ត្រ2 ការបញ្ចូលរចនាសម្ព័ន្ធ

Ds : $A*$

$P(s)$: ($s \in S \leftrightarrow s$ លក្ខណៈឆ្លុះ)។

- **មូលដ្ឋាននៃវិសេសានុមាន** ដោយគោលការណ៍ S និង $\lambda \in S$និង ប្រសិនបើ គឺជាក្រាមីញ៉ូមីរ។ ដូច្នេះ $P(\lambda) = T$.
- **សម្មតិកម្មអវិជ្ជាមាន** គេមាន $s \in A*$, និងសន្មត់ $P(s) = T$, i.e.,

$s \in S \leftrightarrow s$លក្ខណៈឆ្លុះ។
- **ជំហានដំបូង:** ភារកិច្ចរបស់យើងគឺបង្ហាញសម្រាយបញ្ជាក់។

asa$\in S \leftrightarrow$ asa លក្ខណៈឆ្លុះ។
យើងមានពីរករណី s: (1) $s \in S$, និង (2) s6∈S.
ករណីទី ១ $s \in S$. By ដោយឯកភាពរបស់ប្រសិនបើ S, asa ∈S ដោយសម្មតិកម្ម s គឺជាក្រាមីញ៉ូមហេតុដូចនេះហើយ asa ក៏ជាក្រេឌីនផងដែរ។ ដូច្នេះ
[asa∈S → asa លក្ខណៈឆ្លុះ] = T.

ករណីទី 2 s 6∈ Sដោយឯកភាពរបស់ S, asa 6∈ S. តាមសម្មតិកម្ម S មិនមែនជាកញ្ចក់ទេហេតុដូចនេះ a sa មិនមែនជាក្រាមីញ៉ូមទេ។ ដូច្នេះ

[asa6∈S → asaមិនមានលក្ខណៈឆ្លុះ] = T.

ដោយភាពផ្ទុយគ្នាយើងមាន

[asa លក្ខណៈឆ្លុះ → asa∈S] = T

យើងរួមគ្នា asa∈S ↔ asa គឺជាក្រាមីញ៉ូមីរ

ដូច្នេះសម្រាប់ខ្សែអក្សរណាមួយs, s∈S ប្រសិនបើនិងតែប្រសិនបើ s ជាកញ្ចក់មួយ។

ដំណោះស្រាយ33: គេមាន Ds = S,និងអថេរពីរអថេរព្យាករណ៍ P(μ,ν)នៃμ,ν ∈S

$$P(\mu,\nu) : R(\mu\nu) = R(\nu)R(\mu).$$

- **មូលដ្ឋានវិសេសានុមាន** μ = a, និង μ = b

សំរាប់μ = a, let ν ∈S..យើងមាន

$R(\mu\nu) = R(a\nu) = R(\nu)a = R(\nu)R(a) = R(\nu)R(\mu)$.

ដូចគ្នានឹងμ = bដូច្នេះν ∈S, P(a,ν) = T និង P(b,ν) = T.

- **សម្មតិកម្មអវិជ្ជាមាន** គេមានμ,ν ∈ S សន្មតថា

    ξ ∈ S, P(μ,ξ) = P(ν,ξ) = T, i.e.,

- **ជំហានដំបូង:** ភារកិច្ចរបស់យើងគឺដើម្បីបង្ហាញថា ξ ∈ S, P(μν,ξ) គឺពិត , i.e., R(μνξ) = R(ξ)R(μν). គេមាន ξ ∈S,

$$\begin{aligned}
R(\mu\nu\xi) &= R(\mu(\nu\xi)) \\
&= R(\nu\xi)R(\mu) && [\textbf{by IH}] \\
&= R(\xi)R(\nu)R(\mu) && [\textbf{by IH}] \\
&= R(\xi)(R(\nu)R(\mu)) \\
&= R(\xi)R(\mu\nu) && [\textbf{by IH}]
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ μ,ν ∈S, R(μν) = R(ν)R(μ).

ដំណោះស្រាយ34: យើងមាន Ds = S និង កំណត់ទុកជាមុន P(μ) សម្រាប់ μ∈S,

$P(\mu) : R(R(\mu)) = \mu$.

យើងនឹងប្រើលទ្ធផលដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងលំហាត់មុន: សម្រាប់ μ,ν ∈S,

$R(\mu\nu) = R(\nu)R(\mu)$.

- **មូលដ្ឋាននៃអនុមាណ** μ = a, និង μ = b វាច្បាស់ជា P(a) = P(b) = T,

$R(R(a)) = R(a) = a$, and $R(R(b)) = R(b) = b$.

- **សម្មតិកម្មអវិជ្ជាមាន** μ,ν ∈S.សន្មតថា

$R(R(\mu)) = \mu$, and $R(R(\nu)) = \nu$.

- **ជំហាននៃអនុមាណរួម** យើងចង់បញ្ជាក់ពី R(R(μν)) = μν

$$\begin{aligned} R(R(\mu\nu)) &= R(R(\nu)R(\mu)) && \text{by (3.13)} \\ &= R(R(\mu))R(R(\nu)) && \text{by (3.13)} \\ &= \mu\nu && [\textbf{by IH}] \end{aligned}$$

ដូច្នេះ μ∈S, R(R(μ)) = μ.

ដំណោះស្រាយ35: យើងនឹងបង្ហាញពីបញ្ហានេះដោយអាំងតេក្រាលគណិតវិទ្យាតាមលំដាប់។ ដើម្បីភាពងាយស្រួលα (ω) បង្ហាញពីចំនួននៃលេខ in និងβ (ω) ចំនួននៃខ in ។ យើងនឹងបង្ហាញថាសម្រាប់ពាល់ω∈A, α (ω) = β (ω) ។

- **មូលដ្ឋាននៃ** ω = Λ. ប្រសិនបើវាពិតជា α(ω) = β(ω) = 0.
- **សម្មតិកម្មអវិជ្ជាមាន** គេមាន μ,ν ∈ A, និង α(μ) = β(μ) = m, និង α(ω) = β(ω) = n.
- **ជំហានដំបូង:** **By rule 2:** $\omega = a\mu b$. Clearly, $\alpha(\omega) = \beta(\omega) = m + 1$.
  By rule 3: $\omega = \mu\nu$. Thus, $\alpha(\omega) = \alpha(\mu\nu) = m + n$ and $\beta(\omega) = \beta(\mu\nu) = m + n$.

α(ω) = β(ω) ក្នុងករណីទាំងអស់។

ដូច្នេះ , បើ *ω ∈A*, នោះនាំឱ្យ *α*(*ω*) = *β*(*ω*) *។*

- **ដំណោះស្រាយ36:** ដូចនឹងលំហាត់មុនដែរទុកα (ω) បញ្ជាក់ចំនួនលេខនៅខាងក្នុង និងβ (ω) ចំនួននៃb′ នៅខាង ω។ យើងនឹងបង្ហាញថាប្រសិនបើω∈Aបន្ទាប់មកសម្រាប់ any x σនៃωយើងមានα (σ) ≥β (σ) ។
- **មូលដ្ឋាននៃវិសេសានុមាន** ω = Λ។ តែមួយគត់មុន នៃ x ΛគឺΛខ្លួនវា។ វាពិតជាថាα (ω) = β (ω) = 0 ដូច្នេះមូលដ្ឋានខាងក្នុងមាន។
  - **សម្មតិកម្មអវត្តមាន** ជំនួស μ ν∈Aនិងសន្មតថាសំរាប់ ណាមួយប្រសិនបើσជាចំនួន x មុននៃ μ ឬνនោះα (σ) ≥β (σ) ។
  - **ជំហានដំបូង:**

តាមវិធាន ២ យើងទទួលបានខ្សែអក្សរថ្មីω = aμb ។ ដោយសារមុននៃ x យើងមានករណីដូចខាងក្រោម។

1.σ = Λ. ក្នុងករណីនេះα(σ)≥β(σ).

2. σ = aσ0, ពេលដែល σ0 គឺនៃ μ. ដូច្នេះ, α(σ) = α(aσ0) = α(σ0)+ 1 និង β(σ) = β(aσ0) = β(σ0). ដោយសម្មតិកម្មខាងក្នុង, α(σ0)≥β(σ0). ដូច្នេះ, α(σ0)+1≥β(σ0), ហេតុដូចនេះហើយ α(σ)≥β(σ).។

3. σ = ω = a μ b. ក្នុងករណីនេះα(σ) = α(μ)+1 និង β(σ) = β(μ)+1. ដោយសម្មតិកម្មខាងក្នុង, α(μ)≥β(μ). ដូច្នេះ, α(σ)≥β(σ)។

តាមវិធាន 3 យើងទទួលបានខ្សែអក្សរថ្មីω = μν ។ ដោយសារមុននៃ x យើងមានករណីដូចខាងក្រោម៖

1. σ គឺមុន x នៃμដោយសម្មតិកម្មខាងក្នុង, α(σ)≥β(σ)។

2. $\sigma = \mu\xi$, ដែលξជាមុន ក x នៃv។ ដោយសម្មតិកម្មខាងក្នុងយើងមាន $\alpha(\mu) \geq \beta(\mu)$ និង $\alpha(\xi) \geq \beta(\xi)$. ដូច្នេះ $\alpha(\mu) + \alpha(\xi) \geq \beta(\mu) + \beta(\xi)$. ពីរ $\alpha(\sigma) = \alpha(\mu) + \alpha(\xi)$ និង $\beta(\sigma) = \beta(\mu) + \beta(\xi)$, វាធ្វើតាមនោះ$\alpha(\sigma) \geq \beta(\sigma)$.។

នេះបញ្ចប់នៃការសម្រាយបញ្ជាក់។

ជំពូកទី៤.ទំនាក់ទំនងផលធៀប

4.1.និយមន័យទ្រឹស្តីបទនិងអនុសាសន៍

គំនិតនៃទំនាក់ទំនងត្រូវបានគេប្រើយ៉ាងទូលំទូលាយនៅក្នុងជីវិតប្រចាំថ្ងៃ។ ឧទាហរណ៍ "ស៊ាននិងលីអូគឺជាបងប្អូននឹងគ្នា" អនុវត្តគំនិតនៃទំនាក់ទំនង "បងប្រុស" ដែលស៊ាននិងលីអូមាន។ ឬ" ខេននីសគឺជាឪពុករបស់ស៊ាន" អនុវត្តគំនិតនៃទំនាក់ទំនង" ឪពុក" ។ សម្រាប់ទំនាក់ទំនងមួយចំនួនយើងអាចផ្លាស់ប្តូរប្រធានបទនិងវត្ថុមាននៅក្នុងប្រយោគអង់គ្លេសដែលតំណាងឱ្យទំនាក់ទំនងខ្លះ។ រីឯអ្នកផ្សេងទៀតយើងមិនអាចទេ។ ឧទាហរណ៍ប្រសិនបើ" ស៊ានគឺជាប្អូនប្រុសរបស់លីអូ" នោះយើងក៏មានការពិតដែរថា" លីអូគឺជាបងប្អូនរបស់ស៊ាន" (សន្មតថាទាំងស៊ាននិងលីអូគឺជាក្មេងប្រុស) ចំណែកឯ" ខេននីសគឺជាឪពុករបស់ស៊ាន" បង្ហាញថា ការផ្លាស់ប្តូរប្រធានបទនិងវត្ថុមាននៃការកាត់ទោសមិនត្រូវបានអនុញ្ញាតទេ។

ក្នុងជំពូកនេះយើងនឹងសិក្សាអំពីទំនាក់ទំនងមួយចំនួនដែលត្រូវបានគេប្រើយ៉ាងទូលំទូលាយនៅក្នុងគណិតវិទ្យានិងផ្តល់ឱ្យពួកគេនូវចរិតគណិតវិទ្យា។

4.2.គោលការណ៍

ចំលើយ ៖ ទំនាក់ទំនងR លើសំណុំ S និង T គឺជាសំណុំរងនៃផលិតផល Cartesian $s\times t$ ។ នោះគឺជាទំនាក់ទំនងគោលពីរប្រសិនបើ $R\subseteq S\times T$ ។

វិចារណកថា ៖ទំនាក់ទំនង R អាចជាសំណុំរងនៃផលគុណដេកាត ច្រើនជាងពីរសំណុំពោលគឺ $R\subseteq S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$, នៅពេលដែល n≤២ ។ នៅក្នុងជំពូកនេះយើងចាប់អារម្មណ៍លើទំនាក់ទំនងគោលពីរ។

អនុគមន៍ ៤.២ ៖ ប្រសិនបើ$R\subseteq S\times S$ យើងហៅ R ជាទំនាក់ទំនងគោលពីរនៅលើ S។

អនុគមន៍ ៤.៣ ៖ ប្រសិនបើ $R = S \times T$ បន្ទាប់មក R ត្រូវបានគេហៅថាទំនាក់ទំនងពេញលេញ។

ការកត់សម្គាល់សម្រាប់ទំនាក់ទំនង

មានវិធីសាស្រ្តជាច្រើនដើម្បីបង្ហាញទំនាក់ទំនង៖

១. កំណត់សញ្ញាជាគូ ៖ យើងបានប្រើសញ្ញានេះតាមគោលការណ៍ខាងលើ។ ការកត់សំគាល់នេះកើតឡើងដោយផ្ទាល់ពីលក្ខណៈនៃផលគុណដេកាត ។

ឧទាហរណ៍ ៤.១ ៖ គេឲ្យ $S =\{a,b,c,d\}$, ហើយនិង

$R =\{(a,a),(b,a),(b,c),(c,d)\}$

R គឺជាទំនាក់ទំនងនៅលើ S ។ យើងអាចនិយាយថា b មានទំនាក់ទំនង R ពីព្រោះ $(b, a)\in R$ ប៉ុន្តែ a មិនមានទំនាក់ទំនង R ទៅ bទេ ពីព្រោះ (a, b) មិនរបស់ R ។

2. នៅក្នុងការកំណត់ ៖ នៅក្នុងការកត់សម្គាល់នេះទ្រព្យសម្បត្តិ $(x, y) \in R$ ត្រូវបានសរសេរជា xRy ។ នេះក៏ជាវិធីនៃការបង្ហាញទំនាក់ទំនងក្នុងជីវិតប្រចាំថ្ងៃ។

ឧទាហរណ៍ , កត់សំគាល់ភាពស្រដៀងគ្នានៅក្នុងសញ្ញាណ x និងទំនាក់ទំនងជីវិតប្រចាំថ្ងៃធម្មតា "x គឺជាបងប្អូនរបស់ y" ឬសេចក្តីបំប្លែងគណិតវិទ្យាធម្មតា "x អាចបែងចែកបានដោយ y" ។

ឧទាហរណ៍ ៤.២ ពិចារណាទំនាក់ទំនងនៅក្នុងឧទាហរណ៍ ៤.១ យើងមាន bRa ពីព្រោះ $(b, a) \in R$ ប៉ុន្តែយើងមិនមាន aRb ទេ ពីព្រោះ $(a, b) \notin R$ ទេ ។

3. ការកំណត់ម៉ាទ្រីស ៖ នៅពេលដែល R គឺជាទំនាក់ទំនងពិត , វាអាចត្រូវបានសរសេរជាម៉ាទ្រីស (ត្រូវបានបញ្ជាក់ដោយ R) $R = (r_{i,j})$ ដែលជាកន្លែង

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ ប្រសិនបើ } i,j \in R \text{ និង } i,j \in R \\ 0 \text{ ប្រសិនបើ } i,j \in R \text{ និង } i,j \notin R \end{cases}$$

ឧទាហរណ៍ ៤.៣ ៖ ទុកឱ្យ $S = \{x, y, z\}$, $T = \{a, b, c, d\}$។ បានបង្ហាញទំនាក់ទំនង $R \subset S \times T$ ដូចខាងក្រោម 3×4 ម៉ាទ្រីស r។

R=

	a	b	c	d
x	1	0	1	0
y	0	1	0	0
z	1	0	1	1

ឧទាហរណ៍: $(x, c) \in R$ ព្រោះ $r_{x,c} = 1$, ហើយនិង $(z, b) \notin R$ ព្រោះ $r_{z,b} = 0$ ។ សរុបមកយើងមាន $R = \{(x,a),(x,c),(y,b),(z,a),(z,c),(z,d)\}$

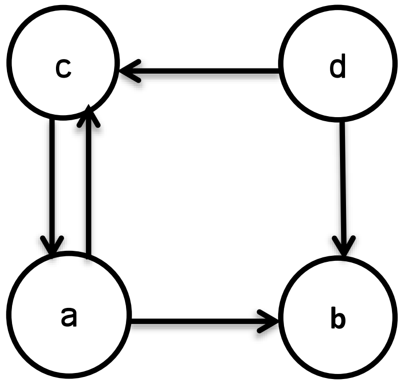
4. ការបង្ហាញក្រាហ្វិចដែលត្រូវបានណែនាំ ៖ នៅក្នុងការតំណាងនេះទំនាក់ទំនង R គឺជាក្រាហ្វិចដែលដឹកនាំដោយថ្នាំងដែលជាធាតុទាំងអស់នៃសំណុំ S, ហើយ និង x, y ជាក្រាហ្វិចមានគែមដឹកនាំពី x ដល់ y ប្រសិនបើ $(x, y) \in R$។

ឧទាហរណ៍ ៤.៤ ៖ គេឲ្យ $S = \{a,b,c,d\}$, ហើយនិង

$$R = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(c,a),(d.b),(d,c)\}$$

ការបង្ហាញដូចខាងក្រោមបង្ហាញពីតំណាងពីរនៃទំនាក់ទំនងដូចគ្នា ។

	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	0	1	0	0
c	1	0	0	0
d	0	1	1	0



ការអនុវត្តន៍ ៤.៤ ៖ ទុកឱ្យ S ជាសំណុំមិនទទេនិងទំនាក់ទំនង$R \subseteq S \times S$ ។

1. R ត្រូវបានគេហៅថាទំនាក់ទំនងឡើងវិញប្រសិនបើនិងលុះត្រាតែសម្រាប់ x ទាំងអស់នៅក្នុង S យើងមាន $(x, x) \in R$។
2. R ត្រូវបានគេហៅថាទំនាក់ទំនងស៊ីមេទ្រីប្រសិនបើនិងសម្រាប់តែ $x, y \in S$, ប្រសិនបើ $(x, y) \in R$, បន្ទាប់មក $(y, x) \in R$។
3. R ត្រូវបានគេហៅថាទំនាក់ទំនងលក្ខណៈឆ្លង ប្រសិនបើនិងប្រសិនបើមានតែសម្រាប់ x, y, z, ,S ប្រសិនបើ $(x, y) \in R$និង $(y, z) \in R$, បន្ទាប់មក $(x, z) \in R$។

វិចារណ៍ : ការប្រព្រឹត្តខាងលើអាចត្រូវបានពង្រីកដើម្បីរួមបញ្ចូលករណី $S = \emptyset$។ ក្នុងករណីពិសេសនេះទំនាក់ទំនងដែលអាចកើតមានតែមួយគត់នៅលើ S គឺ $\emptyset$។ ទំនាក់ទំនងទំនេរ $\emptyset$, មានន័យថាវា មានលក្ខណៈសម្បត្តិទាំងបីដែលបានបញ្ជាក់ខាងលើ។

លក្ខណៈ ៤.៥ ៖ ទំនាក់ទំនង R នៅលើ S ហៅថាទំនាក់ទំនងស្មើ ប្រសិនបើវា មានលក្ខណៈសម្បត្តិបីដូចខាងក្រោមៈ

1. R គឺជាទំនាក់ទំនងមានលក្ខណៈខ្លួនឯង ,
2. R គឺជាទំនាក់ទំនងស៊ីមេទ្រី , និង
3. R គឺជាទំនាក់ទំនងមានលក្ខណៈឆ្លង ។

ឧទាហរណ៍ ៤.៥ ៖ ទុកឱ្យ $S = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ជាសំណុំអថេរក្នុងកម្មវិធីកុំព្យូទ័រជាក់លាក់។ ប្រសិនបើ $vi = vj$ មានន័យថាតម្លៃរបស់ v_i និង v_j គឺដូចគ្នាបន្ទាប់មកនៅពេលណាមួយក្នុងកំឡុងពេលដំណើរការកម្មវិធី“ =” គឺជាទំនាក់ទំនងស្មើគ្នានៅលើ S ។

ការអនុវត្តន៍ ៤.៦ ៖ សូមឱ្យ S ជាសំណុំមិនទទេ។ A ផ្នែកមួយ P នៃ S គឺជាសំណុំនៃសំណុំរងនៃ S,

$P = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$,ដូចនោះ$\cup_{i=1}^{k} A_1 = S$, និងសម្រាប់ទាំងអស់ i ,$1 \le i \le k$,

(a) $A_i \subseteq S$,

(b) $A_i \neq \emptyset$,

(c) $A_i \cap A_j=\emptyset$, នៅពេលដែល $1\le j \le k$ និង $i \ne j$ ។

ជាគុនៃសំណុំ P, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ត្រូវបានគេហៅថាកោសិកា។

ការអនុវត្តន៍ ៤.៧៖ ទុកឱ្យ $P = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ និងទុកឱ្យ $Q = \{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$ ជាចំណែកពីរនៃសំណុំមិនគោរព S ។ផ្នែកនៃ Q ត្រូវបានគេហៅថាការបង្កើតឡើងវិញនៃ P ប្រសិនបើនិងប្រសិនបើសម្រាប់តែមួយ $B_j \in Q$ មានមួយនិងតែមួយគត់ $A_i \in P$បែបនោះដែល $B_j \subset A_i$។

ការអនុវត្តន៍ ៤.៨៖ ឧបមាថា $R\subseteq S \times S$ គឺជាទំនាក់ទំនងស្មើហើយ $x \in S$ គឺជាធាតុថេរ ។ សំណុំ $[x]_R = \{y: xRy, y \in S\}$ ត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាថ្នាក់ស្មើនៃ x ។

ការអនុវត្តន៍ ៤.៩៖ សូមឱ្យ $R \subseteq S \times S$ ជាទំនាក់ទំនងស្មើគ្នា។ គេអាចមើលឃើញថាសំណុំនៃថ្នាក់ស្មើគ្នាដែលផលិតដោយ R គឺជាបំណែក របស់ S នោះ,មានន័យថា $\{[x]_R : x\in S\}$គឺជាផ្នែករបស់ S ។ ឈុតនេះត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាសំណុំកូតាហើយជារឿយៗត្រូវបានគេហៅថា S/R ។

ឧទាហរណ៍ ៤.៦ សូមឱ្យ S = {1,2,3,4,5,6} ។ ពិចារណាអំពីទំនាក់ទំនង R ដែលបានផ្តល់នៅក្នុងម៉ាទ្រីសខាងក្រោម ។

		1	2	3	4	5	6
	1	1	1	0	0	0	1
	2	1	1	0	0	0	1
R=	3	0	0	1	0	0	0
	4	0	0	0	1	1	0
	5	0	0	0	1	1	0
	6	1	1	0	0	0	1

យើងមានអង្គហេតុដូចខាងក្រោម:

1. R គឺជាទំនាក់ទំនងស្មើគ្នានៅលើ S ពីព្រោះវាមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី និងលក្ខណៈឆ្លង។
2. សូមឱ្យ P ={{1,2,6},{3},{4,5}}.

បន្ទាប់មក P ជាចំណែករបស់ S ។ តាមពិត P គឺជាសំណុំគុណបំណាច់ S / R ដែលបានផ្តល់ដោយទំនាក់ទំនង R ពីព្រោះ $[1]_R = [2]_R = [6]_R =\{1,2,6\}$, $[3]_R =\{3\}$, $[4]_R = [5]_R =\{4,5\}$ ។

3. សូមឱ្យ Q ={{1,2},{3},{4,5},{6}} ។ បន្ទាប់មក Q គឺជាការបង្ហាញឡើងវិញរបស់ P ។

ការអនុវត្តន៍ ៤.១០៖ ទំនាក់ទំនង R នៅលើ S ត្រូវបានគេហៅថាទំនាក់ទំនងដែលមិនចាំបាច់ប្រសិនបើ និងមានតែប្រសិនបើក្នុងករណីទាំងអស់ $x\in S$ $(x, x) \notin R$ ។

ការអនុវត្តន៍ ៤.១១៖ ទំនាក់ទំនង R នៅលើ S ត្រូវបានគេហៅថាទំនាក់ទំនង មានលក្ខណៈស៊ីម៉េទ្រី ប្រសិនបើនិងមានតែប្រសិនបើ សម្រាប់ទាំងអស់ $x,y \in S$, ប្រសិនបើ $(x,y) \in R$ បន្ទាប់មក

$(y,x) \notin R$ ។

ការអនុវត្តន៍ ៤.១២៖ ទំនាក់ទំនង R នៅលើអេសត្រូវបានគេហៅថាទំនាក់ទំនង មិនមានលក្ខណៈស៊ីម៉េទ្រី ប្រសិនបើនិងមានតែប្រសិនបើសម្រាប់ទាំងអស់ $x,y \in S$, ប្រសិនបើ $(x,y) \in R$, បន្ទាប់មកទៀត $x = y$ ឬ $(y, x) \notin R$ ។ ម៉្យាងទៀត ,ប្រសិនបើទាំងពីរ (x,y) និង (y,x) គឺក្នុងនៅ R , បន្ទាប់មក $x = y$ ។

ការអនុវត្តន៍ ៤.១៣៖ ទំនាក់ទំនង R នៅលើSត្រូវបានគេហៅថាទំនាក់ទំនងតាមលំដាប់លំដោយប្រសិនបើវាមានលក្ខណៈសម្បត្តិបីដូចខាងក្រោម៖

1. R គឺជាទំនាក់ទំនងមានលក្ខណៈខ្លួនឯង

2. R គឺជាទំនាក់ទំនងមានលក្ខណៈមិនស៊ីម៉េទ្រី និង

3. R គឺជាទំនាក់ទំនងមានលក្ខណៈឆ្លង។

វិចារណ៍ : ក្នុងករណីខ្លះយើងអនុញ្ញាតឱ្យមានទំនាក់ទំនងតាមលំដាប់លំដោយដោយមិនមានផ្នែកខ្លះ។ ដំណើរការឡើងវិញ ឬ ភាពរឹងមាំឡើងវិញនៃទំនាក់ទំនងតាមលំដាប់លំដោយនឹងមិនមានលក្ខណៈសម្បត្តិសំខាន់ៗមួយចំនួននៃទំនាក់ទំនងផ្នែកខ្លះដែលយើងចាប់អារម្មណ៍នោះទេ ។

ឧទាហរណ៍ ៤.៧ : សូមឱ្យ $S = \{0,1,2,3\ldots\}$ ។ ទំនាក់ទំនង $\leq$ គឺជាទំនាក់ទំនងលំដាប់មួយផ្នែកលើ S ។ តាមពិតប្រសិនបើ S ជាការប្រមូលផ្តុំនៃចំនួនពិត បន្ទាប់មក $\leq$ គឺជាទំនាក់ទំនងលំដាប់មួយផ្នែកលើ S ។

ទ្រឹស្តីបទ

មានទំនាក់ទំនងជិតស្និទ្ធរវាងទំនាក់ទំនងស្មើគ្នា $R \subseteq S \times S$ និងបំណែក P នៃ S ។ ទំនាក់ទំនងនេះត្រូវបានបញ្ជាក់យ៉ាងច្បាស់ដូចខាងក្រោម៖

ទ្រឹស្តីបទ ៤.១ ៖ សូមឱ្យ $R \subseteq S \times S$ ជាទំនាក់ទំនងស្មើគ្នា ។ បន្ទាប់មក R បង្កើតផ្នែកតែមួយគត់នៃ $P_R = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ នៃ S ដូចនោះ , សម្រាប់ទាំងអស់ x, $y\ \exists i, 1 \leq i \leq k$, $(x,y) \in A_i$ ប្រសិនបើនិងបានតែ $(x,y) \in R$ ។ផ្តល់ឱ្យ បំណែក $P = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ នៃ S , ទំនាក់ទំនងស្មើគ្នាតែមួយគត់គឺ R_p ត្រូវបានចាត់តាំងដូចខាងក្រោម:$(x,y) \in R_P$ ប្រសិនបើនិងបានតែ $\exists i , 1 \leq i \leq k$, $(x,y) \in A_i$ ។

ទ្រឹស្តីបទ ៤.២ ៖ សូមឱ្យ $R \subseteq S \times S$ ជាទំនាក់ទំនងស្មើនិង $x,y \in S$ ។ បន្ទាប់មកលក្ខណៈខាងក្រោមមាន៖ ទាំង $[x]_R = [y]_R$ ឬ $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$ ។

វិចារណ៍ ៖ ដោយមានទំនាក់ទំនងស្មើគ្នានៅលើ S ទ្រឹស្តីបទខាងលើបង្ហាញថាការប្រមូលផ្តុំថ្នាក់ស្មើគ្នាទាំងអស់ដែលអាចធ្វើបានផ្តល់នូវបំណែកនៃ S ។

4.3.**លំហាត់**

បញ្ហាទី ១ ៖ សូមឱ្យ S ជាសំណុំហើយ R ជាទំនាក់ទំនង ។ សរសេរឡើងវិញនូវគោលការណ៍នៃទំនាក់ទំនងឡើងវិញ, ស៊ីមេទ្រី ,និងលក្ខណៈឆ្លង ទៅជាការព្យាករណ៍បរិមាណ ។

បញ្ហាទី ២ ៖ ដូចគ្នានឹងខាងលើសរសេរឡើងវិញនូវប្រយោគនៃទំនាក់ទំនងដែលមិនចេះអស់របស់លក្ខណៈស៊ីម៉េតទ្រី និង មិនលក្ខណៈស៊ីម៉េតទ្រី ទៅក្នុងការព្យាករណ៍បរិមាណ។បញ្ហាទី ៣ ៖

1. សរសេរទំនាក់ទំនងដាក់បញ្ចូល $\subseteq$ លើសំណុំថាមពល P ({a, b, c}) ក្នុងការកំណត់ម៉ាទ្រីស ។
2. តើ $\subseteq$ ជាទំនាក់ទំនងស្មើគ្នាលើ P ({a, b, c}) ទេ ?
3. តើ $\subseteq$ មានទំនាក់ទំនងតាមលំដាប់ដោយផ្នែកនៅលើ P ({a, b, c}) ទេ ?

បញ្ហាទី ៤ ៖ ទំនាក់ទំនង R ចំពោះសំណុំថាមពល P(A) នៃសំណុំមួយ Aដូចជា $\forall a,b \in P(A)[(a,b) \in R \leftrightarrow a \cap b \neq \emptyset]$ ។

តើ R កើតឡើងវិញនៃស៊ីមេទ្រី រឺ លក្ខណៈឆ្លុះ ? ហេតុអ្វី ?

បញ្ហាទី ៥ ៖ សូមឱ្យ A ជាសំណុំនៃផ្លូវទាំងអស់នៅក្នុងយន្តហោះនិង R_1, R_2 ជាទំនាក់ទំនងពីរនៅលើ A បានបញ្ជាក់ដូចខាងក្រោម ៖

1. ការបែងចែក R_1 : សម្រាប់ទាំងអស់ $L, L' \in A$, $(L,L') \in R_1$ ប្រសិនបើ L គឺកាត់កែងទៅ L´ ។
2. ការបែងចែក R_2 : សម្រាប់ទាំងអស់ $L, L' \in A$, $(L,L') \in R_2$ ប្រសិនបើ L គឺកាត់កែងឬប៉ារ៉ាឡែលទៅ L´

សម្គាល់តារាងខាងក្រោមឱ្យបានត្រឹមត្រូវដើម្បីចង្អុលបង្ហាញពីលក្ខណៈសម្បត្តិនៃទំនាក់ទំនង R_1 និង R_2 មាន ។

	លក្ខណៈឆ្លុះ	លក្ខណៈមិនឆ្លុះ	ស៊ីម៉េទ្រី	ស៊ីម៉េទ្រី	មិនស៊ីម៉េទ្រី	លក្ខណៈឆ្លង
R_1						
R_2						

បញ្ហាទី ៦ ៖ ដាក់ N ជាសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាននិង R_1, R_2 ជាទំនាក់ទំនងពីរនៅលើ N បានបញ្ជាក់ដូចខាងក្រោម៖

1. លក្ខណៈនៃ R_1 ៖ សម្រាប់ទាំងអស់ $a,b \in N$, $(a,b) \in R_1$ ប្រសិនបើ $a \neq b$ ។
2. លក្ខណៈនៃ R_2 ៖ សម្រាប់ទាំងអស់$a,b \in N$, $(a,b) \in R_2$ ប្រសិនបើ $\frac{a}{b} = 2^i$ សម្រាប់ចំនួនគត់មួយចំនួន $i \leq 0$។

សម្គាល់តារាងខាងក្រោមឱ្យបានត្រឹមត្រូវដើម្បីចង្អុលបង្ហាញពីលក្ខណៈសម្បត្តិនៃទំនាក់ទំនង R_1 និង R_2 មាន ។

	លក្ខណៈឆ្លុះ	លក្ខណៈស៊ីម៉េតទ្រី	លក្ខណៈមិនស៊ីម៉េតទ្រី
	លក្ខណៈមិនឆ្លុះ	លក្ខណៈស៊ីម៉េតទ្រី	លក្ខណៈឆ្លង
R1			
R2			

បញ្ហាទី ៧ ៖ ទំនាក់ទំនង R នៅ N ដូច ∀ c,d ∈ N (c,d) ∈ R ប្រសិនបើ c+d គឺសូម្បីតែ។

1. បញ្ជាក់ថា R គឺជាទំនាក់ទំនងស្មើ ។
2. តើ R មានប៉ុន្មានថ្នាក់ស្មើគ្នា ?

បញ្ហាទី ៨ ៖ សូមឱ្យ S ជាសំណុំរបស់សិស្សទាំងអស់នៅសាលា។ មិនមានទំនាក់ទំនង R ដូចជា៖ សំរាប់សិស្សទាំងអស់ x និង y ក្នុង S ។ xRy ប្រសិនបើ x និង y កំពុងទទួលយកថ្នាក់តែមួយ ។

តើ R គឺជាទំនាក់ទំនងស្មើឬ ?

បញ្ហាទី ៩ ៖ សូមឱ្យ R ក្លាយជាទំនាក់ទំនងឡើងវិញនិងផ្លាស់ប្តូរលើសំណុំ S ។ ទំនាក់ទំនង Y នៅលើ S ដូចខាងក្រោម ៖

∀a,b ∈ S [(a,b) ∈ Y ↔ ((a,b) ∈ R ∧ (b,a) ∈ R.)] បញ្ជាក់ថា Y គឺជាទំនាក់ទំនងស្មើ ។

បញ្ហាទី ១០ ៖ 1.សូមលើកឧទាហរណ៍មួយនៃទំនាក់ទំនងដែលមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីនិងលក្ខណៈឆ្លង ប៉ុន្តែមិនមានភាពប្រសើរឡើងវិញទេ ។

2. តើមានអ្វីខុសជាមួយ " ភ័ស្តុតាង" ដូចខាងក្រោមដែលរាល់ទំនាក់ទំនងស៊ីមេទ្រីនិង transitive R កំពុងដំណើរការឡើងវិញ ? ប្រសិនបើ (a,b) ∈ R បន្ទាប់មក (b,a) ∈ R ដោយស៊ីមេទ្រី ។ តាមរយៈការ លក្ខណៈឆ្លង , (a,a) ∈ R ។ ដូច្នេះ R រស់ឡើងវិញ ។

បញ្ហាទី ១១ ៖ សូមអោយ S ជាសំណុំ P (x) និង Q (x) ធ្វើជាកត្តាកំណត់ពីរក្នុងអថេរមួយ X ∈ S , និង L ជាទំនាក់ទំនងសមមូលគោលពីរនៅលើ S ។ ឧបមាថា ∀x ∈ S[P(x)−→¬Q(x)] ។

ទំនាក់ទំនងគោលពីរ R លើ S ដូចខាងក្រោម ៖ (x,y) ∈ R↔[((x,y) ∈ L)∧P(x) ∧ Q(y)] ។

តើទំនាក់ទំនង R កើតមានស៊ីមេទ្រី រឺ ផ្លាស់ប្តូរដែរឬទេ ? ហេតុអ្វី ?

បញ្ហាទី ១២ ៖ ចំនុចដាច់ដោយឡែកមួយសម្រាប់ទំនាក់ទំនង R នៅលើសំណុំ A គឺជាធាតុ a , នៅកន្លែង a ∈ A និង (a,x) ∉ R និង (x,a) ∉ R សម្រាប់ណាមួយនៃ x ∈ A ។

1. តាមរយៈអក្សរ R និង A ដូចខាងលើសូមសរសេរទាយទុកជាមុនដើម្បីបញ្ជាក់ពីចំណុចដាច់ស្រយាលនេះ ។
2. ឧបមាថា R គឺជាទំនាក់ទំនងគោលពីរនៅលើ A ដែល R ជាស៊ីមេទ្រីនិង លក្ខណៈឆ្លង ហើយ R មិនមានចំនុចដាច់ឆ្ងាយទេ បញ្ជាក់ថា R គឺជាទំនាក់ទំនងស្មើ ។

បញ្ហាទី ១៣ ៖ តាង A ជាសំណុំមួយដែលមានធាតុ n សរុប, នៅពេល n ≥ 1 ។ តាង R ជាទំនាក់ទំនងស្មើគ្នាលើ A ។ បង្ហាញថាចំនួនសរុបនៃគូដែលបានបញ្ជាទិញនៅក្នុងអក្សរ R គឺសេសប្រសិនបើ n គឺសេស ទោះបីជា n គូក៏ដោយ ។ [ជំនួយ: សូមពិចារណាការកំណត់ម៉ាទ្រីសសម្រាប់ទំនាក់ទំនង]

បញ្ហាទី ១៤ ៖ សូមឱ្យ R និង S ក្លាយជាទំនាក់ទំនងទាំងពីរលើ A ។

1. ប្រសិនបើ R និង S ទាំងពីរអាចរស់ឡើងវិញបាន តើ R∩S ក៏រស់ឡើងវិញដែរឬទេ ?
2. ប្រសិនបើ R និង S ទាំងពីរស៊ីមេទ្រី តើ R∩S ក៏ស៊ីមេទ្រីដែរឬទេ ?
3. ប្រសិនបើ R និង S ទាំងពីរផ្លាស់ប្តូរ តើ R∩S ក៏ លក្ខណៈឆ្លង ដែរឬទេ ?

បញ្ហាទី ១៥ ៖ សូមឱ្យ R និង S ក្លាយជាទំនាក់ទំនងទាំងពីរលើ A ។

1. ប្រសិនបើ R និង S ទាំងពីរអាចរស់ឡើងវិញបាន តើ R∩S ក៏រស់ឡើងវិញដែរឬទេ ?
2. ប្រសិនបើ R និង S ទាំងពីរស៊ីមេទ្រី តើ R∩S ក៏ស៊ីមេទ្រីដែរឬទេ ?
3. ប្រសិនបើ R និង S ទាំងពីរមានលក្ខណៈឆ្លង នោះតើ R∩S ក៏មានលក្ខណៈឆ្លង ដែរឬទេ ?

បញ្ហាទី ១៦ ៖ សូមឱ្យ A, B, C ជាឈុតបី។ ហើយអនុញ្ញាតឱ្យ

$D = (A - (B \cup C))$,

$E = ((A - C) \cap B)$,

$F = (A \cap C)$ ។

ឧបមាថា D, E និង F នីមួយៗមិនមានលក្ខណៈមិនពិត។ បញ្ជាក់ថា {D, E, F} គឺជាចំណែករបស់ A ។

[ជំនួយ៖ ប្រើអំណះអំណាង epsilon ប៉ុន្តែដំបូងត្រូវគូរដ្យាក្រាម Venn ដើម្បីជួយខ្លួនអ្នកឱ្យឃើញពីអ្វីដែលកំពុងកើតឡើង ។]

បញ្ហាទី ១៧ ៖ កំណត់ R ដើម្បីជាទំនាក់ទំនងខាងក្រោមលើ N – N :

សម្រាប់ទាំងអស់ a,b,x,y ក្នុង N, (a,b)R(x,y) ប្រសិនបើ ay = bx ។ បញ្ជាក់ថា R គឺជាទំនាក់ទំនងស្មើ ។

បញ្ហាទី ១៨ ៖ សូមឱ្យ A ={1,2,3,4} ។ សម្រាប់ទំនាក់ទំនងនីមួយៗនៃទំនាក់ទំនងទាំងបីខាងក្រោមនៅលើ A សូមបង្ហាញ ឬ បដិសេធថា វាជាទំនាក់ទំនងស្មើភាពហើយបើវាជាលេខមួយ ចូរសរសេរថ្នាក់ស្មើរបស់វា ។

R1 = {(1,1),(2,2),(3,4),(3,3),(4,4)}

R2 $=\left\{\begin{matrix}(1,1),(2,2),(3,4),(4,4),(1,2),(2,1),\\(3,3),(4,3),(1,3),(1,4),(3,1),(4,1)\end{matrix}\right\}$

R3 = {(1,1),(2,2),(3,4),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(4,2),(2,3)} ។

បញ្ហាទី ១៩ ៖ ជាផ្នែកទាំងអស់នៃ {a, b, c} ។

បញ្ហាទី ២០ ៖ ដែលបានផ្តល់ឱ្យសំណុំ S, តើ {S} ជាចំណែករបស់ S ដែរឬទេ ?

បញ្ហាទី ២១ ៖ ទុកឱ្យ Z ជាសំណុំនៃចំនួនគត់ទាំងអស់។ ទំនាក់ទំនង R លើ N ដូចខាងក្រោមៈ

∀a,b ∈ N, (a,b) ∈ R ប្រសិនបើ ∃i ∈ Z $\frac{a}{b} = 2^i$ ។

1. បញ្ជាក់ថា R គឺជាទំនាក់ទំនងស្មើ ។
2. ជាតុនៃផ្នែកដែលបានផ្តល់ដោយ R ។

បញ្ហា ២២ ៖ តើមានទំនាក់ទំនងស្មើគ្នាប៉ុន្មាននៅលើ A = {1,2,3} ?

បញ្ហាទី ២៣ ៖ សូមឱ្យ R_1 និង R_2 មានទំនាក់ទំនងស្មើភាពគ្នាលើសំណុំ S ។ បង្ហាញឬបដិសេធថា $R_1 \cup R_2$ ក៏ជាទំនាក់ទំនងស្មើគ្នានៅលើ S ។

បញ្ហាទី ២៤ ៖ សូមឱ្យ R_1 និង R_2 មានទំនាក់ទំនងតាមលំដាប់ដោយផ្នែកនៅលើសំណុំ S ។ បង្ហាញ ឬ បដិសេធថា $R_1 \cup R_2$ ក៏ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់មួយផ្នែកលើ S ។

បញ្ហាទី ២៥ ៖ សូមឱ្យ P(N) ជាសំណុំថាមពលនៃលេខធម្មជាតិ ។ បញ្ជាក់ថា ទំនាក់ទំនងសំណុំរង⊆គឺជាទំនាក់ទំនងលំដាប់ផ្នែកលើ P(N) ។

បញ្ហាទី ២៦ ៖ សូមឱ្យ S ={1,2,...,10} ។ សំណុំបួនឈុតដូចខាងក្រោមៈ

P_1 ={{1,3,8}, {2,4,6}, {5,7,10}, {9}}.

P_2 ={{7,4,3,8}, {1,5,10,3}, {2,6}}.

P_3 ={{1,5,9}, {2,10,4,7}, {8,3,6}}.

P_4 ={{4,2}, {3,8}, {6}, {10,7}, {1},{5}, {9}}.

1. តើឈុតមួយណាខាងលើជាចំណែករបស់ S ?
2. តើផ្នែកមួយណាជាការរំលឹកឡើងវិញនៃផ្នែកមួយផ្សេងទៀត ?

បញ្ហាទី ២៧ ៖ ឈុត {1,2,3,4,5,6} ត្រូវបានចែកជា P ={{1,2,3},{4,5},{6}} ។

តើ P មានចំនួនប៉ុន្មានសម្រាប់ការកែលម្អឡើងវិញ ?

បញ្ហាទី ២៨ ៖ ទុកឱ្យ S ជាសំណុំមិនទទេហើយស្មាន $P_1 = \{C_1, \dots, C_m\}$ និង $P_2 = \{D_1, \dots, D_n\}$

គឺជាផ្នែកចំនួនពីររបស់ S ។ ដែលបានកំណត់ Q ជាសំណួរ៖

$Q = \{C_i \cap D_j \,;\, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\} - \{\emptyset\}$

1. បង្ហាញភស្តុតាង Q ជាចំណែកនៃ S ។
2. បង្ហាញភស្តុតាង Q គឺជាការបង្ហាញឡើងវិញទាំង P_1 និង P_2 ។

4.4.ដំណោះស្រាយ

ដំណោះស្រាយទី ១ ៖ សូមឱ្យ S ជាសំណុំហើយ R ជាទំនាក់ទំនងនៅលើ S ។

R រស់ឡើងវិញ ប្រសិនបើ $\forall a\in S,(a,a)\in R$ ។

R គឺស៊ីមេទ្រី ប្រសិនបើ $\forall a,b\in S[(a,b)\in R\leftrightarrow(b,a)\in R]$ ។

R គឺផ្លាស់ប្តូរ ប្រសិនបើ $\forall a,b,c\in S,[(a,b)\in R\wedge(b,c)\in R\rightarrow(a,c)\in R]$ ។

សំគាល់៖ សំរាប់ការបែងចែកស៊ីមេទ្រី យើងក៏អាចសរសេរឡើងវិញដូចជា:

R គឺស៊ីមេទ្រី ប្រសិនបើ $\forall a,b\in S[(a,b)\in R\rightarrow(b,a)\in R]$ ។

ដំណោះស្រាយទី ២ ៖ សូមឱ្យ S ជាសំណុំហើយ R ជាទំនាក់ទំនងនៅលើ S ។

R គឺមិនអាចរស់នៅបានទេ ប្រសិនបើ $\forall a \in S, (a,a) \notin R$ ។

R គឺមិនស្មើគ្នា ប្រសិនបើ $\forall a,b\in S[(a,b)\in R\rightarrow(b,a)6\in R]$ ។

R គឺជាមិនឆ្លុះប្រសិនបើ $\forall a,b\in S,[(a,b)\in R\wedge(b,a)\in R\rightarrow a = b]$ ។

ដំណោះស្រាយទី ៣ ៖

1. ម៉ាទ្រីសជាទំនាក់ទំនង⊆នៅលើសំណុំថាមពល P ({a, b, c})៖

	∅	{a}	{b}	{c}	{a,b}	{b,c}	{a,c}
∅	1	1	1	1	1	1	1
{a}	0	1	0	0	1	0	1
{b}	0	0	1	0	1	1	1
{c}	0	0	0	1	0	1	1
{a,b}	0	0	0	0	1	0	1
{b,c}	0	0	0	0	0	1	1
{a,c}	0	0	0	0	0	0	1
{a,b,c}	0	0	0	0	0	0	1

2. ⊆ មិនមែនជាទំនាក់ទំនងស្មើគ្នាទេព្រោះវាមិនស៊ីមេទ្រី។ឧទាហរណ៍{a}⊆{a, b}ចំណែកឯ{a, b} ⊈{a} ។
3. ⊆គឺជាទំនាក់ទំនងលំដាប់មួយផ្នែក។ ពីទំនាក់ទំនងម៉ាទ្រីស វាងាយស្រួលក្នុងការផ្ទៀងផ្ទាត់ ⊆កំពុងដំណើរការឡើងវិញនិង ផ្ទុយនឹងមិនឆ្លុះ។ ជាទូទៅ transitivity ឆ្លងកាត់ គឺ មិនច្បាស់ដែលត្រូវបានគេមើលឃើញពីម៉ាទ្រីសទំនាក់ទំនង ។ ប៉ុន្តែនៅក្នុងបញ្ហាពិសេសនេះយើងអាចមើលឃើញទ្រព្យសម្បត្តិដោយផ្ទាល់ពីទ្រឹស្តីបទមូលដ្ឋាននៅក្នុងសំណុំ ។ នោះគឺ សម្រាប់ឈុតណាមួយ A,B,C ∊ P({a,b,c}), ប្រសិនបើ A ⊆ B និង B ⊆ C, បន្ទាប់មក A⊆C ។ ដូច្នេះ⊆គឺជា transitive ។

ដំណោះស្រាយទី ៤ ៖ ដែលបានផ្តល់ឱ្យសំណុំ A ទំនាក់ទំនង R លើសំណុំថាមពល P(A) ត្រូវបានចាត់ទុកថាជា ∀a,b ∊ P(A) [(a,b) ∊ R ↔ a ∩ b ≠ ∅] ។

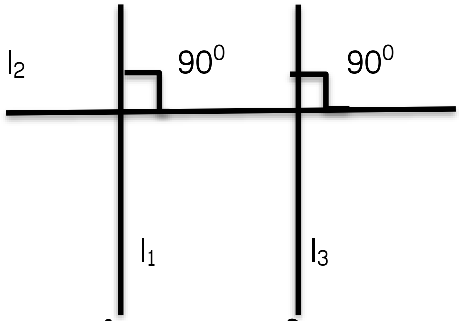
1. R មិនដំណើរការទេពីព្រោះ∅គឺជាធាតុមួយនៃសំណុំថាមពលនៃសំណុំ A, និង∅∩∅ = ∅។ ដោយឥរិយាបទ (∅, ∅) ∉ R ។
2. R គឺជាស៊ីមេទ្រីពីព្រោះសញ្ញាប្រមាណវិធីប្រសព្វ ∩ គឺដូច្នេះហើយ ប្រសិនបើ a∩b ≠ ∅, បន្ទាប់មក b∩a ≠ ∅ ។
3. R មិនផ្លាស់ប្តូរទេ ព្រោះបើ a∩b ≠ ∅ នឹង b∩c ≠ ∅ មិនមានន័យថា a∩c ≠ ∅ ។ នេះជាឧទាហរណ៍ប្រឆាំង៖ អនុញ្ញាតឱ្យ a = {1,2},b = {2,3}, នឹង c ={3,4} ។

ដំណោះស្រាយទី ៥ ៖

ចម្លើយ

	បត់បែន	គ្មានលក្ខណៈខ្លួនឯង	គ្មានលក្ខណៈខ្លួនឯង	គម្លាត	មិនស៊ីមេទ្រី	ការផ្លាស់ប្តូរ
R_1		√	√			
R_2	√		√		√	

ការពន្យល់ ៖ សូមឱ្យ $l_1 \perp l_2$តាងបន្ទាត់ l_1 គឺកាត់កែងទៅបន្ទាត់ l_2 និង $l_1 \,||\, l_2$ បញ្ជាក់ l_1គឺស្របទៅនឹង l_2 ។ សូមពិចារណាចំណុចដូចខាងក្រោម



R_1: 1. វាច្បាស់ណាស់ថាមិនមានដំណើរការឡើងវិញទេពីព្រោះបន្ទាត់ណាមួយមិនត្រូវកាត់កែងដោយខ្លួនឯង ។ និយាយម៉្យាងទៀត$\perp$គឺមិនអាចរស់នៅបានទេ ។

2. $\perp$គឺស៊ីមេទ្រីពីព្រោះ $l_1 \perp l_2 \Rightarrow l_2 \perp l_1$ ។

3. $\perp$មិនអត់ទេពីព្រោះ $l1 \perp l2$ and $l2 \perp l1$ ។

4. $\perp$ មិនមែនជាមិនស៊ីមេទ្រីទេពីព្រោះ $(l_1 \perp l_2 \wedge l_2 \perp l_1) \not\Rightarrow l_1 = l_2$ ។

5. $\perp$មិន transitive ទេពីព្រោះ $(l_1 \perp l_2 \wedge l_2 \perp l_3) \not\Rightarrow l_1 \perp l_3$ ។

R_2: 1. R_2 គឺរស់ឡើងវិញព្រោះសំរាប់ l ទាំងអស់, យើងដឹងថា $l \,||\, l$, ដូច្នេះ $l \,||\, l \Rightarrow (l \,||\, l) \vee (l \perp l) \Rightarrow (l,l) \in R_2$ ។

2. R_2 គឺស៊ីមេទ្រីពីព្រោះ $(l_1,l_2) \in R_2 \Rightarrow (l_1 \,||\, l_2) \vee (l_1 \perp l_2)$

$$\Rightarrow (l_2 \,||\, l_1) \vee (l_2 \perp l_1)$$

$$\Rightarrow (l_2,l_1) \in R_2 \text{ ។}$$

3. R_2 មិនអន់ទេ ។ ដូចដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើទាំង (l_1, l_2) និង (l_2, l_1) ស្ថិតនៅក្នុង R_2 ។

4. R_2 មិនមែនជា antisymmetric ទេ ។ ដូចដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើទាំងពីរ (l_1, l_2) និង (l_2, l_1) ស្ថិតនៅក្នុង R_2, និង $l_1 \neq l_2$ ។

5. R_2 គឺ transitive ,ពីព្រោះ, សម្រាប់ទាំងអស់ l_1,l_2 និង l_3 ប្រសិនបើ $(l_1,l_2) \in R_2$ និង $(l_2,l_3) \in R_2$, យើងមានបួនករណី ៖

ករណី 1: $l_1 \parallel l_2$ និង $l_2 \parallel l_3$, $\Rightarrow l_1 \parallel l_3 \Rightarrow (l_1,l_3) \in R_2$ ។

ករណី 2: $l_1 \parallel l_2$ និង $l_2 \perp l_3$, $\Rightarrow l1 \perp l_3 \Rightarrow (l_1,l_3) \in R_2$ ។

ករណី 3: $l_1 \perp l_2$ និង $l_2 \parallel l_3$, $\Rightarrow l_1 \perp l_3 \Rightarrow (l_1,l_3) \in R_2$ ។

ករណី 4: ប្រសិនបើ $l_1 \perp l_2$ និង $l_2 \perp l_3$, $\Rightarrow l_1 \parallel l_3 \Rightarrow (l_1,l_3) \in R_2$ ។

ក្នុងករណីនីមួយៗយើងមាន $(l_1,l_3) \in R_2$ ។

ដោះស្រាយ ៦ ចម្លើយ

	លក្ខណៈខ្លួនឯង	គ្មានលក្ខណៈខ្លួនឯង	លក្ខណៈស៊ីមេទ្រី	គម្លាត	មិនស៊ីមេទ្រី	លក្ខណៈឆ្លង
R_1		√	√			
R_2			√			
√			√			

ការពន្យល់ ៖

R_1 : 1. R_1 គឺមិនមានការផ្លាស់ប្តូរទេព្រោះសម្រាប់ទាំងអស់ $a \in N$, $a = a$.

2. R_1 គឺមិនអាចកែប្រែបានទេព្រោះសម្រាប់ទាំងអស់ $a \in N$, $a = a$, thus $(a, a) \notin R_1$.

3. R_1 គឺស៊ីមេទ្រីពីព្រោះសម្រាប់ទាំងអស់ $a, b \in N$,ប្រសិនបើ $a \neq b$ បន្ទាប់មក $b \neq a$, i.e., ប្រសិនបើ $(a, b) \in R_1$, បន្ទាប់មក $(b, a) \in R_1$ ។

4. R_1 មិនត្រូវបានមិនស៊ីមេទ្រីព្រោះមាន $a, b \in N$, $a \neq b$ និង $b \neq a$ ។ សម្គាល់ៈយើងមិនត្រូវនិយាយថា R_1 មិនអន់ទេពីព្រោះ R_1 គឺស៊ីមេទ្រី។ ពិចារណាអំពីទំនាក់ទំនងទទេវាស៊ីមេទ្រី,ស៊ីមេទ្រី, និងមិនស៊ីមេទ្រី !!

5. R_1 មិនមែនជាថ្នាំប្រឆាំងនឹងមេរោគទេពីព្រោះវាមានភាពខុសគ្នារវាង a និង b ក្នុង N បែបនោះ, $a \neq b$ និង $b \neq a$ ។

6. R_1 មិនមានការផ្លាស់ប្តូរទេពីព្រោះឧទាហរណ៍ (1, 2), (2, 1) $\in R_1$ ប៉ុន្តែ (1, 1) $\notin R_1$។

R2: 1. R_2 គឺដំណើរការឡើងវិញពីព្រោះសំរាប់$a \in N$ទាំងអស់ $a/a = 1 = 2^0$, នេះ (a, a) $\in R_4$ ។

2. R_2 មិនស៊ីមេទ្រីទេពីព្រោះប្រសិនបើ (a, b) $\in R_2$, បន្ទាប់មក $a/b = 2^i$, ដែល $I \geq 0$

ប៉ុន្តែ $b/a = 2^{-i}$ ដែល $-i \leq 0$ ។ ដូច្រ្នះ (b , a) $\notin R_2$

3. R_2 មិនមានលក្ខណៈមិនស្មើគ្នា។ ពីព្រោះប្រសិនបើយើងអោយ a = b យើងអាចមានទាំង (a, b) និង (b, a) នៅក្នុង R_2 ។

4. R_2 គឺជាថ្នាំប្រឆាំងនឹងមេរោគ។ ប្រសិនបើ (a, b) $\in R_2$ និង (b, a) $\in R_2$, យើងមាន $\frac{a}{ab} = 2^i$ និង $\frac{b}{a} = 2^j$, ដែល i , j ≥0 ។ បន្ទាប់មក $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1 = 2^{i+j}$ ។ ដូចេនះ i + j = 0. ព្រោះ i , j ≥0, យើងមាន i = j = 0 ។

ដូចេនះ $\frac{a}{b} = 1$

ដូចេនះ a = b ។

5. R_2 គឺផ្លាស់ប្តូរពីព្រោះប្រសិនបើ (a, b), (b, c) $\in R_2$, បន្ទាប់មក $\frac{a}{b} = 2^i$ និង $\frac{b}{c} = 2^j$, ដែល i, j ≥0។
$\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = 2i + j$, ដែល i + j ≥ 0 ។

ដូច្នេះ (a, c) $\in R_2$ ។

ដំណោះស្រាយទី ៧ ៖ ប្រសិនបើ c + d មិនអីទេនោះវេនណាន់ថេកអាយដូចជាធាត, c + d = 2i ។

1. R គឺជាទំនាក់ទំនងស្មើគ្នាពីព្រោះ

លក្ខណៈខ្លួនឯង: សម្រាប់ទាំងអស់ $a \in N$, a + a = 2a, ដែលសូម្បីតែ ។ ដូច្នេះ (a, a) $\in$ R ។

លក្ខណៈស៊ីមេទ្រី: ប្រសិនបើ a + b គឺសូម្បីតែ, បន្ទាប់មក b + a គឺសូម្បីតែ។ ដូច្នេះសម្រាប់ទាំងអស់ a, b $\in$ N, ប្រសិនបើ (a, b) $\in$R, បន្ទាប់មក (b, a) $\in$ R។

លក្ខណៈឆ្លង: អនុញ្ញាតឱ្យ (a, b) $\in$ R និង (b, c) $\in$ R។ បន្ទាប់មក

$$a + b = 2i \quad (4.1)$$

$$b + c = 2j \quad (4.2)$$

ដែល i និង j ជាចំនួនគត់។ យក (1)+(2) យើងមាន a+2b+c=2i + 2j ។ដូចេនះ a + c = 2 (i + j – b) ។

ដោយសារ i + j – b ជាចំនួនគត់យើងដឹងថា a + c គឺ។ ដូច្នេះ (a,c) $\in$R។

2. មានថ្នាក់ស្មើគ្នាចំនួនពីរគឺៈ

E: = {x: x $\in$ N, x គឺសូម្បីតែ} ។

O: = {x: x $\in$ N, x គឺសេស} ។

ពីព្រោះប្រសិនបើ x $\in$ E និង (x, y) $\in$ R នោះមានន័យថា x + y គឺ។ ប្រសិនបើ x និង x + y គឺសូម្បីតែ, y ត្រូវតែជាគូ។ ដូច្នេះអ៊ី$\in$អ៊ី។ ដូចគ្នានេះដែរប្រសិនបើx $\in$ Oនិង (x, y) $\in$ R នោះមានន័យថា X + y គឺសូម្បីតែ។ ដូច្នេះអ្នកត្រូវតែជាលេខសេសដូចនេះ$\in$O។ ហើយចាប់តាំងពីអ៊ីអូ = អិនមិនមានថ្នាក់ស្មើផ្សេងទៀតទេ។

ដំណោះស្រាយទី ៨៖ R មិនមែនជាទំនាក់ទំនងស្មើភាពគ្នាទេដោយសារកង្វះការឆ្លងកាត់ ។ ព្រោះ x, y, z $\in$ B ។

ឧបមា xនិង yយកគណិតវិទ្យាដាច់ពីគ្នា yនិង zយកភាសាសរសេរកម្មវិធី។ នោះមានន័យថា$(x, y) \in R$និង $(y, z) \in R$ ។ ប៉ុន្តែ នោះមិនមែនមានន័យថា x ប្រើភាសាសរសេរកម្មវិធីទេហើយក៏មិនមែនគណិតវិទ្យាដែរ។ ដូច្នេះ (x, z) គឺមិនចាំបាច់ជាការពិតទេ។

ដំណោះស្រាយទី ៩៖ ដែលបានផ្តល់នូវទំនាក់ទំនងឆ្លុះបញ្ចាំងនិងផ្លាស់ R នៅលើ S ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង: សម្រាប់ទាំងអស់ $a \in S$, $(a, a) \in R$ ពីព្រោះ R ជាការឆ្លុះបញ្ចាំង។

$$(a, a) \in R \Rightarrow (a, a) \in R \text{ និង } (a, a) \in R$$
$$\Rightarrow (a, a) \in Y \text{ ។}$$

លក្ខណៈឆ្លុះ: សម្រាប់ទាំងអស់ $a + b \in S$ ពីនិយមន័យនៃ Y យើងមាន

$$(a, b) \in Y \Rightarrow (a, b) \in R \text{ និង } (b, a) \in R$$
$$\Rightarrow (b, a) \in R \text{ និង } (a, b) \in R$$
$$\Rightarrow (b, a) \in Y \text{ ។}$$

លក្ខណៈឆ្លង: សម្រាប់ទាំងអស់ $a, b, c \in S$ យើងមាន

$$(a, b), (b, c) \in Y \Rightarrow (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \wedge (b, c) \in R \wedge (c, b) \in R$$
$$\Rightarrow (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \wedge (c, b) \in R \wedge (b, a) \in R$$
$$\Rightarrow (a, c) \in R \wedge (c, a) \in R \text{ ពីព្រោះ R គឺជាការផ្លាស់ប្តូរ។}$$
$$\Rightarrow (a, c) \in Y$$

ដំណោះស្រាយទី ១០ ៖

1. សូមអោយ $s=\{1, 2, 3\}$ និងកំណត់ R លើ S ជា $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$ នេះគឺជាឧទាហរណ៍នៃទំនាក់ទំនងដែលមានស៊ីមេទ្រីនិងផ្លាស់ប្តូរប៉ុន្តែមិនមែនទេឆ្លុះបញ្ចាំង។

2. ប្រសិនបើ R ជាឆ្លុះបញ្ចាំងយើងតម្រូវអោយមានរាល់ជាតុទាំងអស់ $a \in A$, (a, a) ត្រូវតែមាននៅក្នុង R។ ប៉ុន្តែប្រសិនបើ R មានភាពស៊ីមេទ្រីនិងផ្លាស់ប្តូរ ដែលបានផ្តល់ឱ្យនៅក្នុង A, (a, b) អាចមិនមែននៅក្នុង R ទេ។ ដូច្នេះយើងមិនអាចធានាបានថា $(b, a) \in R$ និងអនុវត្តឯកសារការផ្លាស់ប្តូរឆ្លងកាត់ដើម្បីសន្និដ្ឋានថា (a, a) គឺស្ថិតនៅក្នុង R ។ នៅក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើប្រសិនបើ $a = 3$ យើងមិន មានទំនាក់ទំនងណាមួយ $(3, b)$ ជា R ដូច្នេះគ្មានវិធីណាដែលយើងអាចអនុវត្តលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីនិងបំលាស់ប្តូររបស់ R ដើម្បីសន្និដ្ឋានថា $(3,3) \in R$។

ដំណោះស្រាយទី ១១ ៖ ទុកឱ្យ $P(x)$ និង $Q(x)$ ជាកត្តាកំណត់ពីរយ៉ាងដូចជា

$\forall x \in S\, [P(x) \rightarrow \neg (Q(x)]$, (4.3)

និង L ជាទំនាក់ទំនងស្មើគ្នាលើ s។ កំណត់ទំនាក់ទំនងRលើ S ដូចខាងក្រោមៈ

$(x, y) \in R \leftrightarrow [((x, y) \in L) \wedge P(x) \wedge Q(y)]$ ។

1. R គឺជាមិនមែនជាឆ្លុះបញ្ចាំងទេព្រោះសំរាប់ទាំងអស់ X ក្នុង S

$(X) - \neg (Q(x) \Rightarrow \neg P(x) \vee \neg Q(x)$

$\Rightarrow \neg (P(x) (Q(x))$ ។

នោះមានន័យថា $(P(x) \wedge Q(x))$ គឺមិនពិតហេតុដូចនេះ $(x, x) \notin R$។

2. R គឺជាមិនស៊ីមេទ្រីទេ។ សន្មត $(x, y) \in R$។ ពីការបែងចែក R យើងដឹងថា

$((x, y) \in L) \wedge P(x) \wedge Q(y)$,

P (x) គឺជាការពិត។ ពី (៤.៣) Q(x) គឺមិនពិត។ ដូច្នេះ $((y, x) \in L) \wedge P(y) \wedge Q(x)$ គឺមិនពិត។ ដូច្នេះ $(y, x) \notin R$ ។

3. R គឺជាការផ្លាស់ប្តូរ។ ឧបមា $(x, y) \in R$ និង $(y, z) \in R$។ ពីការបែងចែក R យើងដឹងថា

$[(x, y) \in L) \wedge P(x) \wedge Q(y)] \wedge [(y, z) \in L \wedge P(y) \wedge Q(z)]$

$\Rightarrow [(x, y) \in L \wedge (y, z) \in L] \wedge P(x) \wedge Q(z)$

$\Rightarrow (x, z) \in L \wedge P(x) \wedge Q(z)$ ពីព្រោះ L ប្តូរ។

$\Rightarrow (x, z) \in R$។

ដំណោះស្រាយទី ១២ ៖ តាង ជាទំនាក់ទទទំនងគោលពីរនៅលើ

1. ព្យញ្ជនៈ P ដែលឪអេសអេសចំនុចដាច់ឆ្ងាយពីគ្នាគឺៈ សម្រាប់ទាំងអស់$a \in A$ $P(a) = (a \in A) \wedge [\forall x \in A ((a, x) \notin R \wedge (x, a) \notin R)]$ ។ a គឺជាចំនុចដាច់ស្រយាលមួយនៃ R ប្រសិនបើនិងមានតែ ប្រសិនបើ p (a) ពិត។

2. យើងចង់បញ្ជាក់ថាប្រសិនបើទំនាក់ទំនងស៊ីមេទ្រីនិងការផ្លាស់ប្តូរដោយគ្មានចំណុចដាច់ឆ្ងាយទេនោះវាក៏មានដំណើរការឡើងវិញដែរ។ ដែលមានទំនាក់ទំនងបែបនេះ R លើ A. ចំពោះ$a \in A$ព្រោះថាមិនមែនជាចំនុចដាច់ពីគ្នាទេត្រូវតែមាន $b \in A$ ដូចជានោះ $(a, b) \in R$ ឬ $(b, a) \in R$. ប្រសិនបើ $(a, b) \in R$, យើងដឹងថា $(b, a) \in R$ ព្រោះRគឺជាអ័ក្សស៊ីមេទ្រី។ ដូចគ្នានេះដែរប្រសិនបើ $(b, a) \in R$ យើងដឹងថា $(a, b) \in R$. ក្នុងករណីណាក៏ដោយតាមរយៈការប្តូរ R យើងមាន $(a, a) \in R$។ ដូច្នេះ R រស់ឡើងវិញ។

ដំណោះស្រាយទី ១៣ ៖ ពិចារណាអំពីម៉ាទ្រីសទំនាក់ទំនងនៃទំនាក់ទំនងស្មើគ្នានៅលើសំណុំ A ជាមួយ ជាតុ n ។

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & \cdots & n \\
\hline
1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\
2 & \cdot & 1 & & & & & \cdot \\
3 & \cdot & & 1 & & & & \cdot \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\
N & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

ដោយសារតែ R គឺជាស៊ីមេទ្រី, លេខនៃលេខ 1s នៅជ្រុងខាងស្តាំខាងលើត្រូវតែស្មើនឹងចំនួនលេខ 1 នៅជ្រុងខាងឆ្វេងខាងក្រោម។ ដូច្នេះចំនួនសរុបនៃលេខ 1 នៅជ្រុងទាំងពីរគឺជាលេខគូ។ សូមឱ្យវាក្លាយជា 2k។ ដោយសារតែR គឺជាកំពុងដំណើរការឡើងវិញរាល់ធាតុទាំងអស់នៅលើអង្កត់ទ្រូងត្រូវតែ 1 ហើយចំនួនសរុបគឺ n ។ ដូច្នេះចំនួនសរុបនៃគូដែលបានបញ្ជាទិញនៅក្នុង R គឺ 2k + n ។ ដូច្នេះបើ n ជាគូបន្ទាប់មក 2k + n ក៏ប៉ុណ្ណឹង ហើយបើ n គឺសេសហើយអញ្ចឹង 2k + n គឺសេស។

ដំណោះស្រាយទី ១៤ ៖ ដែលបានផ្តល់ឱ្យទំនាក់ទំនងគោលពីរ R និងSលើA។

1. ឧបមាថាទាំង R និង S កំពុងដំណើរការ។

បើមានa ∈ Aយើងដឹងថា (a, a) ∈R∧ (a, a) ∈S⇒ (a, a) ∈ (R∩S) ។ ដូច្នេះបើទាំងពីរ R និង S គឺរស់ឡើងវិញអញ្ចឹង R∩S ។

2. ឧបមាថាទាំង R និង S គឺស៊ីមេទ្រី។ សន្មត (x, y) ∈ (R∩S) ។

$$(x, y) \in (R \cap S) \Rightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \in S$$
$$\Rightarrow (y, x) \in R \wedge (y, x) \in S$$
$$\Rightarrow (y, x) \in S \text{ ។}$$

ដូច្នេះបើទាំងពីរ R និង S គឺស៊ីមេទ្រីអញ្ចឹង R∩S។

3. ឧបមាថាទាំង R និង S ជាការផ្លាស់ប្តូរ។ សន្មត (x, y) ∈ (R∩S) និង (y, z) ∈ (R∩S) ។

$(x, y) \in (R \cap S) \wedge (y, z) \in (R \cap S)$

$\Rightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \in S \wedge (y, z) \in R \wedge (y, z) \in S$

$\Rightarrow (x, z) \in R \wedge (x, z) \in S$

$\Rightarrow (x, z) \in (R \cap S)$ ។

ដូច្នេះបើទាំងពីរ R និង S សុទ្ធតែផ្លាស់ប្តូរដូច្នេះR∩Sក៏ដូចគ្នាដែរ។

ដំណោះស្រាយទី ១៥ ៖ ដែលបានផ្តល់ឱ្យទំនាក់ទំនងគោលពីរ R និងSលើA។

1. ឧបមាថាទាំង R និង S កំពុងដំណើរការ។ បើមានa ∈ Aយើងដឹងថា

$(a, a) \in R \wedge (a, a) \in S \Rightarrow (a, a) \in (R \cup S)$ ។

ដូច្នេះបើទាំង R និង S គឺរស់ឡើងវិញអញ្ចឹង∪។

2. ឧបមាថាទាំង R និង S គឺស៊ីមេទ្រី។ សន្មត (x, y) ∈ (R∪S) ។

$(x, y) \in (R \cup S) \Rightarrow (x, y) \in R \vee (x, y) \in S$

$\Rightarrow (y, x) \in R \vee (y, x) \in S$

$\Rightarrow (y, x) \in (R \cup S)$ ។

ដូច្នេះបើទាំង R និង S គឺស៊ីមេទ្រីអញ្ចឹងR∪S។

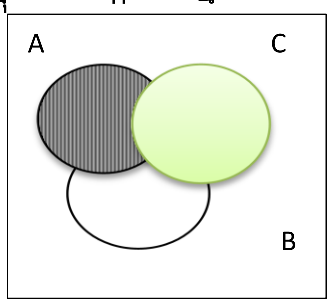
3. ប្រសិនបើទាំង R និង S ជាការផ្លាស់ប្តូរR∪Sមិនចាំបាច់ជាទំនាក់ទំនងផ្លាស់ប្តូរទេ។ យើងអាចមើលឃើញវានៅក្នុងឧទាហរណ៍ខាងក្រោម។ សូមឱ្យ A = {a, b}, និងទំនាក់ទំនង R និង S លើ A ដូចជា៖

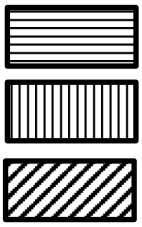
$R = \{(a, b)\}; S = \{(b, a)\}$ ។

ដូច្នេះយើងមាន $R \cup S = \{(a, b), (b, a)\}$ ហើយវាមិនផ្លាស់ប្តូរទេ។ ពីព្រោះ $(a, b), (b, a) \in R$, ប៉ុន្តែ $(a, a) \notin R$ ។ សម្គាល់:ត្រូវប្រាកដថាអ្នកដឹងថាហេតុអ្វីបានជា R និង S ផ្លាស់ប្តូរ។

ដំណោះស្រាយទី ១៦ ៖ ប្រសិនបើយើងចង់អះអាងថាការប្រមូលផ្តុំនៃសំណុំគឺជាភាគនៃសំណុំ A យើងត្រូវប្រាកដថាមាន ៣ ចំណុច។

1. គ្មានឈុតណាមួយនៅក្នុងបណ្តុំគឺទទេ។
2. សហជីពនៃសំណុំនៅក្នុងការប្រមូលគឺស្មើនឹង A.
3. សំណុំនៅក្នុងការប្រមូលត្រូវបានកាត់ចោលទៅវិញទៅមកពេលគឺពួកគេត្រូវបាន disjointed ទៅគ្នាទៅវិញទៅមក ។ ចំពោះបញ្ហានេះដំបូងសូមគូរដ្យាក្រាម Venn ។ វាមិនមែនជាករណីតែមួយនោះទេប៉ុន្តែវានឹងជួយយើងក្នុងការបង្កើតអារម្មណ៍។





$:= (A - C) \cap B$

$:= A - (B \cup C)$

$:= A - C$

1. $-(B \cup C)$, $(A - C) \cap B$, និង$A \cap C$ត្រូវបានផ្តល់ជាការមិនគោរព។ ដូច្នេះយើងត្រូវបង្ហាញថា ២ និង ៣ គឺជារបស់សាតាំង។
2. ដើម្បីបង្ហាញថា $(A - (B \cup C)) \cup ((A - C) \cap B) \cup (A \cap C) = A$:

សូមឱ្យ$a \in (A - (B \cup C)) \cup ((A - C) \cap B) \cup (A \cap C)$ ។ មាន ៣ ករណី៖

(a) $a\ (A - (B \cup C))$

$\Rightarrow (a \in A) \wedge (a \notin (B \cup C))$

$\Rightarrow (a \in A)$

(b) $a \in ((A - C) \cap B)$

$\Rightarrow (a \in (A - C)) \wedge (a \in B)$

$\Rightarrow a \in (A - C)$

$\Rightarrow (a \in A) \wedge (a \notin C)$

$\Rightarrow a \in A$

(c) $a \in (A \cap C)$

$\Rightarrow (a \in A) \wedge (a \in C)$

$\Rightarrow a \in A$។

ដូច្នេះ $((A - (B \cup C)) \cup ((A - C) \cap B) \cup (A \cap C)) \subseteq A$

សូមឱ្យ $a \in A$ ។ ពិចារណាលើករណីពីរខាងក្រោម៖

(a) $a \in C$ បើដូច្នោះមែន $a \in (A \cap C)$ ។

(b) $a \notin C$ មានពីរករណីគឺ: i. $a \in B$

$(a \in A) \wedge (a \notin C) \Rightarrow (a \in (A-C))$ ដូចេនះ $a \in ((A-C) \cap B)$ ។

ii. $a \notin B$

$(a \notin B) \wedge (a \notin C) \Rightarrow (a \in (B \cup C))$ ដូច្នេះ $a \in (A-(B \cup C))$ ។

ពីខាងលើនិងការបែកបាក់សហជីពយើងមាន

$a \in ((A-(B \cup C)) \cup ((A-C) \cap B) \cup (A-C)$

ដូច្នេះ$A \subseteq ((A-(B \cup C)) \cup ((A-C) \cap B) \cup (A \cap C))$ ។

ភស្តុតាងនោះ 2 ។

3. ដើម្បីបញ្ជាក់ថា $(A-(B \cup C))$, $((A-C) \cap B)$, $(A \cap C)$ មានការអាក់អន់ចិត្តទៅវិញទៅមក៖ ប្រយ័ត្ន, $X \cap Y \cap Z = \emptyset$ មិនមានន័យថា X, Y, Z ត្រូវបានអាក់អន់ចិត្តទៅវិញទៅមក។ ដូច្នេះវាមិនជាការលំបាកទេប្រសិនបើយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $(A-(B \cup C)) \cap ((A-C) \cap B) \cap (A \cap C) = \emptyset$។

(a). $a \in (A-(B \cup C))$

$\Rightarrow a \in A \wedge a \notin (B \cup C)$

$\Rightarrow a \in A \wedge a \notin B \wedge a \notin C$

$\Rightarrow a \notin ((A-C) \cap B) \wedge a \notin (A \cap C)$ ។

(b). $a \in ((A-C) \cap B)$

$\Rightarrow a \in (A-C) \wedge a \in B$

$\Rightarrow a \in A \wedge a \notin C \wedge a \in B$

$\Rightarrow a \in A \wedge a \in (B \cup C) \in a \notin (A \cap C)$

$\Rightarrow a \notin (A-(B \cup C)) \wedge a \notin (A \cap C)$ ។

(c). $a \in (A \cap C)$

$\Rightarrow a \in A \wedge a \in C$

$\Rightarrow a \in A \wedge a \in (B \cup C) \wedge a \notin (A-C)$

$\Rightarrow a \notin (A-(B \cup C)) \wedge a \notin ((A-C) \cap B)$ ។ នោះបញ្ជាក់ពីការអះអាង។

ដំណោះស្រាយទី ១៧ ៖

សម្គាល់ ៖ កុំច្រឡំដោយសញ្ញាណ (a, b) R (c, d) ។ (a, b) R (c, d) មានន័យថា $((a, b), (c, d)) \in R$, នៅក្នុងពាក្យផ្សេងទៀត, (a, b) និង (c, d) មានទំនាក់ទំនង R ។ ហើយកំហុសទូទៅមួយទៀតគឺពិចារណា (a, b) ជាឧទាហរណ៍នៃ R ។ (a, b) គ្រាន់តែជាវត្ថុមួយនៅក្នុង $N \times N$ ហើយវត្ថុនេះអាចមានឬមិនមានទំនាក់ទំនង Rទាក់ទងនឹងវត្ថុដទៃទៀតនៅក្នុង $N \times N$ ។ ដូច្នេះប្រសិនបើ $(a, b) \in N \times N$, សេចក្តីថ្លែងការណ៍ $(a, b) \in R$មិនសមហេតុសមផល។

លក្ខណៈខ្លួនឯង: ផ្តល់ឱ្យណាមួយ $(a, b) \in N \times N$ ។ $((a, b), (a, b)) \in R$ ចាប់តាំងពី $ab = ba$ ។ ដូច្នេះ R រស់ឡើងវិញ ។

លក្ខណៈឆ្លុះ: ឧបមា $((a, b), (c, d)) \in R$,

$\Rightarrow ad = bc$

$\Rightarrow cb = da$

$\Rightarrow ((c, d), (a, b)) \in R$។

ដូច្នេះ R ស៊ីមេទ្រី ។

លក្ខណៈឆ្លង: ឧបមា $((a, b), (c, d)) \in R$ និង $((c, d), (e, f)) \in R$,

$\Rightarrow ad = bc \wedge cf = de$

$\Rightarrow adcf = bcde$

$\Rightarrow (af)(dc) = (be)(dc)$

$\Rightarrow af = be$

$\Rightarrow ((a, b), (e, f)) \in R$ ។ R គឺផ្លាស់ប្តូរ ។ ដូច្នេះ R គឺជាទំនាក់ទំនងស្មើគ្នា

ដំណោះស្រាយទី ១៨៖

គ្មាននរណាម្នាក់ក្នុងចំណោមពួកគេគឺជាទំនាក់ទំនងស្មើគ្នាទេ។

R_1: មិនស៊ីមេទ្រី។ $(3, 4) \in R$ ប៉ុន្តែ $(4,3) \notin R$។ សូមកត់សម្គាល់ថា R_1 គឺផ្លាស់ប្តូរ។ គិតថាហេតុអ្វី។

R_2: មិនផ្លាស់ប្តូរ។ $(2, 1) \in R_2$, $(1, 3) \in R_2$ ប៉ុន្តែ $(2, 3) \notin R_2$ ។

R3: មិនស៊ីមេទ្រី។ $(3, 4) \in R_3$ ប៉ុន្តែ $(4, 3) \notin R_3$ ។ R_3 មិនផ្លាស់ប្តូរទេពីព្រោះ $(1, 2) \in R_3$, $(2, 3) \in R_3$ ប៉ុន្តែ $(1, 3) \notin R_3$ ។

ដំណោះស្រាយទី ១៩ ៖ ភាគថាសដែលអាចមាននៃ $\{a, b, c\}$៖

$\{\{a, b, c\}\}$, $\{\{a\},\{b, c\}\}$, $\{\{a, b\},\{c\}\}$, $\{\{b\},\{a, c\}\}$, $\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$ ។

ដំណោះស្រាយទី ២០ ៖

ប្រសិនបើ S មិនមែនជាសំណុំមិនទទេទេនោះ $\{S\}$ គឺជាភាគថាសរបស់ S. ប្រសិនបើ $S = \emptyset$នោះភាគថាសរបស់ S មិនមែន $\{\emptyset\}$ ទេ។ ភាគថាស$\emptyset$គឺ$\emptyset$។

ដំណោះស្រាយទី ២១ ៖

លក្ខណៈខ្លួនឯង : សំរាប់ $a \in N$, $\frac{a}{a} = 1 = 20$ ។ ដូច្នេះ $(a, a) \in R$, ហេតុដូចនេះហើយ R បានជាដំណើរការឡើងវិញ។

លក្ខណៈឆ្លុះ: ឧបមា $(a, b) \in R$ ។

$(a, b) \in R \Rightarrow \exists i \in Z, \frac{a}{b} = 2^i$

$\Rightarrow \exists i \in Z, \frac{b}{a} = 2^{-i}$

$\Rightarrow (b, a) \in R$ ព្រោះ $-i \in Z$ ។

លក្ខណៈឆ្លង: ឧបមា $(a, b), (b, c) \in R$។

$(a, b) \in R \Rightarrow \exists i \in Z, \frac{a}{b} = 2^i$

$(b, c) \in R \Rightarrow \exists j \in Z, \frac{b}{a} = 2^i$

$\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = 2^{i+j}$

ចាប់តាំងពី$i + j \in Z$, ដូច្នេះ $(a, c) \in R$។ ដូច្នេះ Rគឺជាទំនាក់ទំនងស្មើគ្នា។

បើមានលេខធម្មជាតិ x មាន k, $i \in N$ បែបនោះ k មិនអាចបែងចែកបានដោយ 2 និង $x = k2^i$ ។ ចំពោះចំនួនធម្មជាតិ $y = k2^j$ យើងមាន $\frac{x}{y} = 2^{i-j}$ ហើយ $i - j$ គឺជាចំនួនគត់។ ដូច្នេះ $(x, y) \in R$ ពេលគឺ x និង y ស្ថិតនៅកោសិកាតែមួយ។ ដូច្នេះកោសិការនៃអក្សរ R មានដូចខាងក្រោម៖

$\{1 \cdot 2^i \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$,

$\{3 \cdot 2^i \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$,

$\{5 \cdot 2^i \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$,

$\{7 \cdot 2^i \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$,

ដំណោះស្រាយទី ២២ ៖ តាមទ្រឹស្តីបទ 4.1, ភាគថាសនីមួយៗកំណត់ទំនាក់ទំនងស្មើគ្នានៅលើ A ។ ហេតុដូច្នេះបញ្ហានេះពិតជាបញ្ហាដដែល19។ យើងគ្រាន់តែរាយបញ្ជីភាគថាសទាំងអស់ដែលអាចធ្វើបានរបស់ A ។

$\{\{1,2,3\}\}$, $\{\{1\},\{2,3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3\}\}$, $\{\{2\},\{1,3\}\}$, $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.

ដំណោះស្រាយទី ២៣ ៖ សូមអោយ $S = \{a, b, c\}$, និង

$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$

$R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$ ។

ទាំងពីរ R_1 និង R_2 គឺជាទំនាក់ទំនងស្មើគ្នាប៉ុន្តែ$R_1 \cup R_2$មិនមែនទេ។ ដោយសារតែ, $R_1 \cup R_2$គឺមិនផ្លាស់ប្តូរ, ដែលជាកន្លែងដែល $(b, a), (a, c) \in (R_1 \cup R_2)$, ប៉ុន្តែ $(b, c) \notin (R_1 \cup R_2)$ ។

សម្គាល់៖ លទ្ធផលនៅក្នុងបញ្ហាទី 15 មិនបានផ្តល់ចម្លើយដោយផ្ទាល់មកយើងចំពោះបញ្ហានេះទេ។ ទំនាក់ទំនងទាំងពីរដែលបានផ្តល់ឱ្យក្នុងបញ្ហាទី 15 មិនមែនជាទំនាក់ទំនងស្មើភាពគ្នាទេ។

ដំណោះស្រាយទី ២៤ ៖

សូមឱ្យ R1 និង R_2 មានទំនាក់ទំនងតាមលំដាប់ពីរផ្នែកលើS។ សហជីព $R_1 \cup R_2$ អាចមិនមែនជាទំនាក់ទំនង
លំដាប់លំដោយទេពីព្រោះប្រតិបត្តិការសហជីពមិនការពារភាពផ្ទុយគ្នានិងការឆ្លងកាត់។ ពិនិត្យឧទាហរណ៍ខាងក្រោម។

សូមឱ្យ $S = \{a, b, c\}$ និង

$R1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$

$R2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, a), (b, c)\}$.

ទាំង R_1 និង R_2 គឺមានទំនាក់ទំនងតាមលំដាប់ដោយផ្នែកប៉ុន្តែ $R_1 \cup R_2$ មិនមែនទេ។ ដោយសារតែទាំងពីរ (a, b) និង (b, a) ទាំងពីរគឺនៅក្នុង$R_1 \cup R_2$ ប៉ុន្តែ $a \neq b$ ដូច្នេះ$R_1 \cup R_2$ មិនមែនជាថ្នាំប្រឆាំងនឹងមេរោគទេ។ (a, b) និង (b, c) គឺទាំងនៅក្នុង $R_1 \cup R_2$ ប៉ុន្តែ $(a, c) \notin R_1 \cup R_2$ ដូច្នេះ $R_1 \cup R_2$ មិនផ្លាស់ប្តូរទេ។

សម្គាល់៖ ទោះបីជាយើងបានបង្ហាញថាទាំងការប្រឆាំងនិងការឆ្លងកាត់មិនអាចត្រូវបានរក្សាទុកដោយប្រតិបត្តិការសហជីពប៉ុន្តែមួយគឺគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់យើងដើម្បីអះអាងថាទំនាក់ទំនងសណ្តាប់ធ្នាប់ដោយផ្នែកមិនត្រូវបានបិទនៅក្រោមសហជីព។

ដំណោះស្រាយទី ២៥ ៖

តាមទ្រឹស្តីបទជាមូលដ្ឋានសម្រាប់សំណុំក្នុងជំពូកទី ១ វាងាយនឹងយល់ថា៖

លក្ខណៈខ្លួនឯង : សម្រាប់ទាំងអស់$A \in P(N)$, $A \subseteq S$ ។

លក្ខណៈឆ្លុះ: សម្រាប់ទាំងអស់A, $B \in P(N)$, ប្រសិនបើ $A \subseteq B$ នឹង $B \subseteq A$, បន្ទាប់មក $A = B$ ។

លក្ខណៈឆ្លង: សម្រាប់ទាំងអស់A, B, $C \in P(N)$, ប្រសិនបើ$A \subseteq B$ នឹង $B \subseteq C$, បន្ទាប់មក $A \subseteq C$ ។

ដូច្នេះ $\subseteq$ គឺជាទំនាក់ទំនងលំដាប់ផ្នែកលើ $P(N)$ ។

ដំណោះស្រាយទី ២៦ ៖

1. P_2 គឺជាតែមួយគត់ដែលមិនមែនជាចំណែកនៃ S, ពីព្រោះនៅក្នុងនោះ$\{7,4,3,8\} \cap \{1,5,10,3\} \neq \emptyset$ ។

2. P_4 គឺជាការចម្រាញ់របស់ទាំងពីរ P_1 នឹង P_3, ពីព្រោះខ្លួនវាជាចំណែករបស់ S នឹងធាតុទាំងអស់នៃ P_4 គឺជាសំណុំរងនៃធាតុមួយនៅក្នុង P_1 នឹង P_3 ។

ដំណោះស្រាយទី ២៧ ៖

ចំនួននៃការបង្កើតឡើងវិញនៃភាគថាស P គឺជាចំនួននៃវិធីដើម្បីបែងចែកកោសិកាបន្តនៅក្នុង P ។

ស្រទាប់ $\{1, 2, 3\}$មាន 5 វិធី$\{4, 5\}$ មាន 2វិធីនិង $\{6\}$មានផ្លូវមួយ

ដូច្នេះចំនួនសរុបនៃការធ្វើឡើងវិញរបស់ P គឺ $5 \times 2 \times 1 = 10$ ។

ដំណោះស្រាយទី ២៨ ៖

ដោយសារ $\emptyset$ ត្រូវបានយកចេញពី Q តាមនិយមន័យយើងត្រូវតែបញ្ជាក់ប៉ុណ្ណឹង $\cup Q = A$និងសំរាប់ $p \in Q$ និង $q \in Q$ ប្រសិនបើ $p \neq q$ បន្ទាប់មក $p \cap q = \emptyset$ ។

1. ដើម្បីបញ្ជាក់ $\cup Q = A$ ពិចារណា ។

$a \cup Q \Leftrightarrow \exists i, j\ [a \in (C_i \cap D_j)]$ ដោយនិយមន័យនៃ Q

$\Leftrightarrow \exists i, j\ [a \in C_i$ និង $a \in D_j]$ ដោយនិយមន័យនៃ$\cap$

$\Leftrightarrow a \in A$ ចាប់តាំងពី P_1 និង P_2 គឺជាផ្នែកពីរនៅលើកA ។

2.ដើម្បីបញ្ជាក់សម្រាប់ទាំងអស់ $p, q \in Q$ ប្រសិនបើ $p \neq q$ បន្ទាប់មក $p \cap q = (C_i \cap D_j)$ និង $q = (C_k \cap D_l)$ ។ ឧបមា $p \neq q$ ។ បើដូច្នេះវាត្រូវតែជាករណីនោះ$i \neq k$ ឬ $j \neq l$។ ចាប់តាំងពី P_1 និង P_2 គឺជាភាគថាសពីរយើងមានប្រសិនបើ $i \neq k$ បន្ទាប់មក $C_i \cap C_k = \emptyset$; ប្រសិនបើ $j \neq l$ ពេលនោះ $D_j \cap D_l = \emptyset$ ។

ដូច្នេះ $p \cap q = (C_i \cap D_j) \cap (C_k \cap D_l)$

$= (C_i \cap C_k) \cap (D_j \cap D_l)$

$= (\emptyset \cap (D_j \cap D_l))$ ឬ $((C_i \cap C_k) \cap \emptyset)$

$= \emptyset$ ។

ចាប់ពីលេខ 1 និង 2, Q ជាចំណែកនៃA។

លើសពីនេះទៀត, ដែលបានផ្តល់ឱ្យ $(C_i \cap D_j) \in Q$, ចាប់តាំងពី $(C_i \cap D_j) \subseteq C_i$,វាធ្វើតាមនោះ Q ជាការចងចាំឡើងវិញនៃ P_1 ។ ដូចគ្នានេះដែរ $(C_i \cap D_j) \subseteq D_j$ ហេតុដូចនេះ Q គឺជាការបង្ហាញឡើងវិញនៃ P_2 ។

ជំពូកទី៥.អនុគមន៍

5.1. និយមន័យ ទ្រឹស្តី និងវិធារ

អនុគមន៍ គឺជាពាក្យមួយដែលគេប្រើញឹកញាប់បំផុតនៅក្នុងគណិតវិទ្យា។ ឧទាហរណ៍ $f(x) = x^2, g(x,y) = x^2 + y^2, \ldots$ គឺជាអនុគមន៍ ដែលយើងបានសិក្សាតាំងពីមធ្យមសិក្សាម្លេះ ។ ជាទូទៅ f និង g គឺជាអនុគមន៍ដែលត្រូវបានប្រើដើម្បីកំណត់អនុគមន៍។ x^2 និង $x^2 + y^2$ គឺជាតួនៃអនុគមន៍ f និង g រៀងគ្នាដែលបង្ហាញពីអត្ថន័យនៃអនុគមន៍។ x និង y ត្រូវបានគេហៅថាកំណើន។ ក្នុងជំពូកនេះយើងនឹងណែនាំពាក្យបច្ចេកទេសផ្លូវការនិងអនុគមន៍សំខាន់ៗសម្រាប់អនុគមន៍ និងសិក្សាលក្ខណៈសម្បត្តិធម្មតាមួយចំនួននៃអនុគមន៍។

5.1.1. និយមន័យ

និយមន័យ៖ 5.1. តាង S និង T ជាពីរសុំណុំ។ យើងអាចសរសេរបានថា $F: S \to T$និយាយថា f គឺជាការគូសនៃធាតុនៃសំណុំ S ទៅធាតុនៃសំណុំ T។សំណុំ S ត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាសំណុំ **ដែន** ហើយសំណុំ T ត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាដែនកំណត់សំណុំរង។ តាង $x \in S, f(x) = y$ មានន័យថាបើយើងឲ្យតំលៃអនុគមន៍ f នៅ x នោះ តំលៃ y នឹងទទួលបាន។

និយមន័យ៖ 5.2. $F : S \to T$ គឺជាអនុគមន៍ តំណាងអោយការគូរដែលប្រើ ហើយមានតែជាតុមួយនៃសំណុំ T។ សំរាប់$x \in S$ តម្លៃ $f(x) \in T$ត្រូវបានគេស្គាល់ថាជារូបភាពនៃ x ។

វិធារ៖ ជាយូរមកហើយ"អនុគមន៍" "អនុវត្តន៍" " ភាពត្រូវគ្នា" និង" បំលែង" គឺជាពាក្យដែលមានលក្ខណៈដូចគ្នាដែលមានគំនិតដូចគ្នា។ យើងជ្រើសរើសប្រើមុខងារនៅក្នុងការពិភាក្សារបស់យើង ។

និយមន័យ៖ 5.3. $F : S \to T$ គឺជាអនុគមន៍ និង $X \in S$ ។ ប្រសិនបើមាន $y \in T$ នោះ $f(x) = y$ យើងនិយាយថាអនុគមន៍ f ត្រូវបានចាត់ទុកជា x ។

និយមន័យ៖ 5.4. $F : S \to T$ គឺជាអនុគមន៍ ។ ប្រសិនបើ f ត្រូវបានកំណត់នៅរាល់ $x \in S$ បន្ទាប់មកអនុគមន៍ បែបនេះត្រូវបានគេហៅថាសរុប ។ ប្រសិនបើ $x \in S$ នោះសម្រាប់រាល់ $y \in T, f(x) \# y,$ នៅក្នុងពាក្យផ្សេងទៀត, f មិនត្រូវបានគិតជា x, បន្ទាប់មកមុខងារបែបនេះត្រូវបានគេហៅថាដោយផ្នែក។

វិធារ៖ យើងពិចារណាតែអនុគមន៍សរុបនៅក្នុងជំពូកនេះប៉ុណ្ណោះ។ ដូច្នេះអនុគមន៍ទាំងអស់នៅក្នុងការពិភាក្សាខាងក្រោមនេះសំដៅទៅលើ" **អនុគមន៍សរុប** " ។

វិធារ៖ អនុគមន៍គឺជាករណីពិសេសនៃទំនាក់ទំនង។ វាក៏អាចធ្វើទៅបានផងដែរដើម្បីបដិសេធគំនិតនៃអនុគមន៍ទាក់ទងនឹងទំនាក់ទំនង។ អនុគមន៍ f គឺជាទំនាក់ទំនងមួយ $f \subset S \times T$ ដែលបំពេញជាលក្ខណៈពិសេស, ប្រសិនបើ $(x,y) \in f$ និង $(x,z) \in f$, បន្ទាប់មក $y = z$ ។ លក្ខន្តិកៈនេះនិយាយថាវាមានតំលៃពិសេសមួយដែលត្រូវបានផ្សារភ្ជាប់ជាមួយនឹងអាគុយម៉ង់នីមួយៗ។ គេអាចសង្កេតឃើញថាលក្ខខ័ណ្ឌនេះគឺស្មើទៅនឹងការអនុវត្តន៍ ២។

និយមន័យ៖ 5.5. $F : S \rightarrow T$ គឺជាអនុគមន៍ ។ ដូចដែលបានបញ្ជាក់មុននេះ S ត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាដែននៃ f ហើយ T ត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាដែននៃ F ។ $\{y : \exists x \in S\}$ នោះ $f(x) = y$ និង $y \in T$ ។ ត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាជួរ។

និយមន័យ៖5.6. $F : S \rightarrow T$ គឺជាអនុគមន៍ ។ ប្រសិនបើ f គ្រប់លក្ខណៈនៅពេលណាដែល $f(x_1) = y$ និង $f(x_2) = y$, បន្ទាប់មក $x_1 = x_2$ ។ បន្ទាប់មក f ត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាអនុគមន៍ មួយទៅមួយ។ ក្នុងតក្កវិទ្យា$\forall x_1, x_2 \in S\,[(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)]$ ។ អនុគមន៍ មួយទៅមួយត្រូវបានគេស្គាល់ថាជា ការអនុវត្តមួយទល់មួយ។

និយមន័យ៖ 5.7. $F : S \rightarrow T$ គឺជាអនុគមន៍ ។ ប្រសិនបើជួរនៃ $f = T$ បន្ទាប់មក f ត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាអនុគមន៍បញ្ចូល។ ក្នុងតក្កវិជ្ជា $\forall y \in T\, \exists x \in S\,[f(x) = y]$ ។ អនុគមន៍ មួយទៅមួយត្រូវបានគេស្គាល់ថាជា អនុវត្តពេញ។

និយមន័យ៖ 5.8. $F : S \rightarrow T$ គឺជាអនុគមន៍ ដែលមានពីមួយទៅមួយនិងទៅលើបន្ទាប់មកអនុគមន៍នេះត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាការធ្វើឱ្យមានទំនាក់ទំនងគ្នា។

និយមន័យ៖ 5.9. $F : S \rightarrow S$ គឺ មួយទល់មួយ និង S គឺ កំណត់ បន្ទាប់មកអនុគមន៍បែបនេះ f ត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាការអនុញ្ញាតិអោយ S ។

និយមន័យ៖ 5.10. ចាត់ទុកអនុគមន៍ $F : S \rightarrow S$ ។ (ចំណាំថាសំណុំដែននិងកូដុនគឺដូចគ្នា។) អនុគមន៍ នេះមានន័យថា $f(x) = x$ សម្រាប់តម្លៃទាំងអស់នៃ $x \in S$ ត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាអនុគមន៍ សម្គាល់។ វាជាទម្លាប់ក្នុងការបញ្ជាក់អនុគមន៍ អត្តសញ្ញាណដូច I ឬគឺពិតប្រសិនបើយើងចង់ចងចាំសំណុំដែលអនុគមន៍ អត្តសញ្ញាណត្រូវបានកំណត់។

និយមន័យ៖ 5.11. ឧបមាថាមានអនុគមន៍ ពីរ $f: S \rightarrow T$ និង $g: T \rightarrow U$, (ចំណាំថាកូដុននៃ F និងដែន g គឺដូចគ្នា)។ បន្ទាប់មកយើងចាត់ទុកសមាសភាពនៃអនុគមន៍ទាំងពីរ $g \circ f : S \rightarrow U$ដូចខាងក្រោម៖

$\forall x \in S,\ (gof)(x) = g(f(x))$។

និយមន័យ៖ 5.12. ឧបមាថា $f: S \rightarrow T$ គឺជាអនុគមន៍ ។អនុគមន៍ច្រាសរបស់ f គឺជាអនុគមន៍ $g: T \rightarrow S$ ដែលលក្ខណសម្បត្តិពីរដូចខាងក្រោមគឺ $f og = i_s$ និង $gof = i_t$ ។ វាជាទម្លាប់ក្នុងការដាក់អនុគមន៍ច្រាសបញ្ច្រាស f ដោយ f^{-1} ។

និយមន័យ៖ 5.13. ឧបមាថា $f: S \rightarrow T$ គឺជាអនុគមន៍ ។ អនុគមន៍ ថ្មីដែលប្រើលក្ខណៈសម្បត្តិរបស់ f ត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាអនុគមន៍ ដែលបង្កើតឡើង (បង្កើតដោយ f) ។ យើងមានអនុគមន៍ ពីរដូចខាងក្រោម។ សូមឱ្យ $P(S)$ និង $P(S)$ តាងសំណុំថាមពលរបស់ S និង T រៀងគ្នា។

១.អនុគមន៍ $b\hat{f} : P(S) \rightarrow P(T)$ ត្រូវបានបង្កើតឡើងដោយ F និងត្រូវបានគេចាត់ទុកថាជា: គ្រប់ $A \subseteq S$

$\hat{f}(A) = \{y : y = f(x)$ដែល $x \in A\}$ ។

២. អនុគមន៍ : $P(T) \rightarrow P(S)\, f - 1: P\,(T) \rightarrow P\,(S)$ ត្រូវបានបង្កើតឡើងដោយ F និងត្រូវបានគេចាត់ទុកថាជា B ⊆T ។$\hat{f}^{-1}$ (B) ={x : x∈S នោះ $f(x) \in B\}$។

និយមន័យ៖ 5.14. តាង Sជា សុំណំ $A \subseteq S$ និង F ជាអនុគមន៍ដូចខាងក្រោម៖

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

បន្ទាប់មក f ត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាអនុគមន៍លក្ខណៈនៃសំណុំ Aកំណត់សំគាល់ធម្មតាសម្រាប់អនុគមន៍លក្ខណៈគឺ χA

5.1.2. **ទ្រឹស្តីបទ**

ទ្រឹស្តីបទ 5.1. ការប្រាសនៃអនុគមន៍ $f: S \rightarrow T$ មាន f គឺមួយទល់មួយ ។

ទ្រឹស្តីបទ 5.2. ប្រសិនបើ $f: S \rightarrow S$ គឺជាការអនុញ្ញាតបន្ទាប់មក$f^{-1}: S \rightarrow S$ ក៏ជាអនុញ្ញាតផងដែរ។

ទ្រឹស្តីបទ 5.3. ប្រសិនបើ $f: S \rightarrow S$ និង $g: S \rightarrow S$ គឺជាការចំលាស់បន្ទាប់មក $fo\, g$និងgofគឺជាចំលាស់។

ទ្រឹស្តីបទ 5.4. តាង $f: X \rightarrow Y, A \subseteq X$ និង $B \subseteq Y$ យើងមានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម៖

១. $f^{-1}\,(b\,f(A)) \supseteq A$

២. $\hat{f}(\,f^{-1}\,(B)) \subseteq B$

៣. $f^{-1}\,(\hat{f}\,(A)) \subseteq A$ នៅពេល F គឺជា

៤. $f(b\,f - 1(B)) = B,$ នៅពេល F គឺជាអនុវត្តន៍ពេញ

5.2.**គោលការណ៍ប្រហោងឬប្រឡោះ**

គោលការណ៍ ប្រឡោះ គឺជាឧបករណ៍ងាយស្រួលនិងមានឥទ្ធិពលក្នុងការសិក្សាគណិតវិទ្យាផ្សំ។ ឧទាហរណ៍ភស្តុតាងឌីជីថលជាច្រើននៃទ្រឹស្តីបទក្នុងរ៉ាម៉ាស្សីទ្រឹស្តីគឺផ្អែកលើគោលការណ៍។ ពិចារណា ដែលអាចយល់បានដូចខាងក្រោម៖

គោលការណ៍ប្រឡោះ៖ ប្រសិនបើយើងចង់បែងចែកប្រឡោះ k ទៅ ប្រឡោះ និង $k > n$ បន្ទាប់មកត្រូវតែមាន ប្រឡោះ ដែលមានប្រឡោះយ៉ាងហោចណាស់ពីរ។

គោលការណ៍នេះផ្អែកលើការសង្កេតសំខាន់មួយនៃអនុគមន៍ មួយទៅមួយ។ " ទុកអោយ S និង T ជាពីរឈុតហើយ $|S| < |T|$ មានន័យថាចំនួនធាតុនៅក្នុង S គឺតិចជាងចំនួននៅ T។ បន្ទាប់មកវាមិនអាចទៅរួចទេក្នុងការដាក់មុខងារមួយទៅមួយពី S ទៅ T ។ "

ទ្រឹស្តីបទ 5.5. តាង $S = \{1,2,\ldots,9\}$ ។ សំណុំរងនៃធាតុទាំងប្រាំមួយរបស់ S ត្រូវតែមានយ៉ាងហោចណាស់ពីរធាតុដែលមានផលបូកស្មើនឹង ១០ ។

ដំណោះស្រាយ ៖ សុំណំ $S = \{1,2,\ldots,9\}$ ត្រវបានបែងចែកដូចខាងក្រោម៖

$$\{1,9\},\{2,8\},\{3,7\},\{4,6\},\{5\}$$

តាមគោលការណ៍របស់ទ្រុងសត្វព្រាបប្រសិនបើចំនួន 6 ត្រូវបានជ្រើសរើសពី S បន្ទាប់មកយ៉ាងហោចណាស់មានកោសិកាមួយត្រូវចូលរួមចំណែកចំនួន 2 ។ ច្បាស់ណាស់ផលបូកនៃលេខទាំងពីរគឺ ១០ យោងទៅតាមចំណែករបស់យើង។

ទ្រឹស្តីបទ 5.6. តាង $x_0, x_1, x_1, \ldots\ldots, x_n^2$ ជាលេខនៃលេខខុសគ្នា $x^2 + 1$ ។ បន្ទាប់មកត្រូវតែមានលេខបន្តបន្ទាប់នៃលេខ $n + 1$ ដែលមានការកើនឡើងឬថយចុះ។ នោះគឺមានលំដាប់ $x_{io}, x_{i1}, \ldots, x_{in}$ នោះ $i_0 < i_1 < \cdots < i_n$ និង $x_{i0} < x_{i1} < \ldots < x_{in}$ ឬ $x_{i0} > x_{i1} > \ldots > x_{in}$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖ ចំពោះ x_i នីមួយៗនៅក្នុងលំដាប់តំរូវអោយ (a_i, b_i) ជាគូនៃលេខដូចគ្នានោះ a_i គឺជាប្រវែងនៃការបន្តកើនឡើងវែងបំផុតដែលបញ្ចប់ដោយ x_i និង b_iគឺជាប្រវែងនៃការថយចុះបន្តបន្ទាប់ដែលបញ្ចប់ដោយ x_i ។ យើងសង្កេតឃើញថាបើ $0 \le i,j \le n$ និង $i\ 6 = j$,បន្ទាប់មក $(ai, bi)\ 6 = (aj, bj)$ ។ ដោយសារយើងមានលេខ $x^2 + 1$ តាមលំដាប់លំដោយ វាមិនអាចទៅរួចទេក្នុងការភ្ជាប់រាល់លេខទាំងអស់នៅក្នុងលំដាប់លេខរៀងនៃលេខនីមួយៗគឺតិចជាង n ។ **សំគាល់:** ចំនួនគូដែលអាចមានពីរលេខពី $\{1,2,\ldots n\}$ គឺ n^2 ។ ដូច្នេះត្រូវតែមាន x_iដែលជាចុងបញ្ចប់នៃការកើនឡើងឬថយចុះជាបន្តបន្ទាប់នៃប្រវែងយ៉ាងតិច $n + 1$ ។

5.3.**ការកំណត់សម្គាល់អាសុីមតូត**

នេះគឺជាផ្នែកយើងណែនាំសញ្ញាណសំខាន់មួយនៅក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រកុំព្យូទ័រ។ វាគឺអំពីសំណុំនៃអនុគមន៍ ដែលត្រូវបានគេចាត់ទុកថាសមមូលនៅក្នុងបរិបទនៃការវិភាគស្មុគស្មាញ។យើងប្រើអនុសញ្ញាខាង

ក្រោមនៅទូទាំងផ្នែកនេះ។ យើងប្រើ $f, g,$ ឬ h ដើម្បីតាងអនុគមន៍ ពី N ទៅ $N.P$ និង Q ជាការប៉ាន់ស្មានមួយកន្លែងលើ N ។ m,n,x,y ហើយចំនុចទាំងនេះមានអក្សរតូចលើជួរអថេរ N .តាង R^+សំណុំនៃចំនួនពិតវិជ្ជមានទាំងអស់និង $a,b,c,$ ជួរលើ R^+ ។ បន្ថែមពីលើបរិមាណស្តង់ដារក្នុងតក្កវិជ្ជា

តក្កវិទ្យាដែលបានណែនាំក្នុងជំពូកទី ២ យើងនាំមកនូវការកត់សម្គាល់ដូចខាងក្រោមដើម្បីភាពងាយស្រួល។

និយមន័យ5.15.

$$\overset{\infty}{\forall} xP(x) \quad \triangleq \quad \exists n \forall x[x \ge n \to P(x)]$$

$$\overset{\infty}{\exists} xP(x) \quad \triangleq \quad \forall n \exists x[(x \ge n) \wedge P(x)].$$

និយមន័យ 5.16.

ទ្រឹស្តីបទ 5.7. $\overset{\infty}{\forall} x[P(x) \wedge Q(x)] \iff [\overset{\infty}{\forall} xP(x) \wedge \overset{\infty}{\forall} xQ(x)]$.

ដំណោះស្រាយ 5.7. សម្រាប់ $(\Rightarrow)$ ទិសដៅ :

$$\begin{aligned}
&\overset{\infty}{\forall} x[P(x) \wedge Q(x)] \\
&\iff \exists n\forall x\left[(x \geq n) \to [P(x) \wedge Q(x)]\right] \\
&\iff \exists n\forall x\left[\neg(x \geq n) \vee [P(x) \wedge Q(x)]\right] \\
&\iff \exists n\forall x\left[[\neg(x \geq n) \vee P(x)] \wedge [\neg(x \geq n) \vee Q(x)]\right] \\
&\iff \exists n\left[\forall x[\neg(x \geq n) \vee P(x)] \wedge \forall x[\neg(x \geq n) \vee Q(x)]\right] \\
&\implies \exists n\forall x[\neg(x \geq n) \vee P(x)] \wedge \exists n\forall x[\neg(x \geq n) \vee Q(x)] \\
&\iff \exists n\forall x[(x \geq n) \to P(x)] \wedge \exists n\forall x[(x \geq n) \to Q(x)] \\
&\iff \overset{\infty}{\forall} xP(x) \wedge \overset{\infty}{\forall} xQ(x).
\end{aligned}$$

សម្រាប់ $(\Leftarrow)$ ទិសដៅ :យើងនឹងប្រើអត្តន័យដូចខាងក្រោម:

$$[(A \to C) \wedge (A \to B) \wedge (C \to D)] \implies [A \to (B \wedge D)]$$

$$\overset{\infty}{\forall} xP(x) \wedge \overset{\infty}{\forall} xQ(x)$$

$\iff \exists n\forall x[(x \geq n) \to P(x)] \wedge \exists n\forall x[(x \geq n) \to Q(x)]$

$\iff \forall x[(x \geq n0) \to P(x)] \wedge \forall x[(x \geq n1) \to Q(x)]$, ដែល $n_0, n_1 \in N$

$\iff \forall x[[(x \geq n0) \to P(x)] \wedge [(x \geq n1) \to Q(x)]]$

យើងមានពីរករណី៖ $n_0 \geq n_1$ និង $n_0 < n_1$ ឥឡូវយើងទៅពិចារណាករណីទីមួយ ៖

ឧបមាថា $n_0 \geq n_1$។ ក្នុងករណីនេះយើងមាន $(x > n_0) \to (x > n_1)$ ។ ដូច្នេះ

$\forall x[[(x \geq n0) \to P(x)] \wedge [(x \geq n1) \to Q(x)]]$

$\iff \forall x[[(x > n0) \to (x > n1)] \wedge [(x \geq n0) \to P(x)] \wedge [(x \geq n1) \to Q(x)]]$

$\iff \forall x[(x > n0) \to (P(x) \wedge Q(x))]$

$\iff \exists n\forall x[(x > n) \to (P(x) \wedge Q(x))]$

ក្នុងករណីផ្សេងទៀត $n_0 < n_1$កស្តុតាងគឺស្រដៀងគ្នា។

ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយតាមច្បាប់ $\infty\forall$ លើ $\vee$ មិនមាន លក្ខណៈដូចខាងក្រោមទេ។ យើងដំណោះស្រាយលំហាត់៖

ឧទាហរណ៍ ៖ ១.បញ្ជាក់ថា $\overset{\infty}{\forall} x[P(x) \vee Q(x)] \Longleftarrow [\overset{\infty}{\forall} xP(x) \vee \overset{\infty}{\forall} xQ(x)]$

២. បញ្ជាក់ថា $\overset{\infty}{\forall} xP(x) \iff \overset{\infty}{\exists} x\neg P(x)$

៣. មិនបញ្ជាក់ថា $\overset{\infty}{\forall} x[P(x) \vee Q(x)] \implies [\overset{\infty}{\forall} xP(x) \vee \overset{\infty}{\forall} xQ(x)]$

៤. បញ្ជាក់ថា $\overset{\infty}{\exists} x[P(x) \vee Q(x)] \iff [\overset{\infty}{\exists} xP(x) \vee \overset{\infty}{\exists} xQ(x)]$

$\overset{\infty}{\exists} x[P(x) \wedge Q(x)] \implies [\overset{\infty}{\exists} xP(x) \wedge \overset{\infty}{\exists} xQ(x)]$.

៥. បញ្ជាក់ថា

៦.មិនបញ្ជាក់ថា $\overset{\infty}{\exists}\, x[P(x) \wedge Q(x)] \impliedby [\overset{\infty}{\exists}\, xP(x) \wedge \overset{\infty}{\exists}\, xQ(x)]$.

តាមទ្រឹស្តី យើងអាចផ្លាស់ប្តូរអនុគមន៍មួយកន្លែងបានយ៉ាងច្រើនតាមវិធីដែលអាចធ្វើទៅបាន។ ទស្សនៈនេះនាំឱ្យមានការប្រើសញ្ញាណអាស៊ីមតូតដែលយើងធ្វេសប្រហែសចំណុចជាច្រើនដែលអនុគមន៍នេះអាចលើលក្ខណៈល្អ ៗ មួយចំនួន។ $O\,(g), \Omega\,(g)$, និង $g\,(g)$ គឺជាសំណុំអនុគមន៍ពី N ដល់ N ដូចខាងក្រោម។

និយមន័យ៖ 5.17. $f \in O(g) \iff \exists\, c \overset{\infty}{\forall}\, n[f(n) \leq cg(n)]$

និយមន័យ៖ 5.18. $f \in \Omega(g) \iff \exists\, c \overset{\infty}{\forall}\, n[cg(n) \leq f(n)]$

និយមន័យ៖ 5.19. $f \in \Theta(g) \iff \exists\, c_1 \exists\, c_2 \overset{\infty}{\forall}\, n[c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)]$

ទ្រឹស្តីបទ 5.8. $f \in \Theta(g) \iff [f \in O(g) \wedge f \in \Omega(g)]$

ដំណោះស្រាយ៖

$$\begin{aligned}
f \in \Theta(g) &\iff \exists c_1 \exists c_2 \overset{\infty}{\forall}\, x[c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)] \\
&\iff \exists c_1 \exists c_2 \overset{\infty}{\forall}\, x\left[[c_1 g(x) \leq f(x)] \wedge [f(x) \leq c_2 g(x)]\right] \\
&\iff \exists c_1 \exists c_2 \left[\overset{\infty}{\forall}\, x[c_1 g(x) \leq f(x)] \wedge \overset{\infty}{\forall}\, x[f(x) \leq c_2 g(x)]\right] \\
&\iff \exists c_1 \exists c_2 \overset{\infty}{\forall}\, x[c_1 g(x) \leq f(x)] \wedge \exists c_1 \exists c_2 \overset{\infty}{\forall}\, x[f(x) \leq c_2 g(x)] \\
&\iff \exists c \overset{\infty}{\forall}\, x[cg(x) \leq f(x)] \wedge \exists c \overset{\infty}{\forall}\, x[f(x) \leq cg(x)] \\
&\iff f \in \Omega(g) \wedge f \in O(g).
\end{aligned}$$

ទ្រឹស្តីបទ 5.9. $[f_1 \in O(g) \wedge f_2 \in O(g)] \iff (f_1 + f_2) \in O(g)$.

ដំណោះស្រាយ សម្រាប់សញ្ញា $(\Rightarrow)$ គេបាន៖

$$\begin{aligned}
&f_1 \in O(g) \wedge f_2 \in O(g) \\
&\iff \exists c \overset{\infty}{\forall}\, x[f_1(x) \leq cg(x)] \wedge \exists c \overset{\infty}{\forall}\, x[f_2(x) \leq cg(x)] \\
&\iff \overset{\infty}{\forall}\, x[f_1(x) \leq c_1 g(x)] \wedge \overset{\infty}{\forall}\, x[f_2(x) \leq c_2 g(x)] \\
&\iff \overset{\infty}{\forall}\, x[f_1(x) \leq c_1 g(x) \wedge f_2(x) \leq c_2 g(x)] \\
&\implies \overset{\infty}{\forall}\, x[(f_1(x) + f_2(x) \leq (c_1 + c_2) g(x)] \\
&\iff \exists c \overset{\infty}{\forall}\, x[(f_1(x) + f_2(x) \leq cg(x)] \\
&\iff (f_1 + f_2) \in O(g).
\end{aligned}$$

សម្រាប់សញ្ញា $(\Leftarrow)$ គេបាន៖ទ្រឹស្តី 5.10.

$$[f_1 \in \Theta(g) \wedge f_2 \in \Theta(g)] \implies (f_1 + f_2) \in \Theta(g).$$

$$
\begin{aligned}
&(f_1 + f_2) \in O(g) \\
&\iff \exists c \overset{\infty}{\forall} x[(f_1(x) + f_2(x) \leq cg(x)] \\
&\iff \exists c \overset{\infty}{\forall} x[f_1(x) \leq cg(x) \wedge f_2(x) \leq cg(x)] \\
&\iff \exists c \left[\overset{\infty}{\forall} x[f_1(x) \leq cg(x)] \wedge \overset{\infty}{\forall} x[f_2(x) \leq cg(x)] \right] \\
&\implies \exists c \overset{\infty}{\forall} x[f_1(x) \leq cg(x)] \wedge \exists c \overset{\infty}{\forall} x[f_2(x) \leq cg(x)] \\
&\iff f_1 \in O(g) \wedge f_2 \in O(g).
\end{aligned}
$$

ដំណោះស្រាយ

$$
\begin{aligned}
&f_1 \in \Theta(g) \wedge f_2 \in \Theta(g) \\
&\iff \exists c_1 \exists c_2 \overset{\infty}{\forall} x[c_1 g(x) \leq f_1(x) \leq c_2 g(x)] \wedge \exists c_1 \exists c_2 \overset{\infty}{\forall} x[c_1 g(x) \leq f_2(x) \leq c_2 g(x)] \\
&\iff \overset{\infty}{\forall} x[a_1 g(x) \leq f_1(x) \leq b_1 g(x)] \wedge \overset{\infty}{\forall} x[a_2 g(x) \leq f_2(x) \leq b_2 g(x)] \\
&\iff \overset{\infty}{\forall} x[a_1 g(x) \leq f_1(x) \leq b_1 g(x) \wedge a_2 g(x) \leq f_2(x) \leq b_2 g(x)] \\
&\iff \overset{\infty}{\forall} x[(a_1 + a_2) g(x) \leq (f_1(x) + f_2(x)) \leq (b_1 + b_2) g(x)] \\
&\iff \exists c_1 \exists c_2 \overset{\infty}{\forall} x[c_1 g(x) \leq (f_1(x) + f_2(x)) \leq c_2 g(x)] \\
&\iff (f_1 + f_2) \in \Theta(g).
\end{aligned}
$$

ទ្រឹស្តី 5.11.

$$f \in \Theta(g) \iff g \in \Theta(f).$$

$$
\begin{aligned}
f \in \Theta(g) &\iff \overset{\infty}{\forall} x\, [c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)] \\
&\iff \overset{\infty}{\forall} x\, [[c_1 g(x) \leq f(x)] \wedge [f(x) \leq c_2 g(x)]] \\
&\iff \overset{\infty}{\forall} x \left[[g(x) \leq \frac{1}{c_1} f(x)] \wedge [\frac{1}{c_2} f(x) \leq g(x)] \right] \\
&\iff \overset{\infty}{\forall} x \left[\frac{1}{c_2} f(x) \leq g(x) \leq \frac{1}{c_1} f(x) \right] \\
&\iff g \in \Theta(f).
\end{aligned}
$$

លំហាត់ទី1 បញ្ជាក់

$$[f \in \Theta(g) \wedge g \in \Theta(h)] \implies f \in \Theta(h). \tag{5.1}$$

ទ្រឹស្តីបទ 5.12.

$$f \in \Theta(g) \iff \Theta(f) = \Theta(g)$$

ដំណោះស្រាយ៖ ដំណោះស្រាយនៃ $(\Rightarrow)$

សម្រាប់ទិសដៅ $(\Rightarrow)$ $f \in \Theta(g)$ ។ យើងនឹងបង្ហាញ $\Theta(f) \subseteq \Theta(g)$ និង $\Theta(f) \supseteq \Theta(g)$ ។

១. តាង $h \in \Theta(f)$ ។ $h \in \Theta(f)$ និង $f \in \Theta(g)$ ដោយ (5.1) , យើងមាន $h \in \Theta(g)$។

ដូច្នេះ $\Theta(f) \subseteq \Theta(g)$ ។

២. តាង $h \in \Theta(g)$ ។ $f \in \Theta(g)$, ដោយទ្រឹស្តី ១១ , យើងមាន $g \in \Theta(f)$,ដោយ (5.1) , $h \in \Theta(g)$ និង

$g \in \Theta(f)$ នាំអោយ $h \in \Theta(g)$ ។ ដូច្នេះ $\Theta(g) \subseteq \Theta(f)$ ។

ដូច្នេះ $\Theta(g) = \Theta(f)$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 5.13. តាង $a, b \in R^+$ បន្ទាប់មក $a^n \in \Theta(b^n)$ <==> $a = b$

ដំណោះស្រាយ ដោះស្រាយនៃ $(\Rightarrow)$ ដូចខាងក្រោម ៖

សម្រាប់ $(\Rightarrow)$ ឧបមាថា $a^n \in \Theta(b^n)$

$$\begin{aligned} a^n \in \Theta(b^n) &\implies \overset{\infty}{\forall} x\,[c_1 b^n \le a^n \le c_2 b^n] \\ &\implies \overset{\infty}{\forall} x\,[\log(c_1 b^n) \le \log a^n \le \log(c_2 b^n)] \\ &\implies \overset{\infty}{\forall} x\,[(\log c_1 + n\log b) \le n\log a \le (\log c_2 + n\log b)] \\ &\implies \overset{\infty}{\forall} x\left[\left(\frac{\log c_1}{n} + \log b\right) \le \log a \le \left(\frac{\log c_2}{n} + \log b\right)\right] \end{aligned}$$

ប្រសិនបើ $x \approx \infty$, បន្ទាប់មក $\frac{logc1}{n} \approx \frac{logc2}{n} \approx 0$ ។ ដូច្នេះ នៅពេលដែល $x \approx \infty$

យើងមាន $logb \le loga \le logb$

ដូច្នេះ $a = b$ ។

5.4.លំហាត់

ចំណោទទី1 : រាយអនុគមន៍សរុបនិងផ្នែកទាំងអស់ជាមួយដែន {1,2} និងកូដុន $\{a, b\}$ ។

ចំណោទទី2 : តើមួយណាជាអនុគមន៍ ពេញ និង មិនពេញ ?

១. $g : R \to R, g(x) := 2x+1$

២. $h : N \times N, h(x) := x^2 + 2$

ចំណោទទី3 : តាង D= {1,2,3,4} គឺជាដែន និង N គឺជា កូដុននៃអនុគមន៍ f_1 និង f_2 មានន័យដូចខាងក្រោម ៖

១.ដោយ b ក្នុង D, $f_1(b) := b2$

២. ដោយ b ក្នុង D , $f_2(b)$:= តូចជាងតួរចែក $3b + 1$

បញ្ជាក់ f_1 និង f_2 មានទំនាក់ទំនងគ្នា ។

ចំណោទទី4 : តាង A ជាសុំណំ ។ បើគិតទៅលើទំនាក់ទំនង A និងអនុគមន៍មកពី A ទៅ A ជាសុំណំគូលើ A ដែលមានអនុគមន៍ពី A ដល់ A ។

ចំណោទទី5 : តាង f និង g ជាអនុគមន៍មិនពេញ , $f: X \to Y$ និង $g: W \to X$ សម្រាប់សុំណំ W, X, Y បញ្ជាក់ សមាសភាព $f \circ g$ គឺមួយទល់មួយ ។

ចំណោទទី6 : គេអោយអនុគមន៍ពីរ $f: D \to Y$, និង $g: Y \to W$ នោះ D, Y, W ជាសុំណំ

និង$g^\circ f$ គឺមួយទល់មួយ ។ ប៉ុន្តែ fនិង g មួយទល់មួយដែរ។

ចំណោទទី7 : តាង f ជាអនុគមន៍ $f: X \to Y , A \subseteq X , B \subseteq X$ ។ បញ្ជាក់ថា $\hat{f}(A \cap B) \subseteq \hat{f}(A) \cap \hat{f}(B)$

ចំណោទទី8 : តាង A និង B គឺជាសុំណំរងនៃ X ដែល $A \subseteq B$ ។បញ្ជាក់ថា $\hat{f}(A) \subseteq \hat{f}(B)$ ។

ចំណោទទី9 : តាង $B \subseteq Y$ និង $A = \hat{f}^{-1}(B)$។ ដែល $\hat{f}(A) \subseteq B$ ។ហើយក្នុងករណីខ្លះសមភាពមិនមានទេ

ចំណោទទី10 : តាង f គឺជាអនុគមន៍ និង តាង A គឺជាសុំណំរងនៃដែន នៃ f ។

សម្មត់ថា $\hat{f}^{-1}\left(\hat{f}(A)\right) \subseteq A$ ។ បញ្ជាក់ថា $A = \hat{f}^{-1}\left(\hat{f}(A)\right)$។

ចំណោទទី11 : តាង $f: X \to Y$ គឺជាអនុគមន៍
១.បញ្ជាក់ថា ប្រសិនបើ f គឺជាអនុគមន៍មួយទល់មួយនិង $A \subseteq X$,បន្ទាប់មក $\hat{f}^{-1}\left(\hat{f}(A)\right) = A$
ពន្យល់ កន្លែងណាដែលយើងប្រើសម្រាប់អនុវត្តមួយទល់មួយ ។
២.បញ្ជាក់ថា ប្រសិនបើ f គឺជាអនុគមន៍ពេញ និង $B \subseteq Y$, បន្ទាប់មក $\hat{f}\left(\hat{f}^{-1}(B)\right) = B$
ពន្យល់ កន្លែងណាដែលយើងប្រើសម្រាប់អនុវត្តពេញ ។

ចំណោទទី12 : តាងអនុគមន៍ $f^\circ f^i \ldots f$ គឺតាង f^i ។ ប្រសិនបើ $i = 0$ បន្ទាប់មក f^i ត្រូវបានស្គាល់ថាជាអនុគមន៍ ។ តាងf គឺជាចម្លាស់ នៃការកំណត់សុំណំ X ។ $a \in X$ កំណត់ដោយ $S(a) \coloneqq \{f^i(a), i = 0,1,2, \ldots\}$។ កំណត់ទំនាក់ទំនង R លើ X តាមវិធានការ : សម្រាប់ $a,b \in X, aRb \Leftrightarrow b \in S(a)$។ បញ្ជាក់ថា R សមមូលលើ X ។

ចំណោទទី13 : ឧបមាថាមានមនុស្ស n បានតម្រង់ជួរតាមលំដាប់លំដោយ។ បង្ហាញថាអ្នកអាចទទួលបាននូវការបញ្ជាទិញផ្សេងទៀតតាមលំដាប់លំដោយដោយមានកន្លែងជួញដូរមនុស្សនៅជាប់គ្នាពីរ។

ចំណោទទី14 : បញ្ជាក់ថាក្នុងក្រុមនៃមនុស្ស៧០០នាក់ ត្រូវតែមានមនុស្ស ២ នាក់ដែលមានលេខរៀងទី ១ និងអាទិសង្កេតចុងក្រោយ។

ចំណោទទី15 : បញ្ជាក់ថា នៅឯពិធីជប់លៀងណាមួយត្រូវតែមានមនុស្សពីរនាក់ដែលបានចាប់ដៃគ្នាដែលមានចំនួនអ្នកផ្សេងទៀតមានវត្តមានដូចគ្នា។

5.5.**ដំណោះស្រាយ**

ដំណោះស្រាទី1៖

$$
\begin{aligned}
&f_0 = \emptyset, && f_5 = \{(1,a),(2,b)\} \\
&f_1 = \{(1,a)\}, && f_6 = \{(1,b),(2,a)\} \\
&f_2 = \{(1,b)\}, && f_7 = \{(1,a),(2,a)\} \\
&f_3 = \{(2,a)\}, && f_8 = \{(1,b),(2,b)\} \\
&f_4 = \{(2,b)\}
\end{aligned}
$$

ចំណាំ៖ f_0, f_1, f_2 , f_3 ហើយនិងf_4 គឺជាអនុគមន៍មួយផ្នែក និង f_5, f_6, f_7 និង f_8 គឺជាអនុគមន៍រួម។ ហើយចំណែកឯ ∅ គឺជាអនុគមន៍មួយផ្នែកទៀត។

ដំណោះស្រាយទី2៖

១. $g: R -> \ Rx \in R, g(x) := 2x + 1$

(a). g គឺជាអនុវត្តន៍ព្រោះគ្រប់ $x1, x2 \in R$,

$x_1 \neq x_2 \ => \ 2x_1 + 1 \neq 2x_2 + \ \ 2 \ => g(x_1) \ \neq g(x_2)$.

(b). g ជាអនុវត្តន៍ចំពោះ y∈R

$=> \ \exists x \in R, x = \ (y-1)/2,$

$=> \ \exists x \in R, f(x) = y$ ។

២. $h: N \to N. \ \forall \chi \in N, h(\chi) := \ x_2 + 2.$

(a). h គឺជាអនុវត្តន៍ព្រោះ $x_1, x_2 \geq 0$,

$x_1 \neq x_2 + => \ x1 + 2 \ \neq \ x_2 + 2$

$=> h(x_1) \ \neq \ h(x_2)$ ។

ហើយ x_1, x_2∈N =>x_1, x_2 ≥ 0។

(b). h មិនមែនជាអនុវត្តន៍ចំពោះ $y \in N$ យើងមិនអាចរក $x \in N$ ដែល $f(x) \ = \ y$ បានទេ។ ឧទាហរណ៍ ប្រសិនបើ $y = 1$ ហើយ xមិនមែនជារបស់ N ដែល f$(x) \ = \ x_2 + 2 \ = \ 1$។

ដំណោះស្រាយទី3៖

១. $f1 \ = \ \{(1,1), (2,4), (3,9), (4,16)\}$ ។

b	1	2	3	4
b2	1	4	9	16

២. $f2 \ = \ \{f(1, 2), (2, 7), (3, 2), (4, 13)\}$

b	1	2	3	4
3b + 1	4	7	10	13
f2	2	7	2	13

ចំណាំ៖ សំរាប់កម្មវិធីជាច្រើននៅក្នុង វិទ្យាសាស្រ្តកុំព្យូទ័រនិង គណិតវិទ្យាតាមការសន្និដ្ឋាន យើងចាត់ទុកលេខ ២ ជាលេខបឋមតូចបំផុត។ ប៉ុន្តែប្រសិនបើយើងពិនិត្យមើលនិយមន័យនៃលេខបឋម ៖ p គឺជាលេខបឋម ប្រសិនបើ p គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននិង p ជាចំនួនអាចចែកដាច់នឹងលេខ ១ និង ខ្លួនវាតែប៉ុណ្ណោះ។ អ្នកអាចពិចារណា ១ ជាចំនួនបឋមតូចបំផុតជាង p។

$f2 = \{(1,1),(2,1),(4,1)\}$

ដំណោះស្រាយទី4៖ គេឱ្យ A ជាសំណុំមួយ $\{a,b,c,\dots\}$ ដែល R ជាទំនាក់ទំនងសមភាពតែមួយប៉ុណ្ណោះនៅលើ A ដែល A ជាអនុគមន៍ដែលបានមកពី A គឺ៖ $\{(a,a),(b,b),(c,c),\dots\}$។

ហេតុអ្វី? កម្រិតនៃទំនាក់ទំនងជាមួយអនុគមន៍មួយ ដែលមានទំនាក់ទំនងតំលៃតែមួយពោលគឺប្រសិនបើ $(x;\ y)$ និង $(x;\ z)$ ក្នុងទំនាក់ទំនងដែល $y = z$ ។ ហើយ R គឺជាសមភាពនៃទំនាក់ទំនងមួយ។ យើងដឹងហើយថាជាគុមួយ $a\in A, (a,a) \in R$ ។ ដូច្នេះ $(a,x)\notin R$ លើកលែងតែ $a = x$ ។

ដំណោះស្រាយទី5៖ គេឱ្យ f និង g ជាអនុវត្តន៍អនុគមន៍នៃ $f\colon X\to Y$ ហើយ $g\colon W\to X$ ដែលបង្កើតដោយ W,X,Y។ ដំបូងយើងត្រូវបញ្ជាក់ថា $f\circ g$ ៖ $W\to X$ គឺជាការរកឃើញដ៏ល្អបំផុតតែមួយគត់ អ្វីដែលយើងត្រូវធ្វើគឺដើម្បីបង្ហាញថា $f\circ g$ជាទំនាក់ទំនងនៅលើ $W, X\ ,Y$ គឺមានតម្លៃតែមួយ។គេឱ្យ:$w_1,w_2 \in W$។ ប្រសិនបើ $w_1{=}w_2$ ហើយ $g(w_1) = g(w_2\,)$ ហើយនិង $f(g(w_1)), f(g(w_2))$ ហើយគេកំណត់យក $f(g(w_1)) = f(g(w_2))$ព្រោះ g គឺបានកំណត់ដោយអនុគមន៍។ ហើយប្រសិនបើ $g(w_1) = g(w_2)$ ហើយ $f(g(w_1)), f(g(w_2))$ ដែលក្រោយពីបានកំណត់ $f(g(w_1)) = f(g(w_2))$ព្រោះ f គឺបានកំណត់ដោយអនុគមន៍។ ដូច្នេះ ប្រសិនបើ $w_1 = w_2$ ហើយ $f\circ g(w_1), f\ o\ g(w_2)$ ដែលក្រោយពីបានកំណត់ $f\circ g\,(w_1) = f\ o\ g(w_2)$ ។មានន័យថា $f\circ g$ គឺជាអនុគមន៍មកពី W ទៅ Y។ដើម្បីបញ្ជាក់ថា $f\circ g$ គឺជាអនុវត្តន៍ ដែល $x,y\in W$។ ឧបមាថា $x \neq y$ ហើយ $f\circ g\ (\mathrm{x}), f\circ g\ (y)$ ដែលបានកំណត់។ $x \neq y =>$ $g(x) \neq g(y)$ g គឺជាអនុវត្តន៍

$=> f(g(x)) \neq f(g(y))$ f គឺជាអនុវត្តន៍ដូចនេះ $f\circ g$ គឺជាអនុវត្តន៍។

ដំណោះស្រាយទី6៖ តាង $D = \{1,2\}, Y = \{a,b,c\}, W = \{\alpha,\beta\}$។ ដំណាត់ដោយៈ

$f\colon D\to Y$ ដែល $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{f(x)}}|\frac{1}{\mathrm{a}}|\frac{2}{\mathrm{b}}$

$g\colon Y\to W$ ដែល $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{g(x)}}|\frac{\mathrm{a}}{\alpha}|\frac{\mathrm{c}}{\beta}$

យើងមានៈ

$f\circ g : D\to W$ ដែល $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{(g\ o\ f)(x)}}|\frac{1}{\alpha}|\frac{2}{\beta}$

f មិនមែនជា អនុវត្តន៍ ហើយ g ក៏មិនមែនជាអនុវត្តន៍ ប៉ុន្តែ $f\circ g$ ជាអនុវត្តន៍។

ដំណោះស្រាយទី7៖ តាង $f : X \to Y$ ហើយ $A \subseteq X, B \subseteq X$ ។

$Y \in f(A \cap B) \Rightarrow \exists x \in (A \cap B), f(x) = y$

$\Rightarrow \exists x, x \in A, x \in B, f(x) = y$

$\Rightarrow \exists x \in A, f(x) = y$ ហើយ $\exists x \in B, f(x) = y$

$\Rightarrow y \in f(A)$ ហើយ $y \in f(B)$

$\Rightarrow y \in (f(A) \cup f(B)$

ដូនេះ $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$។

ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយការដាក់បញ្ចូលបញ្ច្រាសវិញគឺមិនពិតទេ។ ឧទាហរណ៍ៈ កំណត់ $f :$ $Z \to Z, f(x) = x2$។

តាង $A = \{-2\}, B = \{2\}$, យើងមាន $f(A) = \{4\}, f(B) = \{4\}, f(A) \cap f(B) = \{4\}, f(A \cap B) = \varnothing$។

ដូចនេះជាទូទៅ $f(A \cap B) \not\supseteq f(A) \cap f(B)$

ដំណោះស្រាទី8៖ តាង $y \in \hat{f}(A)$ ។

$Y \in \hat{f}(A) \Rightarrow \exists x \in A, f(x) = y$

$\Rightarrow \exists x \in B, f(x) = y$ ព្រោះ $A \subseteq B$

$\Rightarrow y \in \hat{f}(B)$ ។

ដូចនេះ $\hat{f}$ (A) $\subseteq \hat{f}$(B) ។

ដំណោះស្រាយទី9៖ រឿងតែមួយគត់ដែលត្រូវធ្វើជាមួយលំហាត់នេះគឺនិយមន័យនៃ $\hat{f}$(A) ហើយ f̂-1(B) យើងត្រូវយកចិត្តទុកដាក់និងនិយមន័យដូចខាងក្រោម៖

តាង $f : X \to Y, A \subseteq X$ ហើយ $B \subseteq Y$។

$\hat{f}$ (A) = {b| ∃a ∈ A, f(a) = b}។

$\hat{f} - 1(B) := \{a|\ a \in X, f(a) \in B\}$។

បម្រាប់ $A = \hat{f} - 1(B)$ ។ ដើម្បីបញ្ជាក់ថា$\hat{f}(A) \subseteq B$, តាង $b \in \hat{f}(A)$។

$B \in \hat{f}(A) \Rightarrow \exists a \in A, f(a) = b$។

រក a ព្រោះ $A = \hat{f} - 1(B)$ យើងដឹងថា $a \in \hat{f} - 1(B)$។ និយមន័យទំព័រ(5.3)

$a \in \hat{f}-1(B) \Rightarrow f(a) \in B$។

ដូចនេះ $b \in B$។

ប្រសិនបើ f មិនមែនជាអនុវត្តន៍ ដែល $\hat{f}$ (A) $\supseteq$ B វាមិនចាំបាច់តែជាការពិតទេ។ ឧទាហរណ៍: កំណត់

$f: \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$,

$f(0) = 0$,

$f(1) = 0$។

តាង B = {0,1}, A = f̂-1(B)។ យើងមាន A = {0,1},f̂(A) = {0}

ដូចនេះ B $\not\subseteq$ f̂(A)។

ដំណោះស្រាយទី10៖ តាង f : X → Y, A ⊆ X។ ដំបូងយើងត្រូវបញ្ជាក់ថា A ⊆ f̂-1(f̂(A))។

$a \in A \Rightarrow f(a) \in \hat{f}(A)$

$\Rightarrow a \in \hat{f}-1(\hat{f}(A))$

ដូចនេះ A ⊆ f̂-1(f̂(A))។

ប្រសិនបើ f̂-1(f̂(A)) ⊆ A បម្រាប់ស្រាយបញ្ជាក់នៅព័រ(៥.៤)ដែល ទើបតែបានបង្ហាញយើងអាចសន្និដ្ឋានថាA = f̂-1(f̂(A))។

ដំណោះស្រាយទី11៖

១. ជាមួយនឹងការពិត (៥.៤) ដែលយើងបានបង្ហាញឱ្យឃើញនៅក្នុងលំហាត់មុននេះតាមពិតការស្នើសុំដើម្បីបង្ហាញថាប្រសិនបើ f ជាការអនុវត្តន៍និង A គឺសំណុំរងនៃ X នោះ $\hat{f}-1(\hat{f}(A)) \subseteq A$ ។

ឧបមាថា f ជាអនុវត្តន៍

$a \in \hat{f}-1(\hat{f}(A)) \Rightarrow f(a) \in \hat{f}(A)$

$\Rightarrow \exists x' \in A, f(a) = f(x')$

$\Rightarrow x' \in A, a = x'$ fជាអនុវត្តន៍

$\Rightarrow a \in A$។

ដូចនេះ $\hat{f}$-1($\hat{f}$ (A)) ⊆ A។ បម្រាប់ (៥.៤)

$\hat{f}$-1($\hat{f}$ (A)) = A។

២. ដំបូងយើងត្រូវលទ្ធផលដូចនិង(៥.៤)

$\hat{f}(\hat{f}$-1(B)) $\subseteq$ B។

$b \in \hat{f}(\hat{f}-1(B)) \Rightarrow \exists a \in \hat{f}-1(B), f(a) = b$

$\Rightarrow \exists a \in X, f(a) \in B, f(a) = b$

$\Rightarrow b \in B$។

នោះបង្ហាញឱ្យឃើញ(៥.៥) គោលបំណងនៃ f គឺការអេនុវត្តន៍។

$b \in B \Rightarrow \exists a \in X, f(a) = b$។

ព្រោះ f គឺជាអនុវត្តន៍នៃបម្រាប់ b ក្នុងដែនកំណត់ យើងអាចរក a ឃើញក្នុងដែនដែរ ហើយ $f(a) = b$ ដែល a បានមកពីនិយមន័យក្នុង(៥.២)ដែរយើងបានស្រាយបញ្ជាក់រួចមកហើយ។

$a \in \hat{f}^{-1}(B) \wedge f(a) = b \Rightarrow f(a) \in \hat{f}(\hat{f}^{-1}(B)) \wedge f(a) = b$

$\Rightarrow b \in \hat{f}(\hat{f}^{-1}(B))$

ដូចនេះ $B \subseteq \hat{f}(\hat{f}^{-1}(B))$ (៥.៥) ហើយ f គឺជាអនុវត្តន៍នៃបម្រាប់ $\hat{f}(\hat{f}^{-1}(B)) = B$។

ដំណោះស្រាយទី12៖

និយមន័យ $f^0 = i_x$ ។ ដូចនេះ $a \in X$។

$a = f^0(a), a \in S(a)$។

ដូចនេះ $(a,a) \in R$។

ភាពស៊ីគ្នា : បម្រាប់ $a,b \in X$, ហើយ (a,b) $\in$ R ,i ដែល i≥0,b = f_i(a)

ចូរពិចារណាដូចខាងក្រោម៖

$f^0(a), f^1(a), \ldots, f^i(a), \ldots, f_j + k(a), \ldots$

ពេលដែល $f_0\ (a) = a$ ហើយ $f_i(a) = b$។ ព្រោះ f គឺជាកាអនុញ្ញាត្តិលើ X យើងអាចរក j,k ដូច

$\mathrm{I} \leq j, 0 \leq k, f^j(a) = f^{j+k}(a) = c$។

ពេលដែល $c \in x^1$ ឥឡូវនេះយើងចង់បង្ហាញថាអាកស្ថិតនៅក្នុងវដ្ត

$f^i(a), f^j + 1(a), \ldots f^j + k(a)$។

សម្រាប់លំដាប់ពីណាមួយ តាង

$a^0, a^1, \ldots, a^n = b^n, b^1, \ldots, b^n$ ប្រសិនបើ $a^0 = b^0, a^1 = b^1$ ហើយ $a^n = b^n$។

ដោយវិធី ឧបមាថា $a \not\in \{ f^i(a), f^j + 1(a), \dots, f^j + k(a) \}$

វាមាន ២ ករណីៈ

ករណីទីមួយៈ $j \le k$ ព្រោះ f គឺជាអនុវត្តន៍ $f(a) = f(b)$ មានន័យថា $a = b$។ ដោយសន្មតថា $f^j(a) = f^i + k(a) = c$ យើងមានៈ

$$f^j(a) = f^j + k(a) \Rightarrow f(f^{j-1}(a)) = f(f^{j+k-1}(a))$$

$$\Rightarrow f^{j-1}(a) = f^{k+j-1}(a)$$

$$\Rightarrow f^{j-2}(a) = f^{k+j-2}(a)$$

$$\Rightarrow f^1(a) = f^{k+1}(a)$$

$$\Rightarrow f^0(a) = f^k(a)$$ ។

ដូចនេះ $f^k\ (a) = f^0(a) = a$ ហើយ $f^0(a),\ f^1(a), \dots, f^j(a) = f^k(a), f^{k+1}(a), \dots\ f^j + k(a)$។

យើងអាចសន្មតក្នុងករណីទីមួយបានថា $j \le k \le j + k$ ដោយដឹងថា $a \in \{f^j(a), f^j + k(a)\}$។

ទាំងនេះគឺជា Contradiction(ទំនាស់)។

ករណីទីពីៈ $k < j$ ដូចគ្នាដែលបើ f ជាអនុវត្តន៍ ដែលមានដូចខាងក្រោមៈ

$$f^j(a) = f^{j+k}(a) = c \Rightarrow f^{j-1}(a) = f^{j+k-1}\ (a)$$

$$\Rightarrow f^{j-2}(a) = f^{j+k-2}(a)$$

$$\Rightarrow f^{j-k}(a) = f^j(a)$$ ។

ដូចនេះយើមាន

$$f^{j-k}(a), f^{j-k+1}(a), \dots, f^j(a) \equiv f^j(a), f^{j+1}(a), \dots\ f^{j+k}(a)$$ ។

ពេលសែល $f^{j-k} = f^j(a) = c$ ហើយ $0 < j - k$ តាមការកាសន្មត

$$a \not\in \{f^j(a), f^{j+1}(a), \dots f^{j+k}(a)\}$$

$$\Rightarrow a \not\in \{f^{j-k}(a), f^{j-k+1}(a), \dots, f^{j+k}(a)\}$$ ។

ប្រសិនបើ $j - k$ ធំជា k ហើយ អាគុយម៉ង់របស់វារហូតដល់ n។ យើងមាន

$$f^{j-nk}(a), f^{j-nk+1}(a), \dots, f^{j-nk+k}(a) \equiv f^{j-nk+k}(a), f^{j-nk+1}(a), \dots, f^{j-nk+2k}(a)$$

ពេល $j - nk \le k$ យើងដឹងថា $fj - nk(a), fj - nk + 1(a), \dots, f^{j-nk+k}(a)$

$$\equiv f^{j-nk+k}(a), f^{j-nk+k+1}(a), \dots\ f^{j-nk+2k}(a)$$

$$\equiv f^j(a), f^{j+1}(a), \dots\ f^{j+k}(a)$$ ហើយ $a \not\in \{ f^{j-nk}(a), f^{j-nk+1}(a), \dots, f^{j-nk+k}(a)\}$។

បន្ទាប់មកយើងប្រើអាគុយម៉ង់ដូចទៅនិងករណីទី១ យើងនិងមាន

$$f^0(a), f^1(a), \ldots, f^{j-nk}(a) \equiv f^k(a), f^{k+1}(a), \ldots, f^{k+1}(a), \ldots, f^{j-nk+k}(a)$$។

$$a \in \{ f^{j-nk}(a), f^{j-nk+1}(a), \ldots, f^{j-nk+k}(a)\}$$

$$\Rightarrow a \in \{f^j(a), f^{j+1}(a), \ldots, f^{j+k}(a)\}$$។

នោះនាំឱ្យមាន Contradiction។

ដំណោះស្រាយទី13៖ ប្រសិនបើយើងធ្វើការពិសោធន៍យើងនឹងមិនមានការពិបាកទេក្នុងការឃើញថាយើងអាចធ្វើការតម្រង់ជួរមនុស្សដោយផ្លាស់ប្តូរមនុស្សពីរនាក់ជាប់គ្នាជាបន្តបន្ទាប់។ បញ្ហាគឺថាតើត្រូវបង្ហាញវាជាផ្លូវការយ៉ាងដូចម្តេច។ វាពិតជាអ្វីដែលយើងព្យាយាមរៀននៅក្នុងថ្នាក់នេះ។ ដើម្បីបញ្ចប់ដំណោះស្រាយការងារផ្ទះសម្រាប់ថ្នាក់នេះខ្ញុំសូមបញ្ជាក់វាដោយការណែនាំគណិតវិទ្យាលើចំនួនមនុស្សតម្រង់ជួរ។

ដំបូងបង្អស់សូមចាត់ថ្នាក់មុខងារដូចខាងក្រោម។ សម្រាប់ x, y,

$$f_{x,y(a)}\begin{cases} y \text{ ប្រសិនប់ } a = x; \\ x \text{ ប្រសិនបើ } a = y; \\ a \text{ បើមិនដូច្នេះទេ} \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយទី14៖ ចំនួនបន្សំដែលអាចធ្វើបានទាំងអស់ដំបូងបង្អស់និងអាទិសង្កេតចុងក្រោយគឺ

$26 \times 26 = 676$

តាមគោលការណ៍ទ្រង់ព្រាបការចាត់តាំងមនុស្ស700 នាក់ទៅ 676 អាទិទេពអាទិទេពត្រូវតែណែនាំយ៉ាងហោចណាស់មនុស្ស 2 នាក់ដែលមានអាទិទេពដូចគ្នា។

ដំណោះស្រាយទី15៖ ឧបមាថាមានពិធីជប់លៀងជាមួយមនុស្ស n ។ យើងអាចពិចារណាករណីពីរខាងក្រោម។

ករណីទី ១៖ រាល់ដងខ្លួនប្រាណបានចាប់ដៃគ្នា។ បន្ទាប់មកចំនួនមនុស្សដែលអាចធ្វើទៅបានសម្រាប់មនុស្សម្នាក់ៗដែលបានចាប់ដៃជាមួយគឺ 1,2,3, … , n – 1 ។ រាងកាយនីមួយៗទទួលបានលេខពីលេខដែលអាចមាន។ យើងមានមនុស្ស n, និង n – លេខ។ ដោយគោលការណ៍ព្រាបយ៉ាងហោចណាស់មានចំនួនមួយត្រូវបានចាត់ឱ្យមនុស្សពីរនាក់។

ករណីទី ២៖ មានមនុស្សម្នាក់ដែលមិនចាប់ដៃជាមួយអ្នកដទៃ។ ក្នុងករណីនេះលេខដែលអាចកើតមានក្លាយជា $0,1,2,\ldots,n-2$ សូមកត់សម្គាល់ថា $n-1$ មិនត្រូវបានអនុញ្ញាតទេបើមិនដូច្នោះទេមានមនុស្សម្នាក់បានចាប់ដៃជាមួយអ្នករាល់គ្នានៅក្នុងពិធីជប់លៀងហើយនោះផ្ទុយ ការសន្មត់។ ដូចករណីទី ១ យើងមានមនុស្ស n និងលេខ n ១ ។ ដោយគោលការណ៍ព្រាបយ៉ាងហោចណាស់មានចំនួនមួយត្រូវបានចាត់ឱ្យមនុស្សពីរនាក់។

ជំពូកទី៦.ចំនួនគត់រីឡាទីហ្វ

ជាការពិតក្នុងការនិយាយថាគំនិតនៃចំនួនគត់គឺជាគំនិតតំបូងបំផុតដែលត្រូវបានមនុស្សគ្រប់រូបចាប់យក។យើងអាចរៀបរាប់បានភ្លាមៗបន្ទាប់ពីយើងស្ទើតែនិយាយនូវអាយុ ៣ឬ ៤ឆ្នាំ។ ក្នុងរយៈពេលពីរបីឆ្នាំតាមរយៈការអប់រំមនុស្សគ្រប់គ្នានឹងរៀនមានជំនាញបានត្រឹមត្រូវនៅក្នុងការធ្វើប្រតិបត្តិការមូលដ្ឋានលើចំនួនគត់ ដូចជា ប្រមាណវិធី បូក ដក គុណ ចែក ជាដើម។ អាចនិយាយបានថាប្រមាណវិធី លេខនព្វន្ធមូលដ្ឋានគ្រឹះទាំង៤ ដែលយើងទើបតែបានលើកឡើងគឺមានច្រើន និងគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ប្រើប្រាស់ក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ទ្រឹស្តីបទមួយចំនួនស្តីពីការសិក្សាពីចំនួនគត់ត្រូវបានមានការរីកចម្រើនហួសពីការអនុវត្តប្រចាំថ្ងៃ។ តាមពិតអរិយធម៌ជាច្រើនបានបង្កើតឡើងដោយឯករាជ្យនូវវិធីសាស្រ្តមេកានិចមួយចំនួនសម្រាប់ការការដោះស្រាយបញ្ហាផ្សេងៗដែលបានទាក់ទងនឹងចំនួនគត់តាំងពីតំបូងមកម្លេះ។ វត្ថុបូរាណភាគច្រើនត្រូវបានរកឃើញរូបរាងភាគច្រើនគឺតាមរយៈគណិតវិទូដែលបានធ្វើការស្ម័គ្រចិត្ត ហើយគេបានហៅអ្នកជំនាញគណិតវិទ្យាសម្រាប់គោលបំណងខាងវិញ្ញាណ។ នៅទីនោះថ្មីៗនេះជាមួយនឹងការអភិវឌ្ឍ ផ្នែកកុំព្យូទ័រទំនើប ទ្រឹស្តីបទលេខបានប្រែលក្លាយជាឧបករណ៍ដែលមិនអាចខ្វះបាននៅក្នុងកម្មវិធីសំខាន់ៗជាច្រើន ដូចជា ទ្រឹស្តីបទ គ្រីប និង កូដជាដើម។ ដោយសារតែទ្រឹស្តីបទត្រូវបានវិវត្តទៅជាសាខាឯករាជ្យ និងស៊ីជុំរៅផ្នែកគណិតវិទ្យា ហើយវាពិតជាមានប្រយោជន៍ ដើម្បីយើងសិក្សាលើមុខវិជ្ជនេះម្តងទៀត និងវិភាគលក្ខណៈនៃគណិតវិទ្យាដែលបានជម្រុញឲ្យមានការសិក្សាតាំងតែពីដើមរៀងមក។

6.1 **អនុគមន៍ឆ្នុះ**

តាំង R គ្រុបចំនូនលេខទាំងអស់, Zជាចំនួនគត់ទាំងអស់, នឹង N ចំនួនគត់ធម្មជាតិ. ដោយសន្មតិកម្ម 0 ∈/N. នៅក្នុងទ្រឹស្តីពួកយើងសិក្សាពីរចំនូនគត់.ពូកយើងប្រើប្រាស់អនុគម៌ ពីរដើម្បីកំណត់ចំនួនជាច្រើនទៅជាចំនួនគត់ តាំង t ∈ R.

និយមន័យ អនុគមន៍តូចបំផុត និងតូចបំផុតតាងដោយ តាំង t ∈ R.

- [t] គឺជាលេខគត់ធំបំផុត a នោះ $a \le t$
- [t] គឺជាលេខសេសតូចបំផុត a នោះ $t \le a$

ឧទាហរណ៍

$$[1.1] = 1,\ [-2.1] = -3, [\pi] = 3$$
$$[1.1] = 2,\ [-2.1] = -2\ , [\pi] = 4$$

ពួកយើងងាយស្រួលក្នុងការផ្ទៀងផ្ទាត់នៅចំនួនពិតទាំងនោះ ដោយយោងទៅតាមនិយមន័យខាងលើ។

វាក៏ងាយស្រួលមើលថាមិនមានដែនកំណត់តូច និង ធំ នៃអនុគមន៍គឺជាអនុវត្តប្រកាន់។ ពួកយើងអាចកត់សំគាល់ថា $x \in R$។ $[x]$ មិនអាចជាចំនួនគត់ ខិតជិតបំផុតទៅរក t ។តើដោះស្រាយ[$x + \frac{1}{2}$]តាមវិធីណា ? ដោយដោះស្រាយទៅតាមទ្រឹស្តី

ទ្រឹស្តីបទ ចំពោះចំនួនx, ប្រសិនបើ $(x+\frac{1}{2}) \in Z$ [x+ c] គឺជាចំនួនគត់មួយដែលខិតជិតបំផុតទៅរក x .

ស្រាយបញ្ជាក់៖ $X+\frac{1}{2} \in Z$ តាង $x = k + s$ ដែល $k \in Z$ នឹង$0 < s < 1$។ តាំង $X+\frac{1}{2} \in Z$ វាកំណត់ថា $s \neq \frac{1}{2}$។ ពួកយើងអាចកត់សំគាល់ថា

1) ប្រសិនបើ$0 < s < \frac{1}{2}$, នោះចំនួនគត់ខិតជិតបំផុតទៅរក x គឺ k។

2) ប្រសិនបើ $\frac{1}{2} < s < 1$, នោះចំនួនគត់ខិតជិតបំផុតទៅរក x គឺ $k + 1$។

1.ប្រសិនបើ$0 < s < \frac{1}{2}$, នោះ $[X+\frac{1}{2}] = k$,

2. ប្រសិនបើ $\frac{1}{2} < s < 1$, នោះ $[x+\frac{1}{2}] = k+1$

ករណីទី១៖ $0 < s < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < s+\frac{1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow k+\frac{1}{2} < k+s+\frac{1}{2} < k+1$$

$$\Rightarrow k+\frac{1}{2} < x+\frac{1}{2} < k+1$$

$$\Rightarrow k < x+\frac{1}{2} < k+1$$

$$\Rightarrow x+\frac{1}{2} = k$$

ករណីទី២៖ $\frac{1}{2} < s < 1$

$$\Rightarrow 1 < s+\frac{1}{2} < 1+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow k+1 < k+s+\frac{1}{2} < k+1+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow k+1 < x+\frac{1}{2} < k+1+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x+\frac{1}{2} = k+1$$

លទ្ធផលនៃទ្រឹស្តីខាងលើគឺមិនត្រូវគ្រប់ចំណុចទាំងអស់នោះទេ ប៉ុន្តែ ការស្រាយបញ្ជាក់ របស់វាផ្សេងទៀត អាចដោះស្រាយទៅនឹងប្រភេទលំហាត់បែបនេះបាន។

និយមន័យ ចំពោះ $a \in R$ តម្លៃដាច់ខាត តាងដោយ |a| តាមរូបមន្ត$|a| = \begin{cases} a \text{ បើ } a \geq 0; \\ -a \text{ បើ } a < 0; \end{cases}$

6.2 **ភាពចែកដាច់**

ក្នុងចំណោមវិធីសាស្ត្រពិជគណិតទាំងបួន គឺ ការចែក ជាវិធីសាស្ត្រមួយដែលនិយមប្រើប្រាស់ជាងគេ។ពួកយើងនិងក្រលេខទៅមើលចំនួនគត់ នៅក្នុងផ្នែក ការចែកដាច់ ។

និយមន័យ ចំពោះ $a, b \in Z$ ពួកយើងនិយាយបានថា b ជាចំនួនចែក ប្រសិនបើ K ជាចំនួនគត់មួយ ដែល $a\,k = b$ ពួកប្រើប្រាស់ $a|b$ ដើម្បីតាងថា a ចែកដាច់ b។

និយមន័យ $p \in N$ គឺអាចនិយាយថាវាត្រឹមត្រូវប្រសិនបើ $p \geq 2$ និង p មិនអាចតូចជាង 1 និង p ស្មើខ្លួនរបស់វា ។

និយមន័យ ចំពោះ $a, b \in N$. ពួកយើងអាចនិយាយបានថា a នឹង b ជាចំនួមិននជាក់លាក់ ប្រសិនបើវាមិនមែនជាចំនួនគត់ដែលចែកដាច់នឹង 1 ហើយ ចែកដាច់នឹងខ្លួនរបស់វា a b

ចំណាមថា ១ គឺជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែលចែកដាច់ នឹង ១ ហើយនិងខ្លួនរបស់វា

ទ្រឹស្តីបទ គ្រប់ចំនួនគត់ត្រូវដាក់ជាផលគុណនៃចំនួនបឋម។រាល់ $n \in Z$ នឹង $n > 1$, z រាល់ភាពចែកដាច់ទាំងអស់ $n = p_1.p_2...p_k$ ដែល $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_k$ ។

សម្រាយ: បញ្ជាក់រាល់ទ្រឹស្តីទាំងអស់របស់ គណិតវិទ្យា ។ ពេល $n = 2$ គេសន្មត់ថា $n \geq 2$ ត្រូវទៅតាមលក្ខណៈ។ ពិនិត្យ $n+1$ ប្រសិនបើ $n+1$ ធំជាងគេបំផុត នោះលក្ខណវាត្រឹមត្រូវ សំរាប់ $n+1$។

ពិនិត្យ $n+1$ ប្រសិនបើ $n+1$ តូចបំផុត នោះ ចំនួនគត់ a b ដែល $2 \leq a < n$, $2 \leq b < n$, នឹង $n = ab$។តាមការសន្និដ្ឋាន សម្មតិកម្ម ពួកយើងអាច ចាប់ $a.b$ ជាកត្តា ដែល : $a = p_1.p_2...p_i$ និង $b = q_1.q_2...q_j$ ពេលណាគេអោយ $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_i$ និង $q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_j$ ។ តាំង $p_1.p_2...p_i$ និង $q_1.q_2...q_j$ ជាឯកតា ជាមួយការដំរៀប n ដែល $n = a.b = r_1.r_2...r_{i+j}$ និង $r_1 \leq r_2 \leq ... \leq r_{i+j}$ ជាចំនួនធំបំផុត។

ក្បួនដោះស្រាយៈ

ក្បួនដោះស្រាយគឺជាគំនិតចាស់មួយនៅក្នុងអារ្យធម៌ជាច្រើនដែលមានតាំងពីសម័យបុរាណ។

ក្បួនដោះស្រាយគឺមិនមានអ្វីច្រើនជាងឬតិចជាងរូបមន្តសម្រាប់អនុវត្តលំដាប់នៃប្រតិបត្តិការដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហា។ ក្នុងគណិតវិទ្យាគណិតវិទ្យាដែលអាចបង្កើតវត្ថុគណិតវិទ្យាបានត្រឹមត្រូវនៃតំរូវការរើផ្តល់ចម្លើយចំពោះបញ្ហាគណិតវិទ្យាគឺត្រូវបានចាត់ទុកជាភស្តុតាងគណិតវិទ្យា។ តាមពិតអ្នកគណិតវិទូខ្លះដែលគេស្គាល់ថាជាអ្នកបង្កើតនិយមឬវិចារណញាណរក្សាគោលលទ្ធិមួយដែលផ្តល់នូវក្បួនដោះស្រាយតាមអ៊ិនធឺណេតគឺជាវិធីស្របច្បាប់តែមួយគត់ដើម្បីបង្ហាញពីទ្រឹស្តីបទគណិតវិទ្យា។ ទស្សនវិជ្ជារបស់ពួកគេគឺត្រង់៖ ប្រសិនបើអ្នកអះអាងថាមានអ្វីមួយនោះអ្នកត្រូវតែផ្តល់វិធីសាស្ត្រដើម្បីកសាងវាឬវិធីសាស្ត្រនេះហើយក្បួនដោះស្រាយគឺជាវិធីអ៊ីចឹង។ សូមក្រឡេកមើលសញ្ញាណនៃក្បួនដោះស្រាយ។ នៅទីនេះយើងខ្ចីការទទួលយកពីសព្វវចនាធិប្បាយវិទ្យាសាស្ត្រកុំព្យូទ័រនិងវិស្វកម្ម៖ ក្បួនដោះស្រាយគឺជា" លក្ខណៈច្បាស់លាស់នៃវិធីសាស្ត្រនៃការដោះស្រាយបញ្ហា" ។លក្ខណៈដែលត្រូវការការសង្កត់ធ្ងន់គឺ" លក្ខណៈច្បាស់លាស់" ។ សព្វវចនាធិប្បាយកត់សំគាល់បន្ថែមទៀតថាក្បួនដោះស្រាយណាមួយត្រូវមានលក្ខណៈសម្បត្តិដូចខាងក្រោមៈ

ភាពស្អាតស្អំ។ការអនុវត្តក្បួនដោះស្រាយចំពោះសំណុំទិន្នន័យជាក់លាក់មួយត្រូវតែមានលទ្ធផលជាលំដាប់នៃសកម្មភាព។ ការផ្តួចផ្តើមគំនិតប្លែក។សកម្មភាពដែលចាប់ផ្តើមក្បួនដោះស្រាយត្រូវតែមានតែមួយ។ភាពជោគជ័យតែមួយគត់។សកម្មភាពនីមួយៗនៅក្នុងក្បួនដោះស្រាយត្រូវតែអនុវត្តតាមសកម្មភាពអ្នកស្នងតំណែងតែមួយគត់។ដំណោះស្រាយ។ក្បួនដោះស្រាយត្រូវតែបញ្ចប់ជាមួយនឹងដំណោះស្រាយចំពោះបញ្ហាឬវាត្រូវតែបង្ហាញថាសម្រាប់ទិន្នន័យដែលបានផ្តល់ឱ្យបញ្ហាគឺមិនរលាយដោយក្បួនដោះស្រាយ។លើកលែងតែទ្រព្យសម្បត្តិដំបូងអ្នកអានមិនគួរយកលក្ខណៈសម្បត្តិទី ២ ទី ៣ និងទី ៤ ធ្ងន់ធ្ងរពេកទេ។លក្ខណៈសម្បត្តិទី ២ និងទី ៣ គឺមិនចាំបាច់ក្នុងន័យថាពួកគេមិនបានពង្រឹងឬបំផ្លាញអំណាចនៃក្បួនដោះស្រាយ។ទ្រព្យសម្បត្តិចុងក្រោយទាមទារឱ្យមានភាពត្រឹមត្រូវនៃក្បួនដោះស្រាយសម្រាប់បញ្ហាដែលចាប់អារម្មណ៍។តាមពិតក្បួនដោះស្រាយណាមួយដោះស្រាយបញ្ហាខ្លះមានតែមិនមែនជាអ្វីដែលយើងចង់ដោះស្រាយទេ។ប្រសិនបើបញ្ហាត្រូវបានផ្តល់ឱ្យហើយយើងត្រូវបានស្នើសុំឱ្យសរសេរក្បួនដោះស្រាយដើម្បីដោះស្រាយវាជាធម្មតាវាជាទ្រព្យសម្បត្តិចុងក្រោយដែលត្រូវបានបញ្ជាក់ក្នុងការផ្ទៀងផ្ទាត់។ខាងក្រោមនេះយើងបង្ហាញពីទ្រឹស្តីបទដោយផ្តល់នូវក្បួនដោះស្រាយ" ត្រឹមត្រូវ" ។យើងនឹងប្រើទ្រឹស្តីបទម្តងហើយម្តងទៀតនៅក្នុងជំពូកនេះ។ចំពោះយើងភាគច្រើនទ្រឹស្តីបទគឺជាមូលដ្ឋានគ្រឹះដែលអាចយល់បានដោយវិចារណញាណ។ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយភស្តុតាងផ្លូវការត្រូវបានទាមទារ។ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយដើម្បីបង្ហាញជាផ្លូវការនូវភាពត្រឹមត្រូវនៃក្បួនដោះស្រាយដែលបានផ្តល់ឱ្យគឺជាការឈឺចាប់ដ៏ធំមួយនៅលើកញ្ចឹងកហើយវាហួសពីវិសាលភាពនៃសៀវភៅនេះ។នៅទីនេះយើងគ្រាន់តែអនុវត្តតាមក្បួនដោះស្រាយហើយយល់ពីភាពត្រឹមត្រូវរបស់វាដោយវិចារណញាណ។ចំណាំថាពួកយើង មាន r ជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។ ដែល មាន r គឺជាសំណល់ នៃ a នឹង b។

ពួកយើងមានវែកញែក នឹងនញ្ជាក់ទៅលើទ្រឹស្តី គឺសរសេរបញ្ជាក់ពីវិធីនៃក្បួនដោះស្រាយដែលនិយាយពីចំនួនគត់ a និង b ,ហើយប្រសិនបើ b 6=0, នោះក្បួនដោះស្រាយ និងត្រឹមត្រូវទៅតាមលក្ខណ q និង r ។ពិនិត្យនៅវិធីរឺក្បួនដោះស្រាយ ក្នុងចំណុច ទី 6.1 ថាវិធីដោះស្រាយនោះ និងងាយឡើងប្រសិនបើពួកយើងដាក់លក្ខណអោយជាចំនួនវិជ្ជមាន។មកមើលវិធីនៃក្បួនដោះស្រាយនេះហើយសាកល្បងនៅវិធីនេះដាក់a, b

$r \leftarrow -a$

$q \leftarrow 0$

គេអោយ $0 \le r < |b|$

ប្រសិនបើ $a \times b \ge 0$

នោះ $r \leftarrow -r - b$

ម្យាងទៀត $r \leftarrow -r+b$

ហើយប្រសិនបើ $q \leftarrow -q +1$

ហើយប្រសិនបើគេអោយ $a \times b \ge 0$ នោះ ត្រលប់មកវិញ(q,r)

ផ្សេងពីនេះគេបាន $(-q, r)$

បើត្រលបទៅចំនុចទី 6.1 : ការចែកលេខ

វិធីដោះស្រាយនិងស្រេបទៅតាមលំហាត់ខាងក្រោម

$a = 10, b = 3;\ a = 10, b = -3;\ a = -10, b = 3;\ a = -10, b = -3.$

ការបែងចែកនៅវិធីរីក្បួនដោះស្រាយ គឺពិនិត្យត្រឹមត្រូវទៅតាមលក្ខណនៃគណិតវិទ្យា ,ពួកយើងមានការផ្លាស់ប្តូរនៃក្បួនដោះស្រាយ។ ថាតើវិធីនៃក្បួនដោះស្រាយខាងលើត្រឹមត្រូវនិងស្របតាមការដោះស្រាយរឺទេ។ អ្នកធ្វើការដោះស្រាយគ្រប់ក្បួនដោះស្រាយទាំងអស់ ទៅលើលំហាត់ ដែលទទួលបានចំឡើយ ដែលទទួលបានពីការដោះស្រាយ ដែលមានតែវិធីមួយគត់ នៃតម្លៃ q , r ?

ផ្ទុយទៅវិញវាគឺ នៅក្នុងគោលការកើតមានឡើងបង្ហាញថាត្រឹមត្រូវនឹងមានតែមួយដោយវិធីសាមញ្ញបំផុត។ ពួកយើងមិនអាចធ្វើការយកចំលើយតែមួយគត់ មកផ្ទៀងផ្ទាត់ នៅលក្ខណទៀងនោះ។

និយមន័យ គេអោយចំនួនគត់ពី m និង n ពួកយើងប្រើ $gcd(m,n)$ ទៅជាតួចែកនៃ m នឹង n ដែលជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ចែកដាច់នឹង ពីរ m , n ។

6.3.តួចែករួមធំបំផុត

ពិនិត្យតាមឧទាហរណ៍ $gcd(12\ ,\ 16)\ =\ 4$, $gcd\ (-315\ ,\ 91)\ =\ 7$, នឹង $gcd(10,0\ ) = 10$ ។ ដោយសន្មត់ថា ពួកយើង យក $gcd(0,\ 0\ ) = 0$ ពួកយើងអាចធ្វើទៅតាមទ្រឹស្តី នៃ ចំនួនមិនជាក់លាក ។

ទ្រឹស្តីបទ

ចំនួនគត់ a និង b ដែលសរសេរជាចំនួនមិនជាក់លាក់ទាំងពី ប្រសិនបើ $gcd(a,b) = 1$។

ពួកយើងធ្វើការបង្ហាញការប្រើប្រាស់នូវលក្ខណទាំងពី ទាក់ទងគ្នាតួចែករួមធំបំផុត gcd អោយត្រូវទៅតាមទ្រឹស្តីបទ។ទ្រឹស្តីបទភាគច្រើនអាចយល់បានដោយអាចត្រូវបានរកឃើញដោយការពិចារណាញាណរបស់យើង។ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយវិចារណញាណត្រូវបានបង្កើតឡើងដោយការពិចារណា មិនមែនពីអាគុយម៉ង់គណិតវិទ្យាទេ។ទេ។ នៅពេលដែលយើងចូលទៅក្នុងទ្រឹស្តីកាន់តែស៊ីជម្រៅយើងនឹងយល់។ (សូមមើលទ្រឹស្តីបទ ៦.១០ ដើម្បីមើលថាតើការធ្វើនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ទៅតាមទ្រឹស្តីបទដែររឺទេ ?)។

ទ្រឹស្តីបទ សន្មត់ថា $a\ ,\ b \in \mathbb{N}, a\ =\ da'\ ,b\ =\ db'\ , gcd(a\ ,\ b\ )\ =\ d$ ប្រសិនបើ $a'b'$ ប្រើនៅតម្លៃជៀប i.e., $gcd(a'\ ,b'\ )\ =\ 1$ ។

តាមសម្មិតកម្មស្គាល់តាងដែលបានផ្តល់ឱ្យ $a,\ b \in \mathbb{N}$ ជាមួយ $a = d.a_0$ និង $b = d.b_0$ ។ សូមឱ្យ $\gcd(a,b) = k$ និង $\gcd(a_0,b_0) = k$ ។ ដោយភាពផ្ទុយគ្នាសន្មត់ថា $k_6 = 1$ ។ ចាប់តាំងពី a, b∈Nវាដូចខាងក្រោមដែល $k_6 = 1$ និង ។ នេះផ្ទុយនឹងការសន្មតថាយគឺជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ a និង b ។

សម្រាប់ទិសដៅផ្សេងទៀតសន្មត $a\ =\ da'$ និង $b\ =\ db'$ និង $gcd\ (a',\ b')\ =\ 1$។ វាបញ្ជាក់ថាd គឺជាតួចែក រួមនៃ a និង b ។ តាំង $gcd\ (a',\ b')\ =\ 1$ មិនមានការបែងចែកទូទៅក្រៅពី 1 ដែលអាចដកស្រង់ចេញពី a' និង b' ។ ដូច្នេះវាមិនអាចទៅរួចទេក្នុងការទទួលបានតួចែកធម្មតានៃ a និង b ធំជាង d ។ ដូច្នេះ $gcd\ (a,\ b)\ =\ d$ ។

ទ្រឹស្តីបទ តាំង $a\ ,\ b\ ,\ m \in \mathbb{N}$ គេអោយ $gcd(ma\ ,\ mb\ )\ =\ m$, $gcd\ (\ a\ ,\ b)$ តាំង $gcd\ (\ a\ ,\ b) = d$ ។ ដោយ**ទ្រឹស្តីបទ**6.6 មាន a' និង b' ដែល $a\ =\ da'\ ,b\ =\ db'$ និង $gcd\ (a',\ b')\ = 1$ ។ ដោយដឹងថា $ma = mda'$ និង $mb\ =\ mdb'$ ។ បញ្ជាក់នៃទ្រឹស្តីបទ 6.4 ចាប់តាំងពី $gcd\ (a',\ b')\ = 1$, វាធ្វើតាមថា md គឺជាតួចែករួមតូចបំផុតនៃ ma និង mb ។ ដូច្នេះ $gcd\ (ma\ ,\ mb)\ =\ md\ =\ m.gcd\ (a,\ b)$។

ទ្រឹស្តីបទ គ្រប់ $a,b,x,y\in\mathbb{Z}$, $xa+yb$ គឺជាតួចែកដាច់នៃ $gcd\ (a\ ,\ b)$។
តាំង $gcd(a,b)\ =\ d$ ចំនួនគត់ទាំងពីរនេះ a' និង b' ដែល $a\ =\ da'$ និង $b\ =\ db'$
តាមសមិតកម្ម $xa+yb = xda'+ydb' = (xa'+yb')d$ ។
តាំង $x\ ,\ y\ ,\ a'b'$ ជាចំនួនគត់ទាំងអស់នៃ $xa'\ +\ yb'$ ដែលជាចំនួនគត់ នៃ K ។
ទ្រឹស្តីបទ តាំង $a,\ b\in\mathbb{Z}$ ដោយ a ≥ b នោះ
$gcd\ (a\ ,\ b)\ =\ gcd(\ a-b\ ,\ b\ )$ ។
តាំង $a,\ b\in\mathbb{Z}$ ដោយ $a\ \geq\ b$ និង $gcd\ (a,\ b)\ =\ d$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ ៦.៤ មាន a′ និង b′ ដែល $a\ =\ da',\ b\ =\ db'$, និង $gcd\ (a',\ b')\ =\ 1$។ ផងដែរ $a-b\ =\ d\ (a_0-b_0)$ ។ គេអាចផ្ទៀងផ្ទាត់បានថា ប្រសិនបើ a′ និង b′ គឺសំខាន់បំផុតនោះវាគឺ a′ – b′ និង b′ ។ ដូច្នេះ $gcd\ (a'-b'\ ,\ b'\ )\ =\ 1$ ។ ជាមួយ ទ្រឹស្តីបទ បញ្ជាក់ថា
$gcd(a-b,b)\ =\ gcd(d(a'-b'),db')\ =\ dgcd((a'-b'),b')\ =\ d\ =\ gcd(a,b)$
និយមន័យ ដែលបានរាប់បញ្ចូលចំនួនគត់ដែលមិនសូន្យ a និង b យើងប្រើ $Lcm(a,\ b)$ ដើម្បីតាងពហុគុណរិជ្ជមានតូចបំផុតនៃ a និង b ដែលជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចដែលអាចចែកដោយ a និង b។
ធ្វើការផ្តាប់ទ្រឹស្តីបទទោនិង gcd និង lcm និយមន័យ 6.8 : តាំង a , b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ គេអោយ $Lcm(a,\ b)=\dfrac{ab}{\gcd(a,b)}$ តាំង $gcd(a'\ ,\ b'\ )=\ d$ តាមនិយមន័យ 6.4 យើងដឹងថា
$a\ =\ da'\ ,b\ =\ db'\ ,\ gcd(a'\ ,\ b')\ =\ 1$ ដូច្នេះ $\dfrac{ab}{\gcd(a,b)}=da'b$
គេអោយ da′ b′ គឺជាពហុគុណរួមនៃ a និង b ។ អ្វីដែលត្រូវបង្ហាញគឺ da′ b′ គឺតូចជាងគេ។ ដោយ m ជាផលគុណវិជ្ជមានទូទៅនៃ a និង b ពោលគឺ a | m និង b | m ។ តាំង a = da′តាមក្បួនដោះស្រាយការបែងចែកមាន k ∊Nមួយចំនួនដូចជា m = da′k ។ ម៉្យាងទៀតចាប់តាំងពី b | m យើងមាន db′ | da′ k ។ វាធ្វើតាម b′ | a′k ។ តាំង $gcd\ (a',\ b')\ =\ 1,$ យើងមាន b′ | k ។ វាច្បាស់ណាស់ថាប្រសិនបើ b′ | k, បន្ទាប់មក b′ ≤ k, ហេតុដូចនេះហើយ $da'b'\ \leq da'k\ =\ m$ ។ ដូច្នេះពហុគុណវិជ្ជមាននៃ a និង b ត្រូវតែធំជាង ឬស្មើ da′b′
និយមន័យ តាំង a , b ជាចំនួនគត់ ប្រសិនបើ m គឺជាពហាគុននៃ a ,b នោះ m គឺជាពហាគុនរួមនៃ lcm(a , b)។ការបង្ហាញ gcd(a , b) = d និងតាំង a = da′ , b = db′ នោះ gcd(a′ , b′) = 1 ហើយ lcm(a , b) = da′ b′ តាំង m ជាពហាគុន នៃ a , b ហើយគេអោយចំនួនគត់ទាំងនេះ k_1 , K_2 ដែល m = $k_1a=k_2b$. គេអោយ M = k1da′ = $\frac{k1}{b'}$ = da′ b′ = $\frac{k1}{b'}$ lcm (a , b)ពួកយើងដឹងថា $\frac{k_1}{b'}$ គឺជាចំនួនគត់ តាមរូបមន្ត k_1 da′ = k_2 db′ => $\frac{k_1}{b'}$ a′ k_2 តាំង k_2 គឺជាចំនួនគត់ និង gcd(a′ , b′) = 1 , k_1 b′ ត្រូវតែជាចំនួនគត់ ខាងក្រោមនេះយើងបង្ហាញទ្រឹស្តីបទ ដែលបញ្ជាក់អោយកាន់តែច្បាស់ជាងមុន ។ ហើយទ្រឹស្តីបទវាមិនត្រឹមត្រូវទាំងស្រុងនោះទេ។ xa+yb = gcd(a,b)។
ទ្រឹស្តីបទ a , b ∈ Z ទាំងនោះជាចំនួនគត់ x , y ដែល xa+yb = gcd(a,b)។

ភស្តុតាង៖ វាច្បាស់ណាស់ថាប្រសិនបើ1 a , b គឺជាមានតម្លៃសូន្យយើងអាចកំណត់លេខ 1 ឬ 0 ដល់ x និង y ងាយស្រួលដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់ទ្រឹស្តីបទ ដើម្បីយើងអាចសន្មតថា a អិនដោយមិនបាត់បង់ភាពទូទៅ។ តាំង

$S = min\{xa + yb > 0 : x, y \in \square\}$ នោះគឺជាចំនួនលេខតូចបំផុតនៃចំនួនបឋមដែលមាន $xa + yb$ ដែល $x, y \in \square$ ។ ពួកយើងអោយអាគុយម៉ង់ដែលមាន $x , y \in \square\ sl(xa , yb) \in \square$, ។ តាំង $s = ua + vb$ ពាល់ $u, v \in \square$ នោះតាំង $a = da'$, $b = db'$ និង $gcd\ (a, b) = d$ ។ ដូច្នេះ $s = ua + vb = d(ua_0 + vb_0)$.គេអោយ $x, y \in \square$ ដោយ ប្រើឡូការិតពួកយើងមាន $q, r \in \square$ ដែល $xa + yb = sq + r, 0 \le r < s$ វាកំណត់តាម

$r = xa + yb - sq = xa + yb - uqa - vqb = (x - uq)a + (y - vq)b$

ដូច្នេះ R ក៏ជាការរួមបញ្ចូលគ្នានៃអ័ក្សអាំងតេក្រាលនៃប៊ីអរនិងអាំងតេក្រាល ។ រួមជាមួយការសន្មត់នៅក្នុង (៦.១) យើងសន្និដ្ឋានថាតម្លៃដែលអាចមានសំរាប់ r គឺ 0 ។ ដូច្នេះ $s \mid a$ (ធ្វើ yb) សំរាប់ $x, y \in \square$ ។ហេតុដូច្នេះហើយ $s \mid a$ ពេល $(x = 1, y = 0)$ និង $s \mid b$ នៅពេល $(x = 0, y = 1)$ ។ និយាយម៉្យាងទៀត s គឺជាការបែងចែករួមនៃ a និង b ។ ដូច្នេះ $s \le gcd\ (a, b)$ ។ ដោយទ្រឹស្តីបទ ៦.៦, $gcd\ (a, b) \mid s$ ហេតុដូចនេះហើយ $gcd\ (a, b) \le s$ ។ ដូច្នេះ $s = gcd\ (a, b) = ua \vee b$ សម្រាប់ $u, v \in \square$ ។

ទ្រឹស្តីបទ ពិចារណា $a, b, q \in \square$ ប្រសិនបើទាំង a និង b អាចបែងចែកបានដោយ q បន្ទាប់មក $gcd\ (a, b)$ អាចបែងចែកបានដោយ q ។

ភស្តុតាងឧបមា $a = qa_0$ និង $b = qb_0$ ដែល q, a_0 និង b_0 គឺជាចំនួនគត់។ តោះ $gcd\ (a, b) = 1$។ តាមទ្រឹស្តីបទ ៦.១០ មានចំនួនគត់ x, y ដែលថា $d = yb$ ។

ដូច្នេះ $d = xqa' + yqb'$ $\dfrac{d}{q} = xa' + yb'$

ពីព្រោះ x, y, a' និង b' ជាចំនួនគត់ $\dfrac{d}{q}$ ។ ត្រូវតែជាចំនួនគត់។ ដូច្នេះ $q \mid d$ ។

ទ្រឹស្តីបទ អនុញ្ញាតឱ្យ $a, b \in \square$ ។មាន $x, y \in \square$ ដូចជាបញ្ចូន $yb = 1$ ប្រសិនបើ $gcd\ (a, b) = 1$។

ភស្តុតាងឧបមាថាធ្វើ $yb = 1$ ដែល x និង y ជាចំនួនគត់។ តោះ $a = da'$, $b = db'$ និង $gcd\ (a, b) = d$ ។ ដោយមិនបាត់បង់ភាពទូទៅយើងអាចសន្មតថា $d_6 = 0$ ។ យើងបាន

$xda' + ydb' = 1 \Rightarrow d = \dfrac{1}{xa' + yb'}$

ទ្រឹស្តីបទ $d = xa' + yb'$ ជាចំនួនគត់គឺថានៅពេល $d = xa' + yb' = 1$ ទិសដៅផ្សេងទៀតនៃទ្រឹស្តីបទនេះគឺជាករណីពិសេសមួយនៃទ្រឹស្តីបទ ៦.១០ ។ទ្រឹស្តីបទខាងក្រោមគឺជាកូរ៉ូឡានៃទ្រឹស្តីបទ ៦.១២ ។

ទ្រឹស្តីបទ ប្រសិនបើ $a, b_1, b_2, \dots , b_n \in \square$ និង

$gcd\ (a_1, b_1) = gcd\ (a_2, b_2) = \cdots = gcd\ (a_n, b_n) = 1$, បន្ទាប់មក $gcd(a, b_1, b_2\ \dots, b_n) = 1$ ។ភស្តុតាងដោយទ្រឹស្តីបទ ៦.១ យើង x $x_1, x_2, \dots, x_n$ និង $y_1, y_2, \dots , y_n$ ដូចជាថា

$1 = x_1a_1 + y_1b_1$
$1 = x_2a_2 + y_2b_2$
....
$1 = x_na_n + y_nb_n$
$1^n = (x_1a_1 + y_1b_1)(x_2a_2 + y_2b_2)\cdots(x_na_n + y_nb_n)$
ដូច្នេះ $1 = Aa, B = (b_1b_2... b_n)$ ដែល A ជាពហុធានៅក្នុង $a, x_1, ... , x_n, b_1, ... b_n$ និង $y_1, ... , y_n$, និង $B = y_1y_2\cdots y_n$ ។ ដោយសារទាំង A និង B ជាចំនួនគត់ដោយទ្រឹស្តីបទ 6.12, $gcd\ (a, b_1b_2... b_n) = 1$
ក្បួនដោះស្រាយរបស់អេក្លួដសំណួរបន្ទាប់របស់យើងគឺថាតើយើងត្រូវធ្វើយ៉ាងម៉េចដែលជាការបែងចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់ពីរ ? នេះមិនមែនជាបញ្ហាពិសេសទេ។ យើងអាចធ្វើបានដោយប្រើកម្លាំងចែកទី1, 2, ..., រហូតដល់តូចជាងមួយនៃពីរដើម្បីដឹងថាតើវាជាចំណែកធម្មតានិងរើសយកអ្វីដែលអស្ចារ្យបំផុត។នេះតែងតែដំណើរការប៉ុន្តែយើងក៏ចង់ដោះស្រាយតាមរបៀបដែលមានប្រសិទ្ធភាពផងដែរ។ គណិតវិទូជនជាតិក្រិចដ៏ឆ្នើមឈ្មោះអ៊ីក្លីតប្រហែលជា ២៣០០ ឆ្នាំមុនបានផ្តល់នូវក្បួនដោះស្រាយដ៏អើតឆាយដែលត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាក្បួនដោះស្រាយរបស់អឺអឹដដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហានេះ។ ក្បួនដោះស្រាយគឺជាផ្នែកមួយនៃក្បួនដោះស្រាយចាស់បំផុត។ មុនពេលយើងណែនាំក្បួនដោះស្រាយយើងដំបូងត្រូវធ្វើការសង្កេតមួយចំនួន។ តាង m និង n ជាចំនួនគត់ពីរដោយ $gcd(m,n)$ ប្រសិនបើ n = 0 តម្លៃកំណត់ m; ប្រសិនបើតម្លៃកំណត់តាម $gcd(n, m - \frac{m}{n}n)$ តែប្រសិនបើអនុគមន៏ $gcd(-m,-n) = gcd(-m,n) = gcd(m,-n) = gcd(m,n)$ សមីការ (៦.២) បញ្ជាក់ថាយើងអាចសន្និដ្ឋានអាគុយម៉ង់ដំបូងបង្អស់នៃក្បួនដោះស្រាយរបស់យើងមិនតិចជាងលេខ ២ ដោយមិនបាត់បង់ភាពទូទៅឡើយ។ សមីការ (៦.៣) បញ្ជាក់ថាយើងអាចផ្តោតការយកចិត្តទុកដាក់របស់យើងចំពោះចំនួនគត់មិនមែនអវិជ្ជមាន។ ការសង្កេតទីពីររបស់យើងគឺ
$gcd(m,0) = m, gcd(0,n) = n$, $gcd(0,0) = 0$ និយាយម្យ៉ាងទៀតប្រសិនបើលេខមួយក្នុងចំណោមពីរគឺ 0 នោះលេខគត់ផ្សេងទៀតគឺ gcd ។ នេះប្រាប់យើងពេលណាត្រូវបញ្ចប់ក្បួនដោះស្រាយរបស់យើង។ រួមគ្នាជាមួយទ្រឹស្តីបទ ៦.៧ យើងមានគំនិតអំពីរបៀបដំណើរការនៅក្នុងក្បួនដោះស្រាយរបស់យើងដើម្បីធានាថាក្បួនដោះស្រាយនឹងឈានដល់លក្ខខណ្ឌបញ្ចប់។
ដូចដែលយើងហៅវិធីដោះស្រាយឡើងវិញជាមួយអាគុយម៉ង់ថ្មី m − n និង n យើងអាចដក n ច្រើនតាមដែលអាចធ្វើបានពី m ដរាបណាឌីយ៉ែនៅតែមិនអវិជ្ជមាន ? ដើម្បីគណនាថាតើប៉ុន្មានដងដែល n អាចត្រូវបានដកពី m យើងគ្រាន់តែប្រើក្បួនដោះស្រាយការបែងចែក។
m = q×n+r, 0 ≤ r ≤ n−1. តាង q = $\frac{m}{n}$
វាច្បាស់ណាស់ថាយើងអាចដក n មកពី m q ជាច្រើនដង។ ជាមួយនឹងសារតានេះយើងបានត្រៀមរួចរាល់ដើម្បីបង្ហាញពីក្បួនដោះស្រាយដែលងាយស្រួលប៉ុន្តែមិនសំខាន់។ ចំណាំថាយើងបានសម្រេចចិត្តប្រើចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន m និង n តែប៉ុណ្ណោះ។ ក្បួនដោះស្រាយត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាពទី ៦.២ ។កំណែមិនអោក់អេួលនៃក្បួនដោះស្រាយរបស់អ៊ីយូក្លដត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាព ៦.៣ ។ ពិចារណាឧទាហរណ៍ពីរខាងក្រោមនេះ
q = $\frac{m}{n}$ និង r = m - $\frac{m}{n}$ n

$m = n\,x\,q + r$

$946 = 726*1 + 220,\ 127 = 98*12 + 71,\quad 17 = 10*1 + 7,$

$726 = 220*3 + 66,\ 98 = 71*1 + 27,\quad 10 = 7*1 + 3,$

$220 = 66*3 + 22,\quad 71 = 27*2 + 17,\quad 7 = 3*2 + 1$

$66 = 22*3 + 0,\quad 27 = 17*1 + 10,\quad 3 = 1*3 + 0$

6.4.**អនុគមន៍** Euler's **និងទ្រឹស្តីបទ** Euler's ៖

ទ្រឹស្តីរបស់ Fermat's ជាទូទៅសរសេរដោយ Euler's ។

ទ្រឹស្តីបទ Euler's ផ្តល់ឱ្យយើងនូវវិធីងាយស្រួលក្នុងការចែកចាយថ្នាក់ដែលនៅសល់

នៃចំនួនផ្សំ។ និយាយម្យ៉ាងទៀតបើm ជាចំនួនផ្សំច្រើនយើង

អាចប្រើទ្រឹស្តីបទ Euler's ដើម្បីបញ្ចូនចំនួនម៉ែត្រដែលនៅសល់នៅពេលចែកនឹង d ដោយមិនអនុវត្តក្បួន

ដោះស្រាយដោយផ្នែកៗ។

និយមន័យ N! N កន្លែងណា '(m) គឺជាចំនួនសំណល់សរុបថ្នាក់ m, ដែលជាចំនួនបឋមទៅ m។ មុខ

ងារនេះហៅថា Euler's Phi ។

ឧទាហរណ៍:តាំងម៉ូឌុល m = 3 មានសំណល់ ៣ ថ្នាក់ $0_3, 1_3$.និង2_3.ចំនួនលេខ0_3 មិនជាក់លាក់និង ៣ ទេ។

នោះ $\varphi(3) = 2$ ប្រសិនបើ m=4 នោះ4គឺជាសំណល់។ ប៉ុន្តែចំនួនលេខ0_4 និង2_4គឺមិនជាចំនួនជាក់លាក់នៃ

៤ទេ។ដូច្នេះ

φ (៤) = ២ ។ តាមការសង្កេតទាំងនេះយើងអាចកំណត់មុខងារ Euler's ដូចខាងក្រោម។

និយមន័យ Euler'sមុខងារភី φ (m) គឺជាចំនួនជាតុសរុបនៅក្នុង {0,1,2, ... , m − 1} ដែលមានចំនួន

បឋមរហូតដល់m។

ច្បាស់ហើយប្រសិនបើ p ជាលេខបឋមបន្ទាប់មក φ (p) = p - 1. ចំណាំថា 0 មិនសំខាន់ចំពោះលេខណា

មួយទេ។

និយមន័យ តាំង p ជាចំនួនបឋម បន្ទាប់មកE ជារបស់N។

ភស្តុតាង៖ ដោយសារ p ជាលេខបឋមមានតែលេខទាំងនោះដែលគុណនឹង P មិនសំខាន់ទៅ P។

$0;\ p; 2p; 3p; \ldots\ pe\,|\,p$: ចាប់តាំងពី $pe \mid p = (pe1 \mid 1)\,P$, វាដូចខាងក្រោមដែលមានលេខ

$pe|1$ ក្នុងចំណោម

$1; 2; 3; \ldots\ldots;\ pe \mid 1$ មិនសំខាន់ដល់ទំ។ ដូច្នេះ $(pe) = pe|\,pe|1$។

ទ្រឹស្តីបទ ប្រសិនបើ $a;\ b \in$ □ គឺជាចំនួនគត់ពីរដូចជា $gcd\ (a;\ b) = 1,$ បន្ទាប់មក

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)\quad \begin{array}{l} A = \{a_1;\ a_2, \ldots .a\varphi(a)\}; \\ B = \{b_2;\ b_2; \ldots .b\varphi(b)\}; \\ C = \{c_3;\ c_2;\ \ldots .c\varphi(ab)\}. \end{array}$$

ភ័ស្តុតាង:ទុកឱ្យអាហ្សាហ្សាប៊ីប៊ីហ្សកនិងស៊ីហ្សាបជាប្រព័ន្ធនៅសល់៣

បឋមទៅ a, b និង ab រៀងគ្នាដែលបានផ្តល់ឱ្យដូចខាងក្រោម។

លើសពីនេះទៅទៀតយើងសន្មតថាធាតុទាំងអស់នៅក្នុងប្រព័ន្ធនីមួយៗគឺខុសគ្នា។ក្នុងន័យផ្សេងទៀត, $|A| = \varphi(a)$ និងដូចគ្នានឹងខនិងគ $A \times B.$ ប្រសិនបើមុខងារបែបនេះមានបន្ទាប់មក $|C| = |A \times B| = |A| \times |B|$ ហេតុដូចនេះហើយ $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$។សម្រាប់ X ∈ C នីមួយៗរក $f(x) = (r_a;\, r_b)$ ដែល $x \in r_a a$ និង $x \in r_b b$។ ចាប់តាំងពី $x \in C$, ដោយការសន្មត, $gcd\,(x;\, ab) = 1.$ ផងដែរ $[gcd(x;\, ab) = 1] \to [gcd(x;\, a) = 1 \wedge gcd(x;\, b) = 1]$;វាដូចតទៅនេះត្រូវតែមានអក្សរអរចំនួន $r_a \in A$ និង $r_b \in B$ ដែលអាចបំពេញបានការដកហូតនៃច។ លើសពីនេះទៅទៀតដោយការបែងចែកតាមក្បួនដោះស្រាយការបែងចែកបែបនេះរូបនិងរូបមានលក្ខណៈប្លែកប្លេជ្ញាថា f មានតម្លៃតែមួយ។ ដូច្នេះសម្រាប់រាល់ $x \in C, f(c)$ ត្រូវបានគេកត់សំគាល់បានល្អនៅក្នុង $A \times B$។អ្វីដែលនៅសេសសល់គឺត្រូវអះអាងថា f គឺជាការធ្វើពាណិជ្ជកម្ម។ ជួសជុលរ៉ាក់ $r_a \in A$ និងរូប $r_b \in B$។
ពិចារណាលើប្រព័ន្ធដូចខាងក្រោមៈ $x = r_a(mod a); x = r_a(mod b)$: ច្បាស់ណាស់ប្រសិនបើ x អាចបំពេញបាននូវសមិទ្ធិផលទាំងពីរនៅក្នុង (៦.៣០) បន្ទាប់មក f (x) = (r_a; r_b) ។
ចាប់តាំងពី gcd (a; b) = 1, ដោយទ្រឹស្តីបទដែលនៅសេសសល់របស់ចិនប្រព័ន្ធសមាហរណកម្ម (៦.៣០)មានដំណោះស្រាយនិយាយថា x′ ។ លើសពីនេះទៅទៀត។
(gcd (x′; a) = 1 និង gcd (x′; a) = 1) ⇒ gcd (x′; ab) = 1។
ដោយមានទ្រឹស្តីបទ ៦.៣១ និង ៦.៣២ យើងអាចផ្តល់តម្លៃដល់ φ (n) បានយ៉ាងងាយស្រួល។ សម្រាប់ឧទាហរណ៍ដើម្បីគណនា φ (210), យើងធ្វើឱ្យកត្តា 210 = 2 . 3 . 5 . 7 first។ បន្ទាប់មក
φ (210) = φ (2 . 3 . 5 . 7)= φ (2) φ (3) . φ (5) . φ (7)= 1 . 2 . 4 . 6= 48.
និយមន័យ: ទ្រឹស្តីបទ Euler's នាំឱ្យ a,m ∈ n ជាមួយ gcd (a, m) = 1 ។

$$a\varphi\,(m) \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ m)$$

ភស្តុតាងៈ គំនិតនេះគឺស្រដៀងនឹងភស្តុតាងនៃទ្រឹស្តីបទតិចតួចរបស់ហ្វែម៉ា ។T '(m) = n និង $p_1, p_2 \ldots p_n$ ភីអិនគឺជាលេខធម្មជាតិតិចជាងមនិងមានចំនួនបឋមដល់ម។
ដូច្នេះថ្នាក់ខាងក្រោមគឺជាថ្នាក់សេសសល់ដែលទាក់ទងទៅនឹងម៉ែត្រ។ $|p_1|m, |p_2|m, \ldots |p_n|\ m$
អនុញ្ញាតឱ្យខ្ញុំ $2\,N$ ជាមួយ 1 • i • n ។ ចាប់តាំងពី $gcd\,(a;\, m) = 1$ និង $gcd\,(pi;\, m) = 1$ វាធ្វើតាមថា $gcd\,(api;\, m) = 1$ ដូច្នេះហើយ $api\ ,m$ គឺជាថ្នាក់ដែលនៅសល់សំរាប់បឋមm ។ ដូច្នេះ

$|ap_1|m,\ a|p_2|m \ldots\ldots |apn|m$ ក៏ជាថ្នាក់សំណល់ដែលទាក់ទងទៅនឹងម៉ែត្រ។ ជាមួយនឹងអាគុយម៉ង់ដូចគ្នាដែលត្រូវបានប្រើនៅក្នុងភស្តុតាងនៃទ្រឹស្តីបទភែម៉ាតយើងសន្និដ្ឋានថាថ្នាក់ដែលនៅសល់(៦.៣១) និង (៦.៣២) គឺដូចគ្នា។ ស្រដៀងគ្នានេះដែរ $(p_1 p_2 \ldots p_n)(apa^2 p_2 \ldots a^n p_n) \equiv$
$P_1 P_2 \ldots P_n a^n\,(mod\ m),$
ចាប់តាំងពី $\mathrm{gcd}(p_1,\, p_2 \ldots p_{n,m}) = 1$ ដោយទ្រឹស្តីបទ6.20យើងអាចលុបចោល $p_1, p_2 \cdots p_n$ ពីទាំងសងខាងដើម្បីឱ្យមាន $1 \equiv a^n\,(mod\ p)$ ដែលយើងចង់បាន។

និយមន័យ

អេសអេសគ្រីបប្រហែលជាកម្មវិធីសំខាន់បំផុតនៃលេខ គ្រប់ពេលវេលាដែលជាប្រព័ន្ធគ្រីបកូដសាធារណៈ ដែលត្រូវបានដាក់ឈ្មោះសម្រាប់អ្នកច្នៃប្រឌិតរបស់ខ្លួន។Rivest, Shamir និង Adleman ដែលបានបង្កើត គំនិតនេះនៅក្នុងកម្មវិធីអបអរសាទររបស់ពួកគេ។ក្នុងឆ្នាំ1977។ក្បួនដោះស្រាយរបស់សាលាភូមិន្ទរដ្ឋបាល មានមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃគ្រីបគ្រីបសំរាប់មួយជំនាន់ទាំងមូលនៃអ្នកវិភាគគ្រីបសម័យទំនើបនិងនៅតែត្រូវបានគេ ប្រើយ៉ាងទូលំទូលាយបំផុតវិធីសាស្ត្រអ៊ិនគ្រីបសម្រាប់បច្ចេកវិទ្យាទំនាក់ទំនងសព្វថ្ងៃ។អ្នកច្នៃប្រឌិតទាំងបីត្រូវ បានប្រគល់ពានរង្វាន់ Truing ក្នុងឆ្នាំ ២០០២ដែលត្រូវបានគេចាត់ទុកថាជារង្វាន់ណូបែលវិទ្យាសាស្ត្រកុំព្យូទ័រ។ពិចារណាអំពីស្ថានភាពដូចខាងក្រោម។ លោក Bob ចង់ឱ្យអាលីសបញ្ជូនព័ត៌មានសម្ងាត់ដល់គាត់ - និយាយអំពីឆានែលអសន្តិសុខ។ សម្រាប់ការគោរពឌីជេដែលមិនអាចជៀសវាងបានខ្លះលោក Bob និងអាលីសមិនអាចជួបផ្ទាល់ឬទំនាក់ទំនងតាមរយៈបណ្តាញសុវត្ថិភាពទេដូច្នេះហើយវាមិនអាចទៅរួចទេដែលពួកគេ ចែករំលែកកូនសោសម្ងាត់ដោយគ្មានការភ័យខ្លាចពីការចូល។បានលួច។

តើអាលីសអាចផ្ទេរព័ត៌មានសម្ងាត់ទៅលោក Bob ដោយរបៀបណា

ស្ថានភាព ? ប្រព័ន្ធគ្រីបគ្រីបសាធារណៈគឺជាដំណោះស្រាយ។ នេះគឺជាគំនិត៖

1. លោក Bob ជ្រើសរើសកូនសោសាធារណៈនិងកូនសោសម្ងាត់។ បន្ទាប់មកគាត់រក្សាកូនសោសម្ងាត់ទៅខ្លួនគាត់និងប្រកាសសោសាធារណៈទៅអាលីស។
2. អាលីសទទួលកូនសោសាធារណៈនិងប្រើវាដើម្បីអ៊ិនគ្រីបព័ត៌មានដែលនាងមាន មានបំណងផ្ញើទៅលោក Bob ។ បន្ទាប់មកនាងផ្ញើអត្ថបទដែលបានអ៊ិនគ្រីប។

3. លោក Bob ទទួលបានអត្ថបទដែលបានអ៊ិនគ្រីបហើយប្រើពាក្យគន្លឹះសំងាត់ដើម្បីឌិគ្រីបវា។

ចំណាំថាមនុស្សទីបីក៏អាចមានកូនសោសាធារណៈដែរប៉ុន្តែមានតែលោកBobទេដែលមានកូនសោរ កូនសោសម្ងាត់។ ដូច្នេះមានតែលោក Bob ទេដែលអាចទាញយកព័ត៌មានពីការអ៊ិនគ្រីបអត្ថបទ។ បើចាំបាច់ Bob អាចបង្រៀនអាលីសដោយបើកចំហរពីរបៀបអ៊ិនគ្រីបព័ត៌មានជាមួយសោសាធារណៈ។ បើគ្មានចំណេះដឹងអំពីកូនសោរសម្ងាត់ទេមនុស្សទីបីមិនអាចបង្វែរនីតិវិធីអ៊ិនគ្រីបបានទេដើម្បីទទួលបានព័ត៌មានដើមសូម្បីតែក្បួនដោះស្រាយការអ៊ិនគ្រីបត្រូវបានផ្តល់ឱ្យ។ឥឡូវនេះយើងធ្វើបទបង្ហាញពីសាលាភូមិន្ទរដ្ឋបាលប្រព័ន្ធគ្រីប។

ពីRSACrypទៅប្រព័ន្ធ:

១. លោក Bob ធ្វើដូចតទៅ

a) ជ្រើសរើសលេខធំធំពីរផ្សេងគ្នានិងខ្ទង់។

b) គណនា m និង n បែបនោះ, $m = pq$ និង $n = \varphi(pq)$ ។

c) រក a និង b ដូចនោះ $ab \equiv 1 \pmod{n}$ ។

d) ប្រាប់ Alice a និងម៉ែត្រ។ (រក្សា *b, p, q, n* នៅកន្លែងមានសុវត្ថិភាព។)

គណនា $t = (s^a \bmod m)$កន្លែងណា s នេះគឺជាព័ត៌មានសំងាត់ដែលនាងបានដឹងចង់ផ្ញើ t ទៅ Bob ។លោក Bob ទទួលបាន t ហើយអានលទ្ធផលនៃ ($t^b \bmod m$)ច្បាស់ហើយប្រសិនបើ $s = (t^b \bmod m)$ ពេលនោះលោក Bob ពិតជាទទួលបានព័ត៌មានសំងាត់ពីអាលីស។ដើម្បីបកស្រាយ

$0 > s < \min(p, q)$ ។ ដូចេនះ $\gcd(s, m) = 1$

ចាប់តាំងពីទំនិង q គឺព្រឹមនិង$m = p$។

$$t^b \equiv (s^a)^b \pmod{m}$$

$\equiv s^{ab} \pmod{m}$, រម្លឹកឡើងវិញថា $ab \equiv 1 \pmod{n}$

$\equiv s^{1+kn} \pmod{m}$, ដែល $n = \varphi(m); k \in Z$

$\equiv s \,.\, s^k\varphi^{(m)} \pmod{m}$

$\equiv s \,.\, 1 \pmod{m}$, តាមទ្រឹស្តីបទអឺល័រ

$\equiv s \pmod{m}$

សូមកត់សម្គាល់ថាយើងបានដាក់កម្រិតលើសារដែលតូចជាងតូច(ទំ)ដើម្បីធានាថា $gcd\ (s, m) = 1$ ដូច្នេះយើងអាចអនុវត្តទ្រឹស្តីបទអយល័រ។នៅក្នុងជាការពិតការដាក់កម្រិតនេះអាចត្រូវបានដកចេញ។ តោះ s $\in Z$ (pq-1) ។ វាច្បាស់ណាស់ថាមិនអាចទេធំជាង (pq - 1) ដោយសារម៉ូឌុល, m = pq ។ ឧបមា p = នាទី (p; q)និង $\gcd(s; m) > 1$. បន្ទាប់មកវាត្រូវតែជាករណីដែល $s = s'p$ សម្រាប់ចំនួនគត់មួយចំនួន S_0ជាមួយ $1 \leq s' \leq q - 1$. វាធ្វើតាមថា $\gcd(s', q) = 1$ និង $\gcd(s, q) = 1$. ដូចខាងលើ យើងអាចផ្ទៀងផ្ទាត់បានថា$s\boldsymbol{\varphi}^{(m)} \equiv s\boldsymbol{\varphi}^{(p)}\boldsymbol{\varphi}^{(q)} \equiv s\boldsymbol{\varphi}^{(p)(q-1)} \equiv 1 \pmod{q}$.

ដូច្នេះមាន $k \in Z$ មួយចំនួននោះ$1 = {}^{s}\boldsymbol{\varphi}^{(m)+kq}$.គុណនឹងគ្នាដោយs,

$s = s \,.\, s\varphi^{(m)} + \boldsymbol{s} \,.\, kq = \boldsymbol{s}^{1+'(m)} + \boldsymbol{s'kpq}: = \boldsymbol{s}^{1+'(m)} + s'km, s \equiv s^{1+'(m)} \pmod{m}$,

ដោយផ្អែកលើការពិភាក្សាខាងលើការរឹតត្បិតតែមួយគត់សម្រាប់ក្បួនដោះស្រាយ RSA ទៅធ្វើការគឺ p 6 = q និង s 2 Zpq¡1។ ប្រសិនបើ s = 0 ឬ s = 1, ដាក់ស្តែង, អត្ថបទធម្មតានិងដូចគ្នា ហើយវានឹងមិនមានអាថ៌កំបាំងអ្វីទាំងអស់។ច្បាស់ណាស់ប្រសិនបើមនុស្សទីបីដឹង p ឬ q បន្ទាប់មកមនុស្សទីបីអាចទាញយកពីខដូចលោក Bob ធ្វើនិងបំបែកប្រព័ន្ធ។ នៅក្នុងការអនុវត្តយើងជ្រើសរើសលេខបឋមពីរជាមួយនឹងខ្ទង់ប្រហែល ១០០ ខ្ទង់ទសភាគ។ នេះគួរតែជាការសមស្របសម្រាប់មនុស្សជាច្រើនដែលងាយរងគ្រោះព័ត៌មានដូចជាលេខកាតឥណទានគណនីធនាគារលេខអាជ្ញាប័ណ្ណនិងដូច្នេះនៅលើ។ សម្រាប់ព័ត៌មានជាអត្ថបទដូចជាឯកសារដែលមានលក្ខណៈជាក្រុមយើងអាចបែងចែកឯកសារព័ត៌មានទៅជាប្លុកតូចៗ។ ដើម្បីធ្វើលេខបឋមចំនួនពីរដែលមានខ្ទង់ ១០០ គឺមិនមែនទេមិនសំខាន់ប៉ុន្តែអាចធ្វើបានយ៉ាងងាយស្រួលជាមួយកុំព្យូទ័រសព្វថ្ងៃ។ ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយដើម្បីដាក់ជាកត្តាលេខ ២០០ ខ្ទង់ដែលជាផលគុណនៃលេខបឋមពីរមិនអាចទៅរួចទេជាមួយនឹងទ្រឹស្តីនិងបច្ចេកវិជ្ជាលេខថ្ងៃនេះ។ ដូច្នេះសុវត្ថិភាពរបស់សាលាភូមិន្ទរដ្ឋបាលប្រព័ន្ធគ្រីបគឺអាស្រ័យទៅលើភាពស្មុគស្មាញនៃកត្តា m ។

6.8 ចំណោទ

ចំណោទ1៖ដើម្បីអ្វីចំនួនគត់ a ធ្វើឲ្យដូចសមីការខាងក្រោមនេះ ?

$$|2^a| \quad 2^{-a}|។$$

ចំណោទ 2: ពិនិត្យអនុគមន៍ g និង h កំនត់ដូចខាងក្រោមនេះ៖

$$g(x) = x - \lfloor x \rfloor;$$
$$h(x) = x - \lceil x \rceil.$$

ដែល $x \in \mathbf{R}$ is $|g(x)| = |h(x)|$? បង្ហាញចម្លើយរបស់អ្នក។

ចំណោទ 3: បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់សេសទាំងអស់ n, 8 ចែកដាច់ $n^2 - 1$។

ចំណោទ4:ផ្អែកលើរកតម្លៃនៃ a និង b តាមសម្មតិកម្មខាងក្រោមនេះ

តាមប្រមាណវិធីចែកអាល់ហ្គោរីតរកតម្លៃនៃ q និង r នាំឲ្យគេបាន

$$a = qb + r, \text{ ដែល } 0 \le r < |b|.$$

(i) $a = 387, b = 28$; (ii) $a = 191, b = -14$; (iii) $a = -78, b = 15$;
(iv) $a = -105, b = -7$។

ចំណោទ 5: តាង $n \geq 0$ គឺជាចំនួនគត់។ដោយមិនប្រើអនុមាណរួមនៃគណិតវិទ្យា បង្ហាញថា 5 ចែកដាច់ $n(n^4 - 1)$។

ចំណោទ 6: តាង $m \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{Z}$។ បង្ហាញថា

$$\left\lceil \frac{x}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{x+m-1}{m} \right\rfloor.$$

ចំណោទ 7: តាង $m, n \in \mathbf{Z}$ ដែល $m > n > 0$ និង

$$r = m - \lfloor \frac{m}{n} \rfloor n.$$

បង្ហាញថា៖ $r < \frac{m}{2}$

ចំណោទ 8: តាង $t \in \mathbf{Z}$. បង្ហាញថា៖

$$\left\lceil \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor \right\rceil = \left\lfloor \frac{t+2}{4} \right\rfloor.$$

ចំណោទ 9: បង្ហាញថាលទ្ធផលខាងលើនៃចំណោទដែលមាន $t \in$ R.។

ចំណោទ 10: គណិតវិទូអេហ្សិបនៅឆ្នាំ 1800 B.C. បានធ្វើបទបង្ហាញថាចំនួនសនិទានចន្លោះ 0 និង 1 ដូចជាផលបូកនៃ ក្រុមភាគបែង $1/a + 1/b + \cdots + 1/k$ ដែល $a, b, \ldots, k$ ដែលត្រូវបានចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្សេង E.g., វាបានសរសេរ 2/5 ដូចជា៖

1/3 + 1/15. បង្ហាញថាវាគឺជានិច្ចកាលវាអាចទៅរួចថាដើម្បីធ្វើតាមប្រព័ន្ធនេះមធ្យោបាយដូចការខាងក្រោមនេះបើ $0 < m/n < 1$, នោះ ចំពោះ $q = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q} + \quad \text{បង្ហាញម្តងទៀត} \quad \left\{ \frac{m}{n} - \frac{1}{q} \right\}.$$

បង្ហាញថាពីការបញ្ឈប់នីតិវិធីខាងលើនេះបន្ទាប់ពីចំនួនកំណត់ នៃជំហាន។

ចំណោទ 11: រកគោលប្រាំបី នៃ100 និងរកគោល9 នៃ 1000។
ចូរបង្ហាញលំអិតការងាររបស់អ្នក។

ចំណោទ 12: គេមាន $b \geq 2$ គឺជាចំនួនគត់។ សរសេរមួយរង្វិលជុំបានអាល់ហ្គោរីតដើម្បីស្វែងរក។ ដែលគ្រប់ $n \in \mathbf{N}$, គោល b ការបង្ហាញនៃ n។

ចំណោទ 13: មាន $a, b, x,$ និង y គឺជាចនួនគត់ដូចនេះ $\gcd(a, b) = ax + by$។ បង្ហាញថា x និង y មានទំនាក់ទំនងចំនួនបឋមរវាងគ្នា

ចំណោទ 14: មាន a, b ជាចំនួនគត់នៃទំនាក់ទំនងបឋមនឹងគ្នា។ ឧបមាថា m គ្រប់ចំនួនគត់នោះ $a|m$ និង $b|m.$។បង្ហាញថា $ab|m$។

ចំណោទ15: រកចំនួនគត់ *a, b, x, y* នោះ $ax+by = 2$, but $\gcd(a, b) \neq 2$។ ពន្យល់យ៉ាងម៉េចដែលអាចទៅរួច។

ចំណោទ 16: រក $\gcd(242, 165)$ និង $\gcd(17296, 18416)$។

ចំណោទ17: កំនត់ $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, និងសម្រាប់ $n \geq 2$,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

ស្វីតប្រភេទនេះហៅថាស្វីតហ្វីបូណាឈី។តាង $m, n \in \mathbf{N}$ និង $m > n \geq 0$ ។បង្ហាញដោយអនុមាណរូមគណិតវិទ្យាថាបើស្នាដៃអាល់ហ្គោរីតរបស់ Eucli k រង្វិលជុំឲ្យស្វែងរក gcd នៃ m នឹង n, នោះ

$$m \geq F_{k+2} \text{ និង } n \geq F_{k+1} \text{ ។}$$

ចំណោទ 18: រក $x, y \in \mathbf{Z}$ នោះ

$$\gcd(375, 275) = 375x + 275y.$$

ចំណោទ 19: បង្ហាញថាបើ x និង y ចំនួនសេស, នោះនាំឲ្យវាមិនអាចស្វែងរកចំនួនគត់ a នោះ $x^2 + y^2 = a^2$។

ចំណោទ 20: បង្ហាញថាបើ x និង y មិនអាចចែកដាច់នឹង 3, នាំឲ្យមិនអាចស្វែងរកចំនួនគត់ a នោះ $x^2 + y^2 = a^2$។

ចំណោទ 21: បង្ហាញថាបើ $2^n - 1$ ជាចំនួនបឋមនោះ, n ជាចំនួនបឋមមួយ។
តើវិចារខាងលើនេះពិតឬទេ

ចំណោទ 22: រកគ្រប់ $m \geq 1$ នោះ $27 \equiv 9 \pmod{m}$។

ចំណោទ 23: តើជាតុមួយណានៃ *A* កង់គ្លយអង់ចំពោះជាតុផ្សេងៗខាងក្រោមនេះ៖ mod 3? mod 7? ចូរពន្យល់

$$A := \{687, 589, 931, 847, 527\}.$$

ចំណោទ 24: សម្រាប់គ្រប់គូ (x, m) នៅក្នុង B, រកចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលតូចជាងគេបំផុត r ដូចេះ $x \equiv r \pmod{m}$ ។ចូរពន្យល់។

$$B := \{(19, 2),\ (131, 5),\ (84, 14),\ (141, 17)\}.$$

ចំណោទ 25: ស្វែងរកចម្លើយបើមានដើម្បីស្វែងរកកង់គ្លុយអង់នៅខាងក្រោមនេះ៖

1. $5x \equiv 9 \pmod{17}$.
2. $18y \equiv 8 \pmod{15}$.
3. $12z \equiv 15 \pmod{42}$.

ចំណោទ 26: គេមាន $m, n \geq 1$ និង $a \in \mathbf{Z}$។ បង្ហាញថាបើ $a^n \equiv 1 \pmod{m}$ នាំឲ្យ $\gcd(a, m) = 1$។

ចំណោទ 27: ធ្វើចំនួននេះ $19, 8, -3, -5, 10, 5$ បំពេញទម្រង់សំណល់នៃប្រព័ន្ធ modulo 6?

ចំណោទ 28: គេមាន $\in \mathbf{N}$ និង$s \in \mathbf{Z}$, និងតាងC ជាប្រព័ន្ធដែលមានលក្ខណៈពេញលេញនៃសំណល់

mod m។នាំឲ្យ $C + s := \{c + s; c \in C\}$
ជាប្រព័ន្ធពេញលក្ខណៈនៃសំណល់ mod m។

ចំណោទ 29: រកសំណល់តូចបំផុតវិជ្ជមាននៃ $(15)^{35} \bmod 19$។បង្ហាញពីជំហ៊ានរបស់យើង និងពន្យល់ពីទម្រង់វិធីសាស្ត្ររបស់យើង។

ចំណោទ 30: រកសំណល់តូចបំផុតវិជ្ជមាននៃ$(29)^{36} \bmod 17$។

ចំណោទ 31: តាង $\gcd(t, m) = 1$, និងតាង $\{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$ គ្រប់ប្រព័ន្ធសំណល់លេញ mod m។បង្ហាញថា $\{ta_0, \ldots, ta_{m-1}\}$ ជាប្រព័ន្ធពេញសំណល់ផងដែរ mod m។

ចំណោទ 32: ដោយគ្មានឯកសារយោងចំពោះប្រតិទិនបង្ហាញថាប្រតិទិនប្រចាំខែធ្នូឆ្នាំ 1976 គឺដូចគ្នាចំពោះខែកក្កដាឆ្នាំ 1987។

ចំណោទ 33: តាង $f(x) = 13x^3 - 5x^2 + 14x - 10$។ គណនាសំណល់តូចបំផុតនៃ $f(12) \bmod 7$។

ចំណោទ 34: Let $m \geq 1$. ។បង្ហាញថាគ្រប់ $a, x \in \mathbf{Z}$, បើ $x \in \ ^{a} \ _{m}$ នោះ $\gcd(x, m) = \gcd(a, m)$.

ចំណោទ 35: ចូរគណនាតម្លៃសំណល់ដែលតូចបំផុតវិជ្ជមានដូចខាងក្រោមនេះ៖

1. $2^{14} \pmod{17}$
2. $3^{100} \pmod{5}$

ចំណោទ 36: បង្ហាញថាប្រព័ន្ធកង់គ្លុយអង់ទាំងបីរៀងគ្នាខាងក្រោមនេះ៖

$x \equiv 3 \pmod{5}$	$y \equiv 2 \pmod{5}$	$z \equiv 7 \pmod{16}$
$x \equiv 2 \pmod{6}$	$y \equiv 7 \pmod{13}$	$z \equiv 1 \pmod{9}$
$x \equiv 3 \pmod{7}$	$y \equiv 11 \pmod{8}$	$z \equiv 2 \pmod{25}$

ចំណោទ 37: បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់ $m \geq 0$,

$$(2^m - 1)(2^m - 2)(2^m - 4) \equiv 0 \pmod{7}។$$

ចំណោទ 38: រកគ្រប់ $n \geq 0$ ដែល

$$3^n + 4^n \equiv 0 \pmod 7.$$

ចំណោទ 39: គេមាន m និង n ចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ បង្ហាញថាផ្នែកតូចៗនៃ $\mathbf{Z}$ ផ្តល់ដោយកង់គ្លួយអង់ $\bmod m$ គឺធ្វើឲ្យប្រសើរឡើងនៃផ្នែកនោះសម្រាប់កង់គ្លួយអង់ $\bmod n$ លុះត្រាតែ m គឺជាពហុគុណនៃ n។

ចំណោទ 40: កណត់ស្វ៊ីត $a_0, a_1, a_2, \ldots$ នៃចំនួនគត់ដោយការធ្វើវិធ្វិលជុំ $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (គ្រប់ $n \geq 0$) និង លក្ខខណ្ឌតំបូង $a_0 = 0$ និង $a_1 = 1$។ បង្ហាញថា (តាមអនុមាណរួម?) $a_{5k} \equiv 0 \pmod 5$ គ្រប់ $k \geq 0$។

ចំណោទ 41: រក $\varphi(18)$, $\varphi(40)$, និង $\varphi(72)$។

ចំណោទ 42: ស្រាយថា $2^{20} \equiv 1 \pmod{75}$ ដោយប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីបទអឺល័រនិងទ្រឹស្តីបទ6.23

ចំណោទ 43: សម្រាប់គ្រាប់ $m \geq 1$,

$$\varphi(m) = m \prod_{p|m} (1 - \frac{1}{p}).$$

ទីនេះ $p|m$ មានន័យថា p គឺជាបឋមចែកដាច់ m។ផលគុណគឺជាការគ្រប់គ្រងគ្រប់ចំនួន

ចំណោទ 44: (i) បង្ហាញថា n ជាចំនួនសេសនោះ $\varphi(2n) = \varphi(n)$ ។
(ii) តើមាន $n \geq 1$ នាំឲ្យ $\varphi(3n) = \varphi(n)$?
(iii) បង្ហាញថាបើ n ជាចំនួនគូ,នោះ $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$.

ចំណោទ 45: រកគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 1$ នោះ $\varphi(n) = 8$.

6.9 ដំណោះស្រាយ

ចម្លើយទី 1: នៅពេលគ្រប់ចំនួនគត់ a, $2^a > 0$ និង $2^{-a} > 0$, យើងអាចទទួលបានការបំបាត់ដំណោះតម្លៃនៃសញ្ញា ដូចខាងក្រោម៖,

$$\begin{aligned} |2^a| = |2^{-a}| &\Rightarrow & 2^a &= 2^{-a} \\ &\Rightarrow & 2^a 2^a &= 1 \\ &\Rightarrow & 2^a &= 1 \\ &\Rightarrow & a &= 0. \end{aligned}$$

□

ចម្លើយ 2: គ្រប់ $x \in \mathbf{R}$ យើងដឹងថា $x \geq \lfloor x \rfloor$, និង $x \leq \lceil x \rceil$. ដូចនេះ,គ្រប់ $x \in \mathbf{R}$, $g(x) \geq 0$, និង $h(x) \leq 0$. តាង $x = k + s$, ដែល $k \in \mathbf{Z}$, $s \in \mathbf{R}$ និង $0 \leq s < 1$.

$$\begin{aligned} & |g(x)| = |h(x)| \\ \Rightarrow \quad & g(x) = -h(x) \\ \Rightarrow \quad & x - \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil - x \\ \Rightarrow \quad & 2x = \lceil x \rceil + \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

ដូច្នេះ, $2k + 2s = \lceil k + s \rceil + \lfloor k + s \rfloor$.

ករណី1: បើ $s = 0$, i.e., បើ x ជាចំនួនគត់, នោះគ្រប់ $k \in \mathbf{Z}$ សមីការខាងលើ។

ករណី 2: បើ $0 < s < 1$, នាំឲ្យ $\lceil k + s \rceil = k + 1$, និង $\lfloor k + s \rfloor = k$. ។បើសមីការខាងលើ នោះ $2k + 2s = 2k + 1$. ដូចនេះ, $s = 1/2$.

ចេញពីករណីពីរខាងលើ,ពិតប្រាកដសំណុំនៃ $|g(x)| = |h(x)|$ គឺ៖

$$\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm(1 + \frac{1}{2}), \pm 2, \pm(2 + \frac{1}{2}), \pm 3, \ldots\}.$$

□

ដំណោះស្រាយ3: តាង $n = 2k + 1$, $k \in \mathbf{Z}$. $n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k(k + 1)$. តាង k' រ៉ែងលើ $\mathbf{Z}$.

តាង 1: បើ $k = 2k'$, then $n^2 - 1 = 8k'(2k' + 1)$។

ករណី **2:** បើ $k = 2k' + 1$, នាំឲ្យ

$$n^2 - 1 = 4(2k' + 1)(2k' + 2) = 8(2k' + 1)(k' + 1).$$

ក្នុងករណីនេះផងដែរ, $n^2 - 1$ ដែលចែកដាច់នឹង 8. $\square$

ដំណោះស្រាយ **4:**

(i) $387 = 28 \times 13 + 23,\ q = 13, r = 23.$

(ii) $191 = -14 \times -13 + 9,\ q = -13, r = 9.$

(iii) $-78 = 15 \times -6 + 12,\ q = -6, r = 12.$

(iv) $-105 = -7 \times 15 + 0,\ q = 15, r = 0.$

$\square$

ដំណោះស្រាយ **5:** ដំណោះស្រាយមានភាពងាយស្រួលបើយើងសរសេរដូចខាងក្រោមនេះ $n(n^4 - 1)$

$$(n-1)n(n+1)(n^2+1).$$

គ្រប់ $n \in \mathbf{Z}$ អាចសរសេរបានជា $n = 5q + r$, ដែល $q \in \mathbf{Z}$ និង $0 \le r < 5$។យើងមាន 5 ករណី។ក្នុងករណីនីមួយៗមានកត្តានៃ $n(n^4 - 1)$ គឺស្មើនឹង 0, ដូចដែលយើងឃើញដូចខាងក្រោម៖

ករណីទី **1:** $n = 5q$; n ខ្លួនឯងចែកដាច់នឹង 5។

ករណីទី **2:** $n = 5q + 1$; $n - 1$ ចែកដាច់នឹង 5។

ករណីទី **3:** $n = 5q + 2$;

$$n^2 + 1 = (5q + 2)^2 + 1 = 25q^2 + 20q + 4 + 1 = 5(5q^2 + 4q + 1).$$

ដូច្នេះ $n^2 + 1$ គឺចែកដាច់នឹង 5។

ករណីទី **4:** $n = 5q + 3$;

$$n^2 + 1 = (5q + 3)^2 + 1 = 25q^2 + 30q + 9 + 1 = 5(5q^2 + 6q + 2).$$

នោះនាំឲ្យ $n^2 + 1$ ចែកដាច់នឹង 5។

ករណីទី **5:** $n = 5q + 4$; $n + 1$ គឺចែកដាច់នឹង 5។

$\square$

ដោយចែកអាល់ហ្គោរីត យើងបាន $x = qm + r$ ដែល $q, r \in \mathbf{Z}$ និងដែល 0 ≤ r < m.

ដូច្នេះ

$$\left\lceil \frac{x}{m} \right\rceil = \left\lceil q + \frac{r}{m} \right\rceil = \begin{cases} q & \text{ករណី } r = 0, \\ q + 1 & \text{បើ } r > 0, \end{cases}$$

និង

$$\left\lfloor \frac{x+m-1}{m} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r}{m} + 1 - \frac{1}{m} \right\rfloor = \begin{cases} q & \text{បើ } r = 0, \\ q + 1 & \text{បើ } 0 < r < m. \end{cases}$$

ដូច្នេះ

$$\left\lceil \frac{x}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{x+m-1}{m} \right\rfloor .$$

$\square$

ដំណោះស្រាយ 7: ដោយប្រើប្រមាណវិធីចែក $0 \le r < n$. ពិនិត្យដូចខាងក្រោមនេះ៖ ពីរករណី:

ករណីទី 1: $0 < n \le \frac{m}{2}$. ក្នុងករណីនេះ , $r < \frac{m}{2}$ ដូចខាងក្រោមនេះ

ករណីទី 2: $\frac{m}{2} < n < m$. នៅក្នុងករណីនេះវាច្បាស់ណាស់ថា $1 < \frac{m}{n} < 2$, ឬ $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor = 1$.
ដូច្នេះ , $r = m - \lfloor \frac{m}{n} \rfloor n = m - n < m - \frac{m}{2}$. នោះ , $r < \frac{m}{2}$.

$\square$

ដំណោះស្រាយ 8: លំហាត់ទី9 គឺជាករណីពិសេសលំហាត់ទី 10, ដូច្នេះដំណោះស្រាយរបស់វាគឺពិនិត្យចេញពីដំណោះស្រាយខាងលើនេះ។

$\square$

ដំណោះស្រាយ 9: មាន $t \in \mathbf{R}$. ដោយប្រមាណវិធីអាល់ហ្គោរីត $t = 2k + r$, ដែល $0 \le r < 2, r \in \mathbf{R}$, និង $k \in Z$. ដោយការជំនួស $t = 2k + r$ នៅផ្នែកខាងឆ្វេងយើងបាន៖

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor \right\rceil &= \left\lceil \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{2k+r}{2} \right\rfloor \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{1}{2} \left\lfloor k + \frac{r}{2} \right\rfloor \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{2} k \right\rceil, \text{ ពីព្រោះ } \quad 0 \le \frac{r}{2} < 1. \end{aligned}$$

ដូចគ្នានេះដែរ, ដោយការជំនួស $t = 2k + r$ នៅផ្នែកខាងស្តាំ យើងបាន៖

$$\left\lfloor \frac{t+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k+r+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{2} + \frac{r+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{2} + s \right\rfloor,$$

ដែល $\frac{1}{2} \leq s = \frac{r+2}{4} < 1$. ចំនួនគត់ k គឺជាចំនួនសេស ឬ គូ

ករណីទី1: បើ k គឺចំនួនគូ, នោះ $k = 2n$ គេបាន n $\lceil \frac{k}{2} \rceil = \lceil n \rceil = n$, និង

$$\left\lfloor \frac{k}{2} + s \right\rfloor = \lfloor n + s \rfloor = n.$$

ដូចនេះសមីការនោះខាងលើ

ករណីទី 2: បើ k សេស, នោះ $k = 2n + 1$ ជាចំនួនគត់ n, $\lceil \frac{k}{2} \rceil = \lceil n + \frac{1}{2} \rceil = n + 1$, និង

$$\left\lfloor \frac{k}{2} + s \right\rfloor = \left\lfloor n + \frac{1}{2} + s \right\rfloor = \left\lfloor n + 1 + (s - \frac{1}{2}) \right\rfloor$$

$$= n + 1, \text{ ពីព្រោះថា } 0 \leq s - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}.$$

ដូច្នេះ, គ្រប់ករណីគឺជាសមភាពនឹងគ្នា $\square$

ដំណោះស្រាយ 10: ជាបឋមយើងត្រួតពិនិត្យបម្រែបម្រួលនៃប្រមាណវិធីចែកអាល្គោរីត។គេមាន $m, n \in \mathbf{Z}$ ដែល $m \neq 0$, នោះមានចំនួនគត់តែមួយគត់គឺ q, r នោះនាំឲ្យ

$$[n = mq - r, \text{ និង } 0 \leq r < |m|, \tag{6.33}$$

ដែល $q = \lceil \frac{n}{m} \rceil$ និង $r = mq - n$. ជាបន្ថែមតាង $0 < m < n$ នោះ $0 \leq r < m$.

ដោយចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (6.33)ដោយ n និងគេបានការរៀបចំ

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q} + \frac{r}{nq}.$$

ឥឡូវនេះយើងសង់រង្វិលជុំនៃអាល់ហ្គោរីតបង្ហាញថាសមាមាត្រដូចគ្នានឹងអ្នកប្រជូអេស៊ីបបានធ្វើ

```
f(m, n)
   if m = 1 then
      { print(1/n); stop; }
   q ← ⌈n/m⌉;
   r ← mq − n;
   if r = 0 then
      { print(1/q); stop; }
   print(1/q +);
   f(r, nq);
end f
```

តើយើងអាចដឹងបានថាយ៉ាងម្ដេចថាអាល់ហ្គោរីតនឹងបញ្ឈប់គ្រប់ចំនួនគត់n, m ដោយ $0 < m < n$? ពីព្រោះយើងដឹងថា r គឺពិតជាតូចជាង m. ដូច្នេះ បើយើង,

អនុវត្តន៍ f ទៅ n ដូចអាគុយម៉ង់ទី១, ជាទីបំផុតអាគុយម៉ង់ទី១នឹងស្មើ 0 ឬ 1 និងមិនមានរង្វិលជុំច្រើនទៀតទេហើយយើងនឹងបាន $\square$

ដំណោះស្រាយ 11: គ្រប់ករណីទាំងអស់យើងប្រើប្រាស់ប្រមាណវិធីចែកអាល់ហ្គោរីតនិងបានជោគជ័យក្នុងការសំណល់

$$\begin{aligned} 100 &= 12\times 8 + 4 \\ 12 &= 1\times 8 + 4 \\ 1 &= 0\times 8 + 1 \end{aligned}$$

ដូចនេះ, $100 = (144)_8$.

$$\begin{aligned} 1000 &= 111\times 9 + 1 \\ 111 &= 12\times 9 + 3 \\ 12 &= 1\times 9 + 3 \\ 1 &= 0\times 9 + 1 \end{aligned}$$

ដូចនេះ, $1000 = (1331)_9$. $\square$

ដំណោះស្រាយ 12:

```
b(n)
    if n = 0 then    stop;
    k ← ⌊n/b⌋;
    r ← n − bk;
    b(k);    print(r);    stop;
end b
```

$\square$

ដំណោះស្រាយ 13: តាង $a = da'$, $b = db'$ និង $d = \gcd(a, b) = ax + by$ សម្រាប់គ្រប់ចំនួនគត់ x និង y. យើងបាន

$$\begin{aligned} & d = ax + by = da'x + db'y \\ \Longrightarrow \quad & 1 = a'x + b'y. \end{aligned}$$

ពីព្រោះ a' និង b' ជាចំនួនគត់,តាមទ្រឹស្តីបទ 6.12, $\gcd(x, y) = 1$។ $\square$

ដំណោះស្រាយ 14: ឧបមាថា $a|m, b|m, m \in Z$. ចាប់តាំងពី a និង b ជាទំនាក់ទំនងបឋមរវាងគ្នា

ចំនួនគត់ យើងពិនិត្យ

$$\begin{aligned}\gcd(a,b)=1 \Rightarrow xa+yb=1 \text{ មានចំនួនគត់ } x,y\in \mathbf{Z}\\ \Rightarrow \quad mxa+myb=m\\ \Rightarrow \quad \frac{mxa}{ab}+\frac{mby}{ab}=\frac{m}{ab}\\ \Rightarrow \quad \frac{m}{b}x+\frac{m}{a}y=\frac{m}{ab}\end{aligned}$$

ពេល $\frac{m}{b}, x, \frac{m}{a},$ និង y ជាចំនួនគត់, ដូចនេះ យើង $\frac{m}{ab}$ ជាចំនួនគត់ផងដែរ,និងដូចនេះ □ $ab|m.$

ដំណោះស្រាយ 15: តាង $a=b=x=y=1$។វាមានភាពងាយស្រួល $ax+by=2$,តែ □ $\gcd(a,b)\neq 2.$

ដំណោះស្រាយ 16: តាង $q=\lfloor \frac{m}{n}\rfloor$ និង $r=m-\lfloor \frac{m}{n}\rfloor n.$

m	$=$	$n\times q$	$+$	$r,$
242	=	165×1	+	77,
165	=	77×2	+	11,
77	=	11×7	+	0.

ដូច្នេះ, $\gcd(242,165)=11.$

m	$=$	$n\times q$	$+$	$r,$
18416	=	17296×1	+	1120
17296	=	1120×15	+	496
1120	=	496×2	+	128
496	=	128×3	+	112
128	=	112×1	+	16
112	=	16×7	+	0.

ដូច្នេះ, $\gcd(18416,17296)=16.$

□

ដំណោះស្រាយ 17: សេចក្តីនោះគឺពិតណាស់ដែលនឹងត្រូវបានបង្ហាញដោយអនុមាណរួមគណិតវិទ្យាខាងក្រោមនេះ

- មូលដ្ឋាននៃអនុមាណរួម $k=1$. នៅក្រោមល័ក្ខខ័ណ្ឌ $m,n\in \mathrm{N}$ និង $0\leq n<m$ និងពីព្រោះអាល់ហ្គោរីតមានរង្វិលជុំមួយដែលចំនួនតូចបំផុតតម្លៃនៃ $m,$ n គឺ 2, 1, ដែលរៀងគ្នា។ពេលដែល $F_{k+2}=F_3=2,$ និង $F_{k+1}=F_2=1,$ ជាគោលការណ៍

- អនុមាណរួមនៃអ៊ីប៉ូតេនុស: ឧបមាថាអាល់ហ្គោរីតបង្កើត k ខួបរង្វិលជុំនិង $F_{k+2}\leq m, F_{k+1}\leq n.$

• ជំហ៊ានអនុមាណរួមៈ ឧបមាថាអនុមាណរួមអាល់ហ្គោរីតបង្កើតបាន $k+1$ រង្វិលជុំ។បន្ទាប់មករង្វិលជុំដំបូងនាំឲ្យមានអាល់គុយម៉ង់ថ្មីនោះគឺ n និង m – (m/n)n ។តាងដូចខាងក្រោមនេះ

$$m' = n, \tag{6.34}$$

$$n' = m - \lfloor \frac{m}{n} \rfloor n. \tag{6.35}$$

តាមការសង្កេតយើងបានដឹងថា $\gcd(m', n')$ នឹងបង្កើតបានរង្វិលជុំ k ,និងដោយធ្វើអនុមាណរួមនៃអ៊ីប៉ូតេសនុសយើងថែមទាំងដឹងថា

$$F_{k+2} \leq m', \tag{6.36}$$

$$F_{k+1} \leq n'. \tag{6.37}$$

ចេញពី (6.34) និង (6.36) យើងមាន $F_{k+2} \leq n$ ។យើងមានល័ក្ខខ័ណ្ឌ, $n < m$, អនុវត្តន៍បានថា$1 \leq \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$. ដែលពី (6.35) យើងបាន

$$\begin{aligned} n' \leq m - n &\implies n' + n \leq m \\ &\implies F_{k+1} + F_{k+2} \leq n' + n \leq m \implies F_{k+3} \leq m. \end{aligned}$$

$\square$

ដំណោះស្រាយ 18:

$$\gcd(375, 275) = 375x + 275y.$$

m/n	x_0/x_1	y_0/y_1	r
375	1	0	
275	0	1	1
100	1	−1	2
75	−2	3	1
25	3	−4	3
0			

ដូចនេះ $, x = 3, y = -4.$

$\square$

ដំណោះស្រាយ 19: តាង $x = 2p + 1, y = 2q + 1$ ដែល $p, q \in \mathbf{Z}$. នោះ,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2p+1)^2 + (2q+1)^2 \\ &= 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1 \\ &= 4(p^2 + p + q^2 + q) + 2 \\ &= 4K + 2 \end{aligned}$$

ដែល $K = p^2 + p + q^2 + q$, គឺជាចំនួនគត់មួយ។

ឧបមាថាវាអាចស្វែងរកចំនួនគត់ដូចជា $a^2 = x^2 + y^2$. ។ដូចនេះវាមានពីរករណីដែលអាច

ករណីទី **1:** $a = 2k$ ដែលចំនួនគត់ k។នោះគេបាន $a^2 = 4k^2$, និង

$$4K + 2 = 4k^2 \implies K + \frac{1}{2} = k^2.$$

ករណីនេះមិនអាចកើតមានឡើយ, ពីព្រោះទាំង K និង k^2គឺជាចំនួនគត់។

ករណីទី **2:** $a = 2k + 1$ ដែលមានជាចំនួនគត់ k។ $a^2 = 4k^2 + 4k + 1$, និង

$$4K + 2 = 4k^2 + 4k + 1 \implies K + \frac{1}{4} = k^2 + k.$$

ករណីនេះក៏មិនអាចកើតមានដែរ ពីព្រោះថាទាំង K, k, និង k^2 គឺជាចំនួនគត់

ដូច្នេះ , $x^2 + y^2 = a^2$ គឺមិនអាចកើតមានឡើយ។ $\square$

ដំណោះស្រាយ **20:** បើ x មិនអាចចែកដាច់នឹង 3, នោះមាន២ករណី: $x = 3p + 1$ និង $x = 3p + 2$ ដែលមានចំនួនគត់ p។ដូចគ្នាបើ y មិនអាចចែកដាច់នឹង 3, មានពីរករណី: $y = 3q + 1$ និង $y = 3q + 1$។មានចំនួនគត់ a ខ្លួនវាមាន 3 ករណី: $a = 3k$, $a = 3k + 1$, និង $3k + 2$. ជាសារុបយើងបាន $2 \times 2 \times 3$ ករណី។
សម្រាយនៃករណីនីមួយៗមានលក្ខណៈចាំបាច់ដូចគ្នា។នៅទីនេះយើងទើបបានបង្ហាញបាន១ករណី: $x = 3p + 2$, $y = 3q + 2$, $a = 3k + 2$, ដែល $p, q, r \in \mathbf{Z}$។

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (3p + 2)^2 + (3q + 2)^2 \\ &= 9p^2 + 12p + 4 + 9q^2 + 12q + 4 \\ &= 3(3p^2 + 4p + 3q^2 + 4q) + 8 \\ &= 3K + 8 \end{aligned}$$

ដែល $K = 3p^2 + 4p + 3q^2 + 4q$, ដែលមានចំនួនគត់។ដូចគ្នានេះដែរ

$$\begin{aligned} a^2 &= (3k + 2)^2 \\ &= 9k^2 + 12k + 4 \\ &= 3(3k^2 + 4k) + 4 \\ &= 3K' + 4 \end{aligned}$$

ដែល $K' = 3p^2 + 4p$, ជាចំនួនគត់។ ដូចនេះ

$$3K + 8 = 3K' + 4 \implies K + \frac{4}{3} = K'.$$

នៅខណៈពេលដែលទាំង K និង k' ជាចំនួនគត់។ករណីនេះដែរមិនអាចកើតមាន $\square$

ដំណោះស្រាយ **21**: ឧបមាថា 2^n-1 ជាចំនួនបឋមនិង n មិនមែនជាចំនួនបឋមនោះទេ។បើ n គឺមិនមែនជាចំនួនបឋមនោះនាំឲ្យមាន $p,q\in\mathbf{Z}$ និង $p,q\geq 2$ នោះ $n=pq$

$$\begin{aligned}2^n-1&=2^{pq}-1\\&=(2^p)^q-1\\&=(2^p-1)((2^p)^{q-1}+(2^p)^{q-2}+\cdots+1).\end{aligned}$$

ពីព្រោះថា $p,\ q\geq 2$, ទាំង 2^p-1 និង $(2^p)^{q-1}+(2^p)^{q-2}+\cdots+1$ គឺធំជាងឬស្មើនឹង 2 ។ ដូចនេះ, 2^n-1 មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ, ផ្ទុយតាមការត្រួតពិនិត្យផ្ទុយទៅនោះ។

ការពិភាក្សាគ្នាគឺខុស។នេះគឺគ្រាន់តែជាឧទាហរណ៍: $n=11$, ជាចំនួនបឋម។យើង $2^n-1=2047=23\times 89$, ដែលមិនមែនជាចំនួនបឋមទេ។ $\square$

ដំណោះស្រាយ **22**: $27\equiv 9 \pmod m$ មានន័យថាមានចំនួនគត់k, $(27-9)=km$។ដូចនេះយើងអាចស្វែងរកគ្រប់តម្លៃ m នោះ $(27-9)/m$ ជាចំនួនគត់។គ្មានអ្វីសោះប៉ុន្តែកត្តានៃ 18 អាចបានបញ្ជាក់តាមលក្ខខ័ណ្ឌ។ដូចនេះ, $m\in\{1,2,3,6,9,18\}$. $\square$

ដំណោះស្រាយ **23**: នៅក្នុងសំណួរនេះយើងស្វែងរកធាតុនៃ A ដែលមានសំណល់ដូចគ្នាបន្ទាប់ពីចែកដាច់នឹង 3 និង 7, រៀងគ្នា;ដូចជាធាតុមិនល្បើងគ្នា

$$\begin{aligned}687&=229\times 3+0=\ \ 98\times 7+1\\589&=196\times 3+1=\ \ 84\times 7+1\\931&=310\times 3+1=133\times 7+0\\847&=282\times 3+1=121\times 7+0\\527&=175\times 3+2=\ \ 75\times 7+2\end{aligned}$$

ដូចនេះ,

$$589\equiv 931\equiv 847\equiv 1 \pmod 3$$
$$687\equiv 589\equiv 1 \pmod 7$$
$$931\equiv 847\equiv 0 \pmod 7$$

$\square$

ដំណោះស្រាយ 24:

យើងរកសំណល់នៃ x បន្ទាប់ពីចែកដាច់នឹង m សម្រាប់គ្រប់គូនៃ x និង m។

x	$=$	$k \times m$	$+$	r,
19	=	9×2	+	1
131	=	26×5	+	1
84	=	6×14	+	0
141	=	8×17	+	5

ដូចនេះ,

$$\begin{aligned} 19 &\equiv 1 \pmod{2} \\ 131 &\equiv 1 \pmod{5} \\ 84 &\equiv 0 \pmod{14} \\ 141 &\equiv 5 \pmod{17} \end{aligned}$$

$\square$

ដំណោះស្រាយ 25:

1. ដើម្បីបង្ហាញថា $5x \equiv 9 \pmod{17}$, ជាបឋមត្រូវពិនិត្យថា $\gcd(5, 17) = 1$។ពិតប្រាកដ $\gcd(5, 17)|9$,នាំឲ្យសមីការអង់គ្លុយអង់មានឫស។ដោយប្រើប្រាស់អាល់ហ្គោរីតមួយ

$$\gcd(5, 17) = 1 = 5 \times 7 + 17 \times (-2).$$

ដូចនេះ, $x_0 = 7 \times 9 = 63$ ជាចម្លើយ។ម្យ៉ាងទៀត, $\mathrm{lcm}(5, 17)/5 = 17$។ នោះ,

$\lfloor 63 \rfloor_{17}$, ឬស្មើ $\lfloor 12 \rfloor_{17}$ ជាសំណុំនៃគ្រប់ដំណោះស្រាយ

2. $18y \equiv 8 \pmod{15}$មិនមានចម្លើយ ព្រោះ $\gcd(18, 15) = 3 \not| 8$.
3. $12z \equiv 15 \pmod{42}$ គ្មានចម្លើយ ព្រោះ $\gcd(12, 42) = 6 \not| 15$.

$\square$

ដំណោះស្រាយ 26: តាង $a^n \equiv 1 \pmod{m}$. ដូចនេះ, $a^n - 1 = km$ មានចំនួនគត់ $k \in \mathbb{N}$.

$$a^n - km = 1 \Rightarrow (a^{n-1})a + (-k)m = 1$$

$$\Rightarrow \gcd(a, m) = 1, \text{ តាមទ្រឹស្តីបទ } 6.12$$

$\square$

ដំណោះស្រាយ27:គេឲ្យសំណុំចំនួនគត់នៃទំហំតម្លៃm,វិធីងាយបំផុតនោះគឺឲ្យសំណុំសំណល់នៃប្រព័ន្ធម៉ូឌុលូ m គឺប្រើប្រាស់វិធីចែកអាល់ហ្គោរីតដើម្បីរកសំណល់សម្រាប់ធាតុនីមួយៗដែលបានចែកដាច់ដោយ m ។បើសំណល់នោះបានគ្របដណ្តប់ទាំងអស់នៃសំណុំនៃធាតុក្នុង

$$\{0, 1, 2, \ldots, m-1\},$$

នោះនាំឲ្យគេមានសំណុំនៃសំណល់ប្រព័ន្ធម៉ូឌុឡូmម្យ៉ាងទៀតបើយើងរកឃើញថាពីរនៃវាមានសំណល់ដូចគ្នា នោះសម្មតិម្មនៃសំណុំគឺមិនបានបំពេញជាប្រព័ន្ធម៉ូឌុឡូm,ពីព្រោះយើងត្រូវការmផ្សេងគ្នាថ្នាក់សមមូលដើម្បី គ្រប់ដណ្តប់នៅលើZ។ដូចនេះបញ្ហានេះទំនងជាងាយដើម្បីរកមើលសំណល់និងពិនិត្យវា។ដោយការប្រើប្រាស់បុរមាណវិធីចែកអាល់ហ្គោរីតដែលយើងស្គាល់

$$\begin{array}{rrr} 19 \in \lfloor 1 \rfloor_6 & 8 \in \lfloor 2 \rfloor_6 & -3 \in \lfloor 3 \rfloor_6 \\ -5 \in \lfloor 1 \rfloor_6 & 10 \in \lfloor 4 \rfloor_6 & 5 \in \lfloor 5 \rfloor_6 \end{array}$$

ដូចនេះ, $\{19, 8, -3, -5, 10, 5\}$ មិនមែនជាប្រព័ន្ធពេញលិញរេស៊ីឌុយម៉ូលឌុលូ 6, ព្រោះ 19
$= -5$. $\lfloor \square \rfloor_6$ $\lfloor \quad \rfloor_6$

ដំណោះស្រាយ 28: យើងចង់បង្ហាញថាបើ $s \in \mathbf{Z}$, នោះ

$$\mathbf{Z} = \bigcup_{c \in C} \lfloor c \rfloor_m \implies \mathbf{Z} = \bigcup_{c \in C} \lfloor c+s \rfloor_m$$

តាង $k \in \mathbf{Z}$. ។ពេលដែល C គឺជាប្រព័ន្ធពេញលិញនៃរេស៊ីឌុយម៉ូឌូលូ m,បើ $s \in \mathbf{Z}$, នោះ

$$\begin{aligned} k - s \in \mathbf{Z} \quad &\Rightarrow \exists c \in C, k - s \in \lfloor c \rfloor_m \\ &\Rightarrow k - s \equiv c \pmod{m} \end{aligned}$$

នោះចំនួនថេរ១ c ត្រូវតែមានព្រោះ C គឺជាប្រព័ន្ធនៃសំណល់នៃម៉ូឌុលូ mod m។ដោយប្រើលក្ខណៈនៅក្នុងទ្រឹស្តីបទ 6.18 និងដាក់ស្តែងនោះ $s \equiv s \pmod{m}$,យើងបាន

$$\begin{aligned} (k-s) + s &\equiv c + s \pmod{m} \\ k &\equiv c + s \pmod{m} \end{aligned}$$

$$k \in \lfloor c+s \rfloor_m$$

មានន័យថា,

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \exists \mu \in (C+s), k \in \lfloor c+s \rfloor_m$$

ដែល $\mu = c + s$ ។ដូច្នេះ, $C + s$ ជាប្រព័ន្ធសំណល់នៃ modulo m. □

ដំណោះស្រាយ29: មានវិធីជាច្រើនក្នុងការរកចម្លើយនៃសំណល់វិជ្ជមាននៃ$(15)^{35} \mod 19$ ។យើងអាចប្រើទ្រឹស្តីបទ6.18ដោយផ្ទាល់ដើម្បីបង្ហាញចំណោទនេះ។នៅក្នុងអនុមាណរួមយើងអាចប្រើតាមស្ថានការណ៍ពិតនោះ $225 \equiv 16 \pmod{19}$, $256 \equiv 9 \pmod{19}$, ។ល។

$$15^{35} = 15^{2\cdot 17+1} = 225^{17}\cdot 15 \equiv 16^{17}\cdot 15 = (16^2)^8\cdot 16\cdot 15 = 256^8\cdot 240$$

$$\begin{aligned} &\equiv 9^8\cdot 12 = 81^4\cdot 12 \\ &\equiv 5^4\cdot 12 = 25^2\cdot 12 \\ &\equiv 6^2\cdot 12 = 36\cdot 12 \\ &\equiv 17\cdot 12 = 204 \\ &\equiv 14 \pmod{19} \end{aligned}$$

ដោយជម្រើសយើងអាចប្រើទ្រឹស្តីបទ Fermat។យើងសង្កេតឃើញថា 15និង 19 ជាទំនាក់ទំនងបឋមនិង $35 \geq 19$។បើយើងយក $p = 19$, $a = 15$,យើងបាន

$$15^{18} \equiv 1 \pmod{19}.$$

ការផ្លាស់ប្តូរដ៏ធំនេះអ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃ15, និងសំណល់នៃអ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលអាចងាយស្រួលជាងមុន:

$$\begin{aligned} 15^{35} = 15^{18}\cdot 15^{17} \equiv 1\cdot 15^{17} = (15^2)^8\cdot 15 = 225^8\cdot 15 \\ &\equiv 16^8\cdot 15 = 2^{32}\cdot 15 = 2^{18}\cdot 2^{14}\cdot 15 \\ &\equiv 1\cdot 2^{14}\cdot 15 = 64^2\cdot 60 \\ &\equiv 7^2\cdot 3 \\ &\equiv 11\cdot 3 \\ &\equiv 14 \pmod{19} \end{aligned}$$

□

ដំណោះស្រាយ 30: សង្កេតឃើញថា 29 និង 17 មានទំនាក់ទំនងបឋមនិងគ្នានិង $36 \geq 17$. តាមទ្រឹស្តីបទ Fermat's $(29)^{16} \mod 17 \equiv 1$ និង $29^{36} = (29^2)^{16}\cdot 29^4$.នៅពេល $29 = 12 \mod 17$, យើងបាន

$$\begin{aligned} 29^4 \equiv 1\cdot 12^4 = 144^2 \\ &\equiv 8^2 = 64 \\ &\equiv 13 \pmod{17} \end{aligned}$$

□

ដំណោះស្រាយ 31: ពីនិយមន័យនៃប្រព័ន្ធសំណល់ម៉ូឌុឡូm យើងសង្កេតឃើញថាលទ្ធផល

លទ្ធផលៈតាង S ជាសំណុំនៃចំនួនគត់ដោយតម្លៃទំហំ m។ S ជាប្រព័ន្ធរៀបរយនៃសំណល់ម៉ូឌ $\bmod m$ សមមូលមិនមានចំនួន២ជាតុនៅក្នុងSគឺជាកង់គ្លួយអង់ម៉ូឌ $\bmod m$ទាំងអស់គ្នា។

សម្រាយនៃលទ្ធផលដូចលំហាត់នៅខាងឆ្វេងត្រូវបានពិនិត្យនឹងអនុវត្តន៍ដោយគោលការណ៍សត្វព្រាប។តាង $\{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$ ជាប្រព័ន្ធពេញលិញនៃសំណល់ $\bmod m$។ដោយតាង $0 \le i, j < m, i \ne j, t$ ជាទំនាក់ទំនងបឋមចំពោះ m, និង $ta_i\, ta_j\,_m$
។នោះមានដូចខាងក្រោមនេះ៖

$$_m\ne \lfloor \quad \rfloor \qquad \lfloor \quad \rfloor$$

$$\begin{aligned} ta_i \equiv ta_j \pmod m \Rightarrow ta_i - ta_j = km \text{ ដែលមានចំនួនគត់ } k \in \mathbf{Z} \\ \Rightarrow t(a_i - a_j) = km \text{ ដែលមាន } k \in \mathbf{Z} \Rightarrow m | t(a_i - a_j) \\ \Rightarrow m | (a_i - a_j) \text{ because } \gcd(t, m) = 1 \Rightarrow a_i - a_j = \\ km \text{ ដែលមាន } k \in \mathbf{Z} \\ \Rightarrow a_i\,_m = a_j \end{aligned}$$

$$\lfloor \quad \rfloor \qquad \lfloor \quad \rfloor_m$$

នេះជាការផ្ទុយ, ពីព្រោះ $\{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$ ជាប្រព័ន្ធសំណល់ពេញលិញម៉ូឌ $\bmod m$, និងចេញពីស្វ័យសត្យយើងបាន $a_i \ne a_j$. ដូចនេះ យើងអង្កេតថា $ta_i\,_m = \square$ $\lfloor \quad \rfloor$ $\lfloor a_i \rfloor_m \ne \lfloor ta_j \rfloor_m$ $_m$ សមមូល គឺខុស

ដំណោះស្រាយ32: ចំនួននៃថ្ងៃនៅចន្លោះថ្ងៃទី1,ខែធ្នូឆ្នាំ1976, និងថ្ងៃទី1,ខែកក្កដា ឆ្នាំ1987,គឺ 3864ដែលស្មើនឹង552គុណនឹង7។បើចំនួននៃថ្ងៃគឺជាពហុគុណនឹង7,នោះនាំឲ្យមានចំនួន២ខែដូចគ្នាប្រចាំរៀងរាល់ខែនៃប្រតិទិន។ដូច្នេះខែធ្នូឆ្នាំ1976និងខែកក្កដាឆ្នាំ1987 មានចំណែកដូចគ្នាប្រចាំខែនៃប្រតិទិន។ព្យាយាមគណនា1976 គណនា1987ទៅលើ Unix. □

ដំណោះស្រាយ33: $f(x) = 13x^3 - 5x^2 + 14x - 10.$

យើងនឹងប្រើទំនាក់ទំនងកង់គ្លួយអង់ដូចខាងក្រោមនេះ៖

$$\begin{aligned} 13 &\equiv 6 \equiv -1 && \pmod 7 \\ 12 &\equiv 5 \equiv -2 && \pmod 7 \\ 14 &\equiv 0 && \pmod 7 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ,

$$\begin{aligned} f(12) &\equiv 13 \cdot 12^3 - 5 \cdot 12^2 + 14 \cdot 12 - 10 \\ &\equiv 6 \cdot (-2)^3 - (-2) \cdot (-2)^2 + 0 - 3 \pmod 7 \\ &= -48 + 8 - 3 = -43 \\ &\equiv 6 \pmod 7 \end{aligned}$$

□

ដំណោះស្រាយ34: រម្លឹកឡើងវិញ 6.6 បង្ហាញថាសម្រាប់គ្រប់ $a, b, x, y \in \mathbf{Z}$។ $\gcd(a, b) \mid (xa + yb)$.

គេមាន $m \geq 1, a, x \in \mathbf{Z}$. យើងចង់បង្ហាញថា៖

$$\boxed{}\ x \in a_m \Longrightarrow \gcd(x, m) = \gcd(a, m).$$

បើ $x \in \boxed{a}_m$, យើងដឹងថា $x - a = km$ មាន $k \in \mathbf{Z}$។ដូចនេះ ,

$$x + (-k)m = a \tag{6.38}$$

$$a + km = x. \tag{6.39}$$

តាង gcd(x, m) = d និង gcd(a, m) = d́, ដូច្នេះ d|m និង d́|m។ពី (6.38) យើងដឹងថា a គឺជាសមីការបន្ទាត់លីនេអ៊ែរអាស្រ័យនៃ x និងm។ ដូចនេះ, d|a និង

$$d|a,\ d|m \Longrightarrow d|\gcd(a, m) \Longrightarrow d|d'. \tag{6.40}$$

ដូចគ្នានេះដែរនៃទម្រង់ (6.39), យើងបាន $d'|x$ និង

$$d'|x,\ d'|m \Longrightarrow d'|\gcd(x, m) \Longrightarrow d'|d. \tag{6.41}$$

ដូចនេះ, $d = d'$ និង $\gcd(x, m) = \gcd(a, m)$. $\square$

ដំណោះស្រាយ35: (i)

$$\begin{aligned} 2^{14} &\equiv (2^4)^3 \cdot 2^2 = 16^3 \cdot 4 \\ &\equiv (-1)^3 \cdot 4 = -4 \\ &\equiv 13 \qquad\qquad (\text{mod } 17) \end{aligned}$$

(ii)យើងប្រើទ្រឹស្តី Fermat's littleសម្រាប់លំហាត់,

$3^{(100)} \equiv (3^{25})^4 \equiv 1 \pmod 5$,

ពីព្រោះ 5 ជាចំនួនបឋម និង $5 \nmid 3^{25}$។ $\square$

ដំណោះស្រាយ36: បង្ហាញថា៖

$$x \equiv 3 \pmod 5$$
$$x \equiv 2 \pmod 6$$
$$x \equiv 3 \pmod 7$$

ជាបឋម 6,និង7ជាទំនាក់ទំនងបឋមទៅវិញទៅមក។ដូច្នេះយើងអាចប្រើសំណល់អាល់ហ្គោរីតចិនដើម្បីរកដំណោះស្រាយ។តាងM=5·6·7=210 ។ ជាបឋមយើងចង់បង្ហាញសមីការដូចខាងក្រោមដាច់ដោយឡែក។

$$
\begin{aligned}
c_1 \cdot \frac{M}{5} &\equiv 1 \pmod 5 \\
c_2 \cdot \frac{M}{6} &\equiv 1 \pmod 6 \\
c_3 \cdot \frac{M}{7} &\equiv 1 \pmod 7
\end{aligned}
$$

នោះយើងបាន

$$
\begin{cases} c_1 \cdot 42 \equiv 1 \pmod 5 \\ c_2 \cdot 35 \equiv 1 \pmod 6 \\ c_3 \cdot 30 \equiv 1 \pmod 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \in \lfloor 3 \rfloor_5 \\ c_2 \in \lfloor 5 \rfloor_6 \\ c_3 \in \lfloor 4 \rfloor_7 \end{cases}
$$

បន្ទាប់យើងទទួលបានចម្លើយមួយសម្រាប់ជាតុនៃ c_1, c_2, និង c_3, យើងអាចរកនូវឫស, x_0, សម្រាប់កង់គ្គុយអង់បន្តបន្ទាប់,

$$
\begin{aligned}
x_0 &= c_1 \cdot 42 \cdot 3 + c_2 \cdot 35 \cdot 2 + c_3 \cdot 30 \cdot 3 \\
&= 3 \cdot 42 \cdot 3 + 5 \cdot 35 \cdot 2 + 4 \cdot 30 \cdot 3 \\
&= 1088
\end{aligned}
$$

ដូច្នេះ សំណុំនៃចម្លើយនោះគឺ៖ $\lfloor 1088 \rfloor_{210}$ ឬ សមមូល y, $x \in \lfloor 38 \rfloor_{210}$

- ដើម្បីស្រាយ

$$
\begin{aligned}
y &\equiv 2 \pmod 5 \\
y &\equiv 7 \pmod{13} \\
y &\equiv 11 \pmod 8
\end{aligned}
$$

ជាបឋមយើងពិនិត្យនិងសាក្សី5,13,និង8ជាទំនាក់ទំនងបឋមនឹងគ្នាទៅវិញទៅកម។ តាងM=5·13 · 18 = 520។ជាបឋមយើងបង្ហាញសមីការដូចខាងក្រោមដោយដាច់ពីគ្នា

$$
\begin{aligned}
c_1 \cdot \frac{M}{5} &\equiv 1 \pmod 5 \\
c_2 \cdot \frac{M}{13} &\equiv 1 \pmod{13} \\
c_3 \cdot \frac{M}{8} &\equiv 1 \pmod 8
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ

$$
\begin{cases} c_1 \cdot 104 \equiv 1 \pmod 5 \\ c_2 \cdot 40 \equiv 1 \pmod{13} \\ c_3 \cdot 65 \equiv 1 \pmod 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \in \lfloor -1 \rfloor_5 \\ c_2 \in \lfloor 1 \rfloor_{13} \\ c_3 \in \lfloor 1 \rfloor_8 \end{cases}
$$

នោះនាំឲ្យយើងអាចរកបានឫសនៃចម្លើយ y_0,

$$\begin{aligned} y_0 &= c_1 \cdot 104 \cdot 2 + c_2 \cdot 40 \cdot 7 + c_3 \cdot 65 \cdot 11 \\ &= -1 \cdot 104 \cdot 2 + 1 \cdot 40 \cdot 7 + 1 \cdot 65 \cdot 11 \\ &= 787 \equiv 267 \pmod{520} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ,ចម្លើយនៃសំណុំនោះគឺគេបាន $\lfloor 267 \rfloor_{520}$

- ដើម្បីបង្ហាញថា

$$\begin{aligned} z &\equiv 7 \pmod{16} \\ z &\equiv 1 \pmod{9} \\ z &\equiv 2 \pmod{25} \end{aligned}$$

យើងជាបឋមធ្វើឲ្យប្រាកដ 16, 9 និង 25 មានទំនាក់ទំនងបឋមរវាងគ្នា។តាង $M = 16 \cdot 9 \cdot 25 = 3600$, និងបង្ហាញនូវសមីការដាច់ដោយលែកពីគ្នាដូចខាងក្រោមនេះ

$$\begin{aligned} c_1 \cdot \frac{M}{16} &\equiv 1 \pmod{16} \\ c_2 \cdot \frac{M}{9} &\equiv 1 \pmod{9} \\ c_3 \cdot \frac{M}{25} &\equiv 1 \pmod{25} \end{aligned}$$

ដែល,

$$\begin{cases} c_1 \cdot 225 \equiv 1 \pmod{16} \\ c_2 \cdot 400 \equiv 1 \pmod{9} \\ c_3 \cdot 144 \equiv 1 \pmod{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \in \lfloor 1 \rfloor_{16} \\ c_2 \in \lfloor -2 \rfloor_{9} \\ c_3 \in \lfloor 4 \rfloor_{25} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= c_1 \cdot 225 \cdot 7 + c_2 \cdot 400 \cdot 1 + c_3 \cdot 144 \cdot 2 \\ &= 1927 \pmod{3600} \end{aligned}$$

ដូច្នេះសំណុំចម្លើយនៃឫសគឺ $\lfloor 1927 \rfloor_{3600}$

$\square$

ដំណោះស្រាយ 37: យើងសង្កេតឃើញថា 7 គឺជាចំនួនបឋមនិង7មិនអាចចែកដាច់ 2^q សម្រាប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន q ។ដូច្នេះ យើងអាចប្រើទ្រឹស្តីបទ Fermatនិង

$$(2^q)^6 \equiv 1 \pmod{7} \text{ សម្រាប់ចំនួនគត់ } q \geq 1.$$

ម្យ៉ាងទៀតដោយប្រើវិធីចែកអាល់ហ្គោរីតយើងដឹងថាសម្រាប់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m, មានតែមួយគត់ q និង r ដូចនេះ

$$m = 6q + r \, 0 \leq r < 6.$$

ដូច្នេះ, ចំពោះ $m \geq 0$ និង $\alpha = 1, 2, 4$,យើងបាន $2^m - \alpha \equiv 2^{6q+r} - \alpha \equiv 2^{6q}2^r - \alpha \equiv (2^r - \alpha)(\pmod 7)$។លទ្ធផល, $(2^m - 1)(2^m - 2)(2^m - 4) \equiv (2^r - 1)(2^r - 2)(2^r - 4)(\pmod 7)$។ដូច្នេះ,យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថាសម្រាប់ធាតុនីមួយៗ r អាចកើតមានឡើងបានបន្ទាប់មកពហុធាស្មើនឹង 0។សម្រាប់ចំនួនគត់ណាមួយ r, $0 \leq r \leq 6$, មានកត្តាមួយនៅក្នុងកត្តាជាច្រើននៃសមីការខាងលើស្មើនឹង 0,នោះបើ $r = 4$, នាំឲ្យ $2^r - 2 = 16 - 2 = 14 = 0(\pmod 7)$។

ដូច្នេះនៅគ្រប់ករណីទាំងអស់នោះគឺ $(2^m - 1)(2^m - 2)(2^m - 4) \equiv 0 \pmod 7$ ។

ជាជម្រើសយើងអាចអនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទFermat'sនិងគណនាពហុធាបាន:

$$\begin{aligned}
& (2^m-1)(2^m-2)(2^m-4) \\
= \ & (2^{2m} - 3\cdot 2^m + 2)(2^m - 4) \\
= \ & 2^{3m} - 3\cdot 2^{2m} + 2\cdot 2^m - 4\cdot 2^{2m} + 12\cdot 2^m - 8 \\
= \ & 8^m - 7\cdot 2^{2m} + 14\cdot 2^m - 8 \\
\equiv \ & 1^m - 0\cdot 2^{2m} + 0\cdot 2^m - 1 \qquad \pmod 7 \\
\equiv \ & 0 \qquad \pmod 7
\end{aligned}$$

□

ដំណោះស្រាយ38:យើងអាចប្រើទ្រឹស្តីបទFermat'sដើម្បីបង្ហាញលំហាត់បានយ៉ាងងាយស្រួល។ យើងពិនិត្យឃើញថា 7ជាចំនួនកត្តាបឋមនិងគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k, $7 \not| 3^k$ និង $7 \not| 4^k$,និងតាមទ្រឹស្តីបទហ្វែម៉ា, $3^6 \equiv 4^6 \equiv 1 \pmod 7$។សម្មតិកម្មគ្រប់ចំនួនគត់ n, ដោយប្រើវិធីចែកលេខយើងអាចរកបានតែមួយគត់ pនិង r ដូចនេះ $n = 6p + r$, ដែល $0 \leq r < 6$.

$$\begin{aligned}
3^n + 4^n &= 3^{6p+r} + 4^{6p+r} \\
&= (3^p)^6 3^r + (4^p)^6 4^r \\
&\equiv 1\cdot 3^r + 1\cdot 4^r \pmod 7 \\
&\equiv 3^r + 4^r \pmod 7
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ n គឺជាដំណោះស្រាយមួយនៃ

$$3^n + 4^n \equiv 0 \pmod 7$$

សមមូល r ជាដំណោះស្រាយមួយនៃ

$$3^r + 4^r \equiv 0 \pmod 7.$$

ម្យ៉ាងទៀត,បើ r ជាឫសមួយ,ដូច្នេះ គឺគ្រប់ធាតុទាំងអស់នៅក្នុង r $\lfloor r \rfloor_6$. សូមពិនិត្យមើលទាំងអស់អាចកើតមាន

$r = 0: \quad 3^0 + 4^0 = 2 \not\equiv 0 \pmod 7.$

$r = 1: \quad 3^1 + 4^1 = 7 \equiv 0 \pmod 7.$

$r = 2: \quad 3^2 + 4^2 = 25 \not\equiv 0 \pmod 7.$

$$
\begin{aligned}
r=3: &\quad 3^3+4^3 \equiv 2\cdot 3+2\cdot 4 \equiv 0 \pmod 7.\\
r=4: &\quad 3^4+4^4 \equiv 2^2+2^2 \not\equiv 0 \pmod 7.\\
r=5: &\quad 3^5+4^5 \equiv 12+16 \equiv 0 \pmod 7.
\end{aligned}
$$

ដូច្នេះ, ដំណោះស្រាយគឺ

$$x \in \lfloor 1 \rfloor_6 \bigcup \lfloor 3 \rfloor_6 \bigcup \lfloor 5 \rfloor_6 .$$

□

ដំណោះស្រាយ39 សម្មតិកម្ម m និង n ,ជាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន តាង R_m និង R_n គឺជាពីរផ្នែកនៃ $\mathbf{Z}$ សម្មតិកម្មតាមកង់គ្លួយអង់ mod m និង n ដោយរៀងគ្នា ។គេបាន

$$
\begin{aligned}
R_m &= \left\{\lfloor 0 \rfloor_m, \lfloor 1 \rfloor_m, \cdots, \lfloor m-1 \rfloor_m\right\}\\
R_n &= \left\{\lfloor 0 \rfloor_n, \lfloor 1 \rfloor_n, \cdots, \lfloor n-1 \rfloor_n\right\}
\end{aligned}
$$

យើងត្រូវបង្ហាញថា

R_m គឺជារីហ្វីណឺម៉ង់នៃ $R_n \Longleftrightarrow m = kn,\ k \in \mathbf{Z}.$

1. ($\Longleftarrow$) ឧបមាថា $m = kn$ មានចំនួនគត់ k ។ យើងពិនិត្យគ្រប់ $\lfloor i \rfloor_m \in R_m$. យើងត្រូវបង្ហាញថានៅទីនេះមាន $\lfloor j \rfloor_n \in R_n$ នោះនាំឲ្យ $\lfloor i \rfloor_m \subseteq \lfloor j \rfloor_n$. Let $x, y \in \lfloor i \rfloor_m$ និង $x \neq y$. ជាលទ្ធផល $x \equiv y \pmod m$, ម្យ៉ាងទៀត $x - y = qm$ មានចំនួនគត់ $q \in \mathbf{Z}$. ជំនួសដោយ $m = kn$, យើងបាន $x - y = qkn$ ឬ $x \equiv y \pmod n$. នោះ, $x,\ y \in \lfloor j \rfloor_n$ ដែលដោយ $\lfloor j \rfloor_n \in R_n$ និង R_m ជារីហ្វីណឺម៉ង់នៃ R_n ។ (គិតពីថាតើហេតុអ្វីយើងត្រូវការជាតុ២គឺ, x និង y, នៅក្នុងសម្រាយខាងលើ?)
2. ($\Longrightarrow$) ឧបមាថា R_m ជារីហ្វីណឺម៉ង់ R_n ។ តាងដោយ $\lfloor i \rfloor_m \in R_m, \lfloor j \rfloor_n \in R_n$, និង $\lfloor i \rfloor_m \subseteq \lfloor j \rfloor_n$. វាគឺច្បាស់ហើយថា $i \in \lfloor i \rfloor_m$ និង $j \in \lfloor j \rfloor_n$.

$$(i \in \lfloor i \rfloor_m, \lfloor i \rfloor_m \subseteq \lfloor j \rfloor_n) \Longrightarrow i \in \lfloor j \rfloor_n$$

ដូច្នេះ $i \equiv j \pmod n$, និង ដូច្នេះ $\lfloor i \rfloor_n = \lfloor j \rfloor_n$. ម្យ៉ាងទៀត,

$$
\begin{aligned}
i+m \in \lfloor i \rfloor_m &\Rightarrow i+m \in \lfloor j \rfloor_n \text{ ព្រោះ } \lfloor i \rfloor_m \subseteq \lfloor j \rfloor_n\\
&\Rightarrow i+m \in \lfloor i \rfloor_n \text{ ព្រោះ } \lfloor j \rfloor_n = \lfloor i \rfloor_n\\
&\Rightarrow i+m \equiv i \pmod n\\
&\Rightarrow i+m-i = kn,\ k \in \mathbf{Z}\\
&\Rightarrow m = kn,\ k \in \mathbf{Z}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ, R_m ជារីហ្វីនេម៉ង់នៃ R_n សមមូល $m = kn$ ដែល k ចំនួនគត់ $\square$

ដំណោះស្រាយ40: យើងបង្ហាញលំហាត់នេះដោយប្រើអនុមាណរួមគណិតវិទ្យាលើ k.

- មូលដ្ឋាន: ចំពោះ $k = 0$, $a_0 = 0 \equiv 0 \pmod 5$.
- អ៊ីប៉ូតេស្ត: ពិនិត្យ $a_{5k} \equiv 0 \pmod 5$.
- ដំហ៊ាន: យើងចង់បង្ហាញថា $a_{5(k+1)} \equiv 0 \pmod 5$.

  ឆ្លោះតាមគោលដៅនេះប្រើ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ គណនា $a_{5(k+1)}$យើងបានសមីការនេះ

$$\begin{aligned}
a_{5(k+1)} &= a_{5k+5} \\
&= a_{5k+3} + a_{5k+4} \\
&= a_{5k+1} + a_{5k+2} + a_{5k+2} + a_{5k+3} \\
&= a_{5k+1} + 2a_{5k+2} + a_{5k+3} \\
&= a_{5k+1} + 2a_{5k+2} + a_{5k+1} + a_{5k+2} \\
&= 2a_{5k+1} + 3a_{5k+2} \\
&= 2a_{5k+1} + 3(a_{5k} + a_{5k+1}) \\
&= 3a_{5k} + 5a_{5k+1} \\
&\equiv 0 + 0 \pmod 5 \\
&\equiv 0 \pmod 5
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ, គ្រប់ $k \geq 0$, $\quad a_{5k} \equiv 0 \pmod 5$. $\square$

ដំណោះស្រាយ41:

$$\begin{aligned}
\varphi(18) &= \varphi(2 \cdot 3^2) \\
&= \varphi(2)\varphi(3^2) \\
&= 1 \cdot (3^2 - 3^1) \\
&= 6.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(40) &= \varphi(2^3 \cdot 5) \\
&= \varphi(2^3)\varphi(5) \\
&= (2^3 - 2^2) \cdot 4 \\
&= 16.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(72) &= \varphi(2^3 \cdot 3^2) \\
&= \varphi(2^3)\varphi(3^2) \\
&= (2^3 - 2^2) \cdot (3^2 - 3) \\
&= 24.
\end{aligned}$$

$\square$

ដំណោះស្រាយ 42:

តាមទ្រឹស្តីបទអឺលែ បើ $\gcd(a, m) = 1$,នោះ $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.តាមទ្រឹស្តីបទ6.23,

បើ $a \equiv b \pmod{m_1}$ និង $a \equiv b \pmod{m_2}$, នោះ $a \equiv b \pmod{\operatorname{lcm}(m_1, m_2)}$.

ដោយប្រើ $75 = 3 \cdot 5^2$ យើងអាចអនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទ6.23។សម្គាល់ថា $\varphi(5^2) = (5^2 - 5) = 20$។នៅពេល 5 ជាចំនួនបឋមនិង $\gcd(2, 5) = 1$, ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទ Euler's យើងបាន

$$2^{\varphi(5^2)} \equiv 1 \pmod{5^2} \Rightarrow 2^{20} \equiv 1 \pmod{25}$$

នៅពេលដែល 3 ជាចំនួនបឋមនិង 3 ចែកមិនដាច់នឹង 2^{10}, នោះតាមទ្រឹស្តីបទ Fermat នោះ

$$(2^{10})^2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow \quad 2^{20} \equiv 1 \pmod 3 \tag{6.42}$$

ព្រោះ $\operatorname{lcm}(3, 25) = 75$,តាមទ្រឹស្តីបទ(6.23)យើងបាន $(2^{10})^2 \equiv 1 \pmod{75}$។ ដូច្នេះ, $2^{20} \equiv 1 \pmod{75}$. □

ចម្លើយ43: គ្រប់ចំនួនគត់ $m \geq 1$, យើងអាចដាក់ជាកត្តាបាន m នៅក្នុងជាពហុគុណនៃចំនួនបឋម:

$$m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}.$$

នោះនាំឲ្យ

$$\begin{aligned}
\varphi(m) &= \varphi(p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}) \\
&= \varphi(p_1^{e_1})\varphi(p_2^{e_2}) \dots \varphi(p_n^{e_n}) \\
&= (p_1^{e_1} - p_1^{e_1 - 1})(p_2^{e_2} - p_1^{e_2 - 1}) \dots (p_n^{e_n} - p_n^{e_n - 1}) \\
&= p_1^{e_1}(1 - \frac{1}{p_1}) p_2^{e_2}(1 - \frac{1}{p_2}) \dots p_n^{e_n}(1 - \frac{1}{p_n}) \\
&= m \prod_{p|m} (1 - \frac{1}{p}).
\end{aligned}$$

បរិយាយបន្ថែម:ក្នុង $\prod_{p|m}(1 - \frac{1}{p})$ វាគឺបានប្រសើរអន្តញ្ញាតតាង m ជារ៉ង់នៅលើគ្រប់ចំនួនគត់ដែលធំជាង ប៉ុន្តែមិនស្មើនឹង 1។ ចុងក្រោយយើងបាន $\emptyset = 1.$

□

ចម្លើយ 44: (i) បើ n ជាចំនួនសេសនោះ $\gcd(2, n) = 1$។ដូច្នេះ,

$$\varphi(2n) = \varphi(2)\varphi(n) = 1 \cdot \varphi(n) = \varphi(n).$$

□

(ii)ពីព្រោះ $n \geq 1$, យើងដឹងថា $\varphi(n) \neq 0$។អនុញ្ញាតពីភាគ្សវានៅក្នុងករណី។

ករណីទី 1: $\gcd(3, n) = 1$.

$$\varphi(3n) = \varphi(3)\varphi(n) = 2 \cdot \varphi(n) \neq \varphi(n).$$

ករណីទី 2: $\gcd(3, n) \neq 1$.

ពីព្រោះ 3 គឺជាចំនួនបឋម បើ $\gcd(3, n) \neq 1$, នោះ $3|n$. តាង $n = 3^k m$, ដែល $k \geq 1$ និង $\gcd(3, m) = 1$។

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi(3^k m)\\ &= \varphi(3^k)\varphi(m)\\ &= (3^k - 3^{k-1})\varphi(m).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(3n) &= \varphi(3^{k+1} m)\\ &= \varphi(3^{k+1})\varphi(m)\\ &= (3^{k+1} - 3^k)\varphi(m).\end{aligned}$$

ពីព្រោះ $(3^k - 3^{k-1}) \neq (3^{k+1} - 3^k)$, ដូច្នេះ $\varphi(n) \neq \varphi(3n)$។

នៅក្នុងករណីទាំងពីរ, $\varphi(n) \neq \varphi(3n)$។ □ (iii) បើ n ជាចំនួនគូ, នោះយើងអាចបង្ហាញថា n ដូចគ្នា $2^k m$, ដែល $k \geq 1$ និង $\gcd(2, m) = 1$។

$$\begin{aligned}\varphi(2n) &= \varphi(2 \cdot 2^k m)\\ &= \varphi(2^{k+1})\varphi(m)\\ &= (2^{k+1} - 2^k)\varphi(m).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\varphi(n) &= 2\varphi(2^k m)\\ &= 2\varphi(2^k)\varphi(m)\\ &= 2(2^k - 2^{k-1})\varphi(m)\\ &= (2^{k+1} - 2^k)\varphi(m).\end{aligned}$$

ដូច្នេះ, $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$ ។ □

ចម្លើយ 45: គ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 1$ យើងអាចបង្ហាញដូចគ្នាពហុគុណនៃចំនួនបឋម $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}$, និង

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{e_1})\varphi(p_2^{e_2}) \cdots \varphi(p_n^{e_n}).$$

ដូច្នេះ យើងអាចរកគ្រប់ការរួមបញ្ចូលគ្នានៃ $p_1^{e_1}, p_2^{e_2}, \dots, p_n^{e_n}$ នោះនាំឲ្យ $\varphi(n) = 8$.

ធ្វើលំហាត់នេះ សូមយើងមើលបញ្ជីនៃ $\varphi(p^{e_i})$ លក្ខណៈនៃប្រព័ន្ធ៖

$$
\begin{array}{llll}
\varphi(2)=1 & \varphi(2^2)=2 & \varphi(2^3)=4 & \varphi(2^4)=8 \\
\varphi(3)=2 & \varphi(3^2)=6 & \varphi(3^3)=18 & \cdots \\
\varphi(5)=4 & \varphi(5^2)=20 & \cdots & \\
\varphi(7)=6 & \varphi(7^2)=42 & \cdots & \\
\varphi(11)=10 & \cdots & &
\end{array}
$$

ទោះជាយ៉ាងណា φ មិនមែនជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើនមួយនោះទេដែលចំនួនគត់នៅក្នុងឈរនីមួយៗដែលតំណាងដោយ $\lambda p\cdot\varphi(p^e)$ ជាអនុគមន៍កើនម៉ូណូតូន។ដូចគ្នានេះដែរដែលចំនួនគត់នីមួយៗនៅក្នុងជួរដេកតាង $\lambda e\cdot\varphi(p^e)$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើន។ទីនេះ p ង់នៅលើចំនួនបឋមនឹង e ជារបស់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ។ដូច្នេះយើងមិនបានពិនិត្យលើ p និង e ដែល $\varphi(p^e)$ ធំជាង 8។

វាមិនជាលំបាកនោះទេដើម្បីស្វែងរកតារាងនិងនិងស្វែងរកវាថានៅទីនេះមានតែ 5ប៉ុណ្ណោះដែលជាចំនួនអាចកើតឡើងបានបញ្ជាក់ពីលក្ខណៈដែលចង់បាន

$$
\begin{aligned}
\varphi(2)\varphi(3)\varphi(5)=8 \; & n=30 \\
\varphi(2^2)\varphi(5)=8 \quad & n=20 \\
\varphi(2^3)\varphi(3)=8 \quad & n=24 \\
\varphi(2^4)=8 \quad & n=16 \\
\varphi(3)\varphi(5)=8 \quad & n=15.
\end{aligned}
$$

ដូច្នេះ, សម្រាប់ $n\in\{30,20,24,16,15\}$, $\varphi(n)=8$ ។ $\square$

ជំពូកទី៧. ទ្រឹស្តីបទទ្វេធានិងការគណនា

7.1.ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

ការសិក្សាទ្រឹស្តីបទទ្វេធាវាមានសារៈសំខាន់ដោយសារហេតុផលជាច្រើន។ វាបានបង្កើតទ្រឹស្តីបទ ជាចម្បងបានផ្តល់នៅរូបមន្តទូទៅនៅក្នុងការសរសេរ $(1+x)^n$ នៅក្នុងស្វ័យគុណនៃ X ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ លើសពី នេះទៅទៀតលទ្ធផលនេះអាចពង្រីកដល់ករណីនៅពេល n ជាចំនួនពិត។ ហេតុផលសំខាន់មួយទៀតសិក្សាទ្រឹស្តីបទទ្វេធាគឺជាមេគុណនៅក្នុងការពង្រីក $(1+x)^n$ មានលក្ខណៈសម្បត្តិគួរឱ្យចាប់អារម្មណ៍ជាច្រើន។

7.2.ទ្រឹស្តីបទ

ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន n ដែល$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\cdots\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k+\cdots+x^n$$

មេគុណ$\binom{n}{k}$ ត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាមេគុណ Binomial ដែលមានលក្ខណៈដូចគ្នា ដូចជាចំនួនវិធីដើម្បីជ្រើសរើសជាតុ k ចេញពី n ។ ឧទាហរណ៍ដើម្បីវាតម្លៃឯកសារ តម្លៃនៃ 1.04^4 យើងអាចអនុវត្តទ្រឹស្តីបទខាងលើតាមរបៀបត្រង់៖

$$1.04^4=(1+0.4)^4 \quad =1+\binom{4}{1}0.04+\binom{4}{2}0.04^2+\binom{4}{3}0.04^3+\binom{4}{4}0.04^4$$

$$=1+4\times 0.04+6\times 0.0016+4\times 0.000064+0.00000256=1.16985856$$

លទ្ធផលខាងលើនេះអនុវត្តចំពោះករណីទូទៅដែលយើងចង់វាយតម្លៃ $(a+x)^n$ ដោយសារតែភាពស្មើគ្នា $(a+x)^n=a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$។

ការបកស្រាយមេគុណទ្វេធាអាចត្រូវបានពង្រីក ដូច្នេះវាអាចអនុវត្តបាននៅពេលដែល n អាចយកចំនួនពិតណាមួយ។ ដូចនេះការអនុវត្តជាទ្រឹស្តីបទទ្វេធាខាងលើនេះ ។

ចំណាំ:ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង k ជាមួយ $0\le k\le n$ យើងសង្កេតឃើញថា៖

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$
$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

និយមន័យ $\binom{n}{k}$ អាចមានលក្ខណៈទូទៅទាក់ទងនិងសមីការ(១)ខាងលើសម្រាប់ភាពពិតនៃតម្លៃ n ដូចខាងក្រោម៖

និយមន័យ សម្រាប់គ្រប់ចំនួនពិតណាមួយ (r) និងចំនួនគត់មិនវិជ្ជមាន (k) កំណត់និយមន័យ $\binom{r}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ទោះជាសំនួរក៏ដោយ « តើមានវិធីសាស្ត្រប៉ុន្មានរបៀបអាចជ្រើសរើស k ចេញពី $\frac{1}{2}$?» គឺទោះមិនសមហេតុផលក៏មានការបកស្រាយយ៉ាងច្បាស់លាស់នៃ $\left(k^{-\frac{1}{2}}\right)$:

សម្រាប់ k = 0,1,2…,

$$\left(k^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\ldots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}$$

$=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\ldots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}$

$= (-1)^{k}\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2k-1)}{2^{k}k!}$

$=(-1)^{k}\frac{1\times2\times3\times\ldots\times(2k-1)\times(2k)}{2^{k}k!\times2\times4\times\ldots\times(2k)}$

$=\frac{(-1)^{k}}{4^{k}}\ \frac{(2k)!}{k!k!}$

$=\frac{(-1)^{k}}{4^{k}}\ \binom{2k}{k}.$

សរុបសេចក្តីមកយើងទទួលលទ្ធផលជាទូទៅគឺ៖

$$(1+x)^{n}=\sum_{k\geq0}^{n}\binom{n}{k}x^{k} \qquad (៧.២)$$

ក្នុងការអនុវត្តយើងអាចបានតម្លៃ$1.04^{-\frac{1}{2}}$ ដល់កំរិតដែលចង់បាននៃភាពខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned}(1+0.04)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{k\geq0}^{n}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(0.04)^{k}\\ &= \sum_{k\geq0}^{n}(-1)^{k}\frac{1}{4^{k}}\binom{2k}{k}(0.04)^{k}\\ &= 1-\frac{1}{4}\binom{2}{1}0.04+\frac{1}{4^{2}}\binom{4}{2}0.04^{2}-\frac{1}{4^{3}}\binom{6}{3}0.04^{3}+\frac{1}{4^{4}}\binom{8}{4}0.04^{4}\\ &= 1-\frac{1}{4^{5}}\binom{10}{5}0.04^{5}+\cdots\\ &= 1-0.02+0.0006-0.00002+0.0000007\\ &= 0.9805807.\end{aligned}$$

ការបន្ថែមនៅក្នុងសមីការ (៧.២) ដែលបានអនុវត្តន៍គ្រប់ចំនួនពិត n ត្រូវបានគេដឹងជាទ្រឹស្តីបទស៊េរីទ្វេធា។ ទ្រឹស្តីបទទ្វេធាអាចត្រូវបានបង្ហាញដោយការអនុវត្តនុមាណរួមគណិតវិទ្យាចំណែកឯសម្រាយនៃទ្រឹស្តីបទស៊េរីទ្វេធាអាចទទួលបានការដោយការបង្ហាញបន្ថែមស៊េរីតៃល័រ Teylor Series ។

ពិចារ៖ ទ្រឹស្តីបទទ្វេធាបើទោះបីជាអនុវត្តជាអាចអនុវត្តន៍ទូទៅក៏ដោយបានបង្កើតទម្រង់ស៊េរីបង្រួម តែក្នុងករណី $|x|<1$។

ទ្រឹស្តីបទពហុធាពង្រីកនៃទ្រឹស្តីបទទ្វេធាជាមួយអថេរច្រើនជាងមួយ។

ទ្រឹស្តីបទ

$$(x_{1+}x_2 + \cdots x_m)^n = \sum \frac{n!}{i_{1!}i_{2!}\ldots i_m!} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots . x_m^{i_m},$$

ដែលជាគ្រប់ i_k តួនីមួយៗជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននិង $\sum_{l=1}^{m} i_l = n$. ជាឧទាហរណ៍សម្រាប់តម្លៃចំនួនគត់វិជ្ជមាននៃ n និងគេមាន x, y, និងz ដែល

$$(x + y + k)^n = \sum_{0\le i,j,k\le n; i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k$$ ។

មេគុណទេ្វធាបំពេញនូវសមីការសំខាន់ៗមួយចំនួន។មូលដ្ឋានគ្រឹះមួយចំនួនចុះបញ្ជីនៅក្នុងទ្រឹស្តីបទខាងក្រោម(ប្រយ័ត្នចំពោះថ្នាក់នៃអថេរនៃទ្រឹស្តីបទនីមួយៗ)៖

ទ្រឹស្តីបទ (លក្ខណៈឆ្លុះ) $If\ n, k \ni Z,$ និង $0 \le k \le n$, គេបាន

$$\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} = \binom{\mathrm{n}}{n-k},$$

ទ្រឹស្តីបទ (លក្ខណៈនៃការទាញយក) $Ifk \in Z\ r \in R$, និង $k \ne 0$ គេបាន

$$\binom{\mathrm{r}}{\mathrm{k}} = \frac{r}{k}\binom{\mathrm{r}-1}{k-1}$$

$$k\binom{\mathrm{r}}{\mathrm{k}} = \mathrm{r}\binom{\mathrm{r}-1}{k-1}$$

$$(r-k)\binom{\mathrm{r}}{\mathrm{k}} = \mathrm{r}\binom{\mathrm{r}-1}{k},$$

ទ្រឹស្តីបទ (លក្ខណៈផលបូក) $Ifk \in Z\ r \in R$, និង $\mathrm{r} \in \mathrm{R}$, គេបាន

$$\binom{\mathrm{r}}{\mathrm{k}} = \binom{\mathrm{r}-1}{k} + \binom{\mathrm{r}-1}{k-1},$$

ទ្រឹស្តីបទ (លក្ខណៈនៃការផ្លាស់ប្តូរ knight) បើ $n, k \in Z$ និង $0 \le k$, គេបាន

$$\sum_{0\le i\le k}\binom{\mathrm{n}-1}{k-i} + \binom{\mathrm{r}+1}{k},$$

ទ្រឹស្តីបទ (លក្ខណៈការបូកនៃសន្ទស្សន៍) បើ $r \in R, \mathrm{m}, \mathrm{n} \ni Z$ គេបាន

$$\sum_{k\le n}\binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n},$$

$$\sum_{0\le k\le n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1},$$

ទ្រឹស្តីបទ (លក្ខណៈសន្ទស្សន៍លំដាប់ខ្ពស់នៃចំនួនអវិជ្ជមាន) បើ $k \in Z$ និង $r \in R$, គេបាន

$$\binom{r}{k} = (-1)^k\binom{k-r-1}{k},$$

ទ្រឹស្តីបទ (លក្ខណៈនៃ Vandermonde) បើ $r, s \in Z$ និង $m, n \in Z$, គេបាន

$$\sum_{k\in Z}\binom{\mathrm{r}}{m+k}\binom{\mathrm{s}}{n-k} = \binom{\mathrm{r}+\mathrm{s}}{n+m},$$

7.2.1. គោលការណ៍និងស្រាយលំហាត់សមញ្ញនៃការរាប់

នៅក្នុងផ្នែកនេះដំបូងយើងបង្ហាញពីគោលការណ៍និងគោលការណ៍គ្រឹះមួយសម្រាប់ដោះស្រាយលំហាត់នៃការរាប់។ បន្ទាប់យើងមានបួនករណីនៃការដោះស្រាយទាក់ទងនឹង «កោដ្ឋ និងប៊ូល»ម៉ូដែលគំរូនិងបង្ហាញពីរបៀបដែលគំរូនេះអាចជួយយើងវាយតម្លៃនូវចំនួនលំហាត់ជាច្រើនដែលគួរឲ្យចាប់អារមណ៍។

ទ្រឹស្តីបទ (វិធានផលបូក) តាង A និង B ជាពីរព្រឹត្តិការណ៍ ។ គេបាន

$$|A \cup B| = \begin{cases} |A| + |B|, & \text{បើ } A \cap B = \emptyset \\ |A| + |B| - |A \cap B|, & \text{បើ ផ្សេងពីនោះ} \end{cases}$$

ឧបមាថាមាន n របៀបដែលនៅក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ A កើតឡើង ហើយ m របៀបនៅក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ Bមួយណាកើតឡើង។ បន្ទាប់មកមាន n + m របៀបដែលនៅក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ A ឬ B កើតឡើងដែលទៅជា $A \cap B = \emptyset$ ។ ហើយប្រសិនបើទាំងសំណុំទាំងពីរ មិនដាច់ពីគ្នាដែលពិនិត្យផ្ទៀងផ្ទាត់ដោយ$|A \cap B|$ ចាំបាច់ដើម្បីចៀសវាងការរាប់ពីរដង។

ជាទូទៅគំនិតខាងលើអាចកើតមានចំពោះសំណុំច្រើនជាងពីរ និងផ្តល់នូវសារៈសំខាន់ ជាលទ្ធផលនោះគឺដូចដែលយើងធ្លាប់ស្គាល់រួចមកហើយ ដែលរួមមានដូចជាជាគោលការណ៍សន្និដ្ឋានដកចេញ។ ដើម្បីទទួលបានជោគជ័យ ដំបូងយើងណែនាំការកត់សម្គាល់មួយចំនួន។ តាំង $A_1, A_2 \ldots, A_n$ នៃព្រឹត្តិការណ៍ n ។ តាំង $ai = |Ai|$

សម្រាប់ i = 1,….,n, $a_{ij} = |Ai \cap Aj|$

សម្រាប់ i,j =1,….,n, $i \neq j$,

$a_{ijk} = |A_i \cap A_j \cap A_k|$ សម្រាប់ $i, j, k = 1, \ldots..n, i \neq j \neq k, etc.$ ចុងបញ្ចប់ គេតាង $S_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{1,}\ S_2 = \sum_{i=1,j=1,i\neq j}^{n} a_{ij,}\ S_3 = \sum_{i=i,j,k,i\neq j\neq k}^{n} a_{ij,k,}\ etc.$ បន្ទាប់មកយើងមានទ្រឹស្តីបទដូចខាងក្រោម។

ទ្រឹស្តីបទ (គោលការណ៍បញ្ចូល-ការដក)

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots . \cap A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots \pm S_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-1} S_1$$

ទ្រឹស្តីបទ (ចំលាស់) ចំនួនចំលាស់នៃ n ប្លែកៗគ្នាដែលអាចបានទៅជា n!។

ឧទាហរណ៍ សំណុំនៃ៦ចំលាស់អាចមានសមកម្មបី a, b, c គឺ $\{(a, b, c), (a, b, c), (b, a, c), (b, c, a), c, a, b)(c, b, a)\}$។ ដូចនេះស្មើនឹងចំនួនអនុគមន៍មួយនិងមួយរវាងពីរសំណុំនៃ n ។

ទ្រឹស្តីបទ (ការបន្សំនៃសមកម្ម n ដែលបានយក k ក្នុងពេលតែមួយ) ក្នុងរយៈពេលដែលខ្លី យើងអាចនិយាយថា n ជ្រើសរើសយក k ។ ចំនួននៃការជ្រើសរើសសមកម្ម k ចេញពី n អាចបែងចែកបានជា $\binom{n}{k}$ ។

នេះក៏ស្មើនឹងមេគុណនៃ x^kអាចទៅជា $(1+x)^n$សម្រាប់ទិន្នន័យ $\binom{n}{k}$ ត្រូវបានគេដឹងថាជាមេគុណ ទ្វេធា។ ហើយមួយទៀតនោះ កំណត់សម្រាប់កន្សោម $C(n,k)$។ ចំណាំថា៖

$$C(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

សម្រាប់ ឧទាហរណ៍៖ $C(5,2)=\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!3!}=10$, និងតាងចំនួនដែលយើងបានជ្រើសរើសមនុស្ស ២ នាក់ក្នុងចំណោម ៥ នាក់។

ទ្រឹស្តីបទ តាង a ជាបណ្តុំនៃ n ដែលមិនខុសគ្នាទាំងអស់។ ឧបមាថាមាន m ជាច្រើនប្រភេទនៅក្នុង A ដែលក្នុងចំណោមនោះមាន r_1 នៃប្រភេទទី 1, r_2 នៃប្រភេទទី 2 ,………… , r_m នៃប្រភេទទី m ។ ចំនួនគោលការណ៍សរុបនៃ n គឺ ៖$\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots\ldots r_m!}$ ។

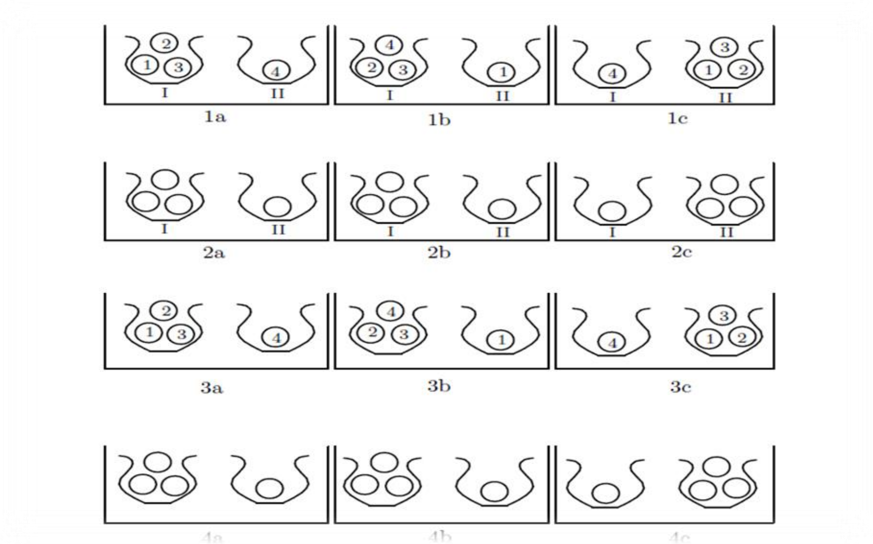
អាចកំណត់បានថា $r_1+r_2\ldots\ldots\ldots+r_m=n$, ហើយប្រសិនបើ n ទាំងអស់នេះគឺខុសគ្នា គេបាន m = n និង $r_1 = r_2 = \ldots = 1$។

ទ្រឹស្តីបទ (ចម្លាស់នៃnយកkក្នុងពេលតែមួយ) នៃចំនួនវិធីដើម្បីជ្រើសរើសនិងចម្លាស់ k ចេញពី n សម្គាល់បានថា $\binom{n}{k}k!$ ។នេះក៏ត្រូវបានបញ្ជាក់ដោយ P(n,k) គឺហៅលេខចម្លាស់នៃ k យកចេញពី n ។ ឧទាហណ៍ យើងអាចជ្រើសរើសពីតួអក្សរនៃ {a,b,c,d} ក្នុង $\binom{4}{2}=6$ ប្រភេទខុសៗគ្នា។ យើងអាចជ្រើសរើសបាន៦ប្រភេទផ្សេងៗគ្នាគឺ៖

{a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d} ។ទោះជាយ៉ាងណាសំណុំនៃ{a,b} ជ្រើសរើសតាំងដោយ a ហើយ និង b វាមិនតាមលំដាប់លំដោយទេ។ ចម្លាស់ពីរផ្សេងគ្នានៃអក្សទាំងនេះ a,b និង b,a ។ដូចនេះមាន១២ យ៉ាងនៃការជ្រើសរើសលំដាប់អក្សរចេញពី៤។ ចំនួននៃការរួមបញ្ចូលគ្នាពីសំណុំ r ទៅអោយសំណុំ n ស្មើនឹង P(n,r) ។

គំរូប៊ូល និងកោដ្ឋ

មានករណី n កោដ្ឋ និងប៊ូលនៃ b ដែល n និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ មិនមានលំដាប់ដាក់លាក់ណាមួយក្នុងចំណោមបាល់ ហើយ Urns មួយអាចផ្ទុកច្រើនដូច b ។ មាន ៤ករណីខុសគ្នា អាស្រ័យលើថាបាល់មានលក្ខណៈខុសគ្នា អាចមើលឃើញច្បាស់ ឬអាចបកស្រាយបាន គឺអាចស្គាល់បាន ឬមិនអាចសម្គាល់បាន ដូចដែលបានឃើញនៅក្នុងរូបភាពទី៧.១។យើងចាត់ទុកលើរណីទាំងបួនដែលបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី៧.១ ដោយរាប់ចំនួនវិធីដែល Balls បោះទៅអោយ Urns, និងបង្ហាញរូលអនុវត្តក្នុងកម្មវិធីគួរ



អោយកត់សម្គាល់ផ្សេងទៀត។

១. ពិនិត្យជេកជួរទីមួយនៃតួលេខដែលក្នុងប៊ូលនិងកោដ្ឋទាំងពីរដែលគួរកត់សម្គាល់បាន។ យើងអាចប្រាប់ពីភាពខុសគ្នារវាង 1a, 1b, និង 1c។

២. នៅជេកជួរទី២ប៊ូលគឺមិនអាចចែកដាច់ពីគ្នាបាន ហើយកោដ្ឋមានលក្ខណៈសម្គាល់។ ក្នុងករណីនេះយើងមិនអាចដឹងពីភាពខុសគ្នារវាង 2b និង 2b, ប៉ុន្តែយើងអាចដឹងបានថា 2b និង 2c គឺជាវិធីពីរផ្សេងគ្នាក្នុងការបោះចំនួន៤ប៊ូល។

៣. នៅជួរទី៣ប៊ូល អាចត្រូវបានសម្គាល់ប៉ុន្តែកោដ្ឋមិនអាចប្រឈមបាន។ ក្នុងករណីនេះ 3a និង 3c គឺជាវិធីដូចគ្នាដែលត្រូវផ្តល់អោយបួនប៊ូលខណៈដែលត្រូវ 3c គឺជាវិធីផ្សេង។

៤. ក្នុងករណីចុងក្រោយដែលបានបង្ហាញនៅជួរជេកទីបួនប៊ូល និង កោដ្ឋទាំងពីរគឺមិនអាចប្រឈមបាន។ ដូចនេះ 4a, 4b, និង 4c គឺដូចគ្នាបេះបិទ ដែលបានផ្តល់អោយ ប៊ូល ចំនួនបួនក្នុងចំណោម កោដ្ឋ ពីរ។

រូបភាពទី៧.១ ការផ្តល់ប៊ូលចំនួនបួន ក្នុងកោដ្ឋ២ដោយគេដឹងថាខុសគ្នាទាំងបួន។

ទ្រឹស្តីបទ ចំនួនវិធីដើម្បប៉ោះប៊ូល ដែលអាចសម្គាល់បាននួនដែលអាចសម្គាល់បានត្រូវបានផ្តល់ឱ្យដោយ ។

ការសង្កេតនេះគឺត្រង់ដែលមាន n នៅក្នុងករណីផ្សេងគនាដើម្បីប៉ោះបាល់នីមួយៗ។ ចំនួននេះគឺស្មើនឹងចំនួននៃអនុគមន៍ពីសំណុំ ទៅសំណុំ ។n- កំណត់។

ទ្រឹស្តីបទ ចំនួនវិធី b ក្នុងការប៉ោះប៊ូល n ចូលទៅក្នុងកោដ្ឋ ដែលអាចសម្គាល់បានត្រូវបានផ្តល់ឱ្យ$\binom{b+n-1}{b}$។

ស្រាយបញ្ជាក់: ការអង្កេតជម្មតាមួយឱ្យលទ្ធផលដែលចង់បាន។ពិនិត្យមើលនូវតួលេខខាងក្រោមនេះដែលយើងធ្វើការបែងចែកជាចំនួន៦ប៊ូលក្នុងចំណោមនៃចំនួន៣កោដ្ឋផ្សេងៗគ្នាដែល"O" សម្គាល់ជាប៊ូលចំនួនមួយនិងa"|"សម្គាល់ថាជាថាដែនកំណត់មួយនៅក្នុងចំណោមកោដ្ឋពីរ។នៅក្នុងតួលេខកោដ្ឋទី១មានប៊ូលចំនួន២ កោដ្ឋទី២គឺទទេរ និងកោដ្ឋទី៣មានប៊ូលចំនួន៤។

○○| |○○○○

ចំណាំថាថានៅក្នុងឧទាហរណ៍នេះយើងបានប្រើសញ្ញានេះចំនួន២ '|' ដើម្បីកំណត់ជាតំណាងឱ្យព្រំដែនចំនួនពីរនៅចន្លោះកោដ្ឋចំនួន៣។ ដូច្នេះ ជាទូទៅយើងត្រូវការចំនួន$(n-1)$ ដំបងដើម្បីតំណាងឱ្យព្រំដែននៅក្នុងចំណោមកោដ្ឋ ។ យើងរិះរកដំណោះស្រាយនៃបញ្ហាថាតើមានបុន្មានរបៀបដើម្បីបែងចែក$(n-1)$នៅក្នុងចំណោម$(n+b-1)$ដែលខុសកន្លែងគ្នា ?ម្យ៉ាងទៀតតើមានប៉ុន្មានរបៀបនៅទីនេះដើម្បីជ្រើសរើស $(n-1)$ វត្ថុចេញពី $(n+b-1)$ ដែលជាវត្ថុផ្សេងគ្នា? ចម្លើយនោះគឺ៖

$$\binom{b+n-1}{n-1}=\binom{b+n-1}{b}.$$

$\binom{b+n-1}{b}$ ជាចំនួនដែលសមមូលចំនួនមួយនៃចម្លាស់នៃទ្វេធាb ដែលមានរូបនៃវត្ថុដែលដូចគ្នាបេះបិទនឹងវត្ថុ $(n-1)$ ដែលដូចគ្នាបេះបិទនៃប្រភេទមួយផ្សេងទៀត។ជាចុងក្រោយនេះពួកវាស្មើនឹងចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្សេងគ្នាផងដែរ ជាចម្លើយនៃ

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=b.$$

ទ្រឹស្តីបទ ចំនួននៃរបៀបដើម្បីបែងចែក b ប៊ូលតូចៗជាច្រើនជាចំនួន n ចំណែកខុសៗគ្នានៃកោដ្ឋដោយមិនផ្សេងគ្នាគឺ៖

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}\frac{(-1)^k}{j!}\binom{j}{k}(j-k)^b.$$

សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទគឺវែងខ្លាំងណាស់និងទាមទារនូវលទ្ធផលកម្រិតជាមធ្យមជាច្រើន។ដូចនេះយើងបានបំបែកជាទ្រឹស្តីបទតូចៗជាច្រើន។

ទ្រឹស្តីបទ ចំនួននៃលេខ m គឺជាចំនួនគត់នីមួយៗដែលមានលេខ 0 តាមរយៈរហូតដល់លេខ 9 ដែលយ៉ាងហោចណាស់នៅពេលដែលគេបាន:

$$\sum_{k=0}^{10}(-1)^k\binom{10}{k}(10-k)^m$$

សម្រាយបញ្ជាក់:

តាង B_i ជាសំណុំទាំងអស់នៃលេខ m ជាចំនួនគត់ដែលមិនមានទី i ចំនួនគត់ $i = 0,1,...,9$ និង $A_i = \overline{B_i}$ ដូច្នេះ សំណុំ សម្គាល់ថាសម្រាប់គ្រប់លេខ m ចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលមានចំនួន i យ៉ាងហោចណាស់មួយ។ ចំណាំថាយើងចង់រក $|A_0 \cap A_1 \cap ... \cap A_9|$, ប៉ុន្តែ:

$$\begin{aligned} |A_0 \cap A_1 \cap ... \cap A_9| &= |\overline{B}_0 \cap \overline{B}_1 \cap ... \cap \overline{B}_9| \\ &= |\overline{B_0 \cup B_1 \cup ... \cup B_9}| \\ &= S_0 - |B_0 \cup B_1 \cup ... \cup B_9|, \end{aligned}$$

ដែល S_0 តាងឲ្យសំណុំនៃលេខm គ្រប់ចំនួនគត់។ ជាក់ស្តែង $S_0 = 10^m$ មានចំនួន 10 លេខអាចកើតមានឡើងគ្រប់លេខនីមួយៗនៃលេខ m ទីតាំង។ តាមព្រឹត្តិការដាក់ចូល ដកចេញវិញ យើងបាន៖

$$|B_0 \cup B_1 \cup ... \cup B_9| = S_1 - S_2 + S_3 - ... + S_9,$$

ដែល $S_1 = \sum_i^9 |B_i|, S_2 = \sum_{i \neq j} |B_i \cap B_j|, S_3 = \sum_{i \neq j \neq k} |B_i \cap B_j \cap B_k|$ ។ល។

ជាលទ្ធផល $|B_i| = (10-1)^m$ ពីព្រោះលេខទាំងអស់អាចកើតមានលើកលែង i បានអនុញ្ញាត

$|B_i \cap B_j| = (10-2)^m$ ពីព្រោះលេខទាំងអស់អាចកើតមានលើកលែងតែ i និង j បានអនុញ្ញាត

$|B_i \cap B_j \cap B_k| = (10-3)^m$ ពីព្រោះលេខទាំងអស់អាចកើតមានលើកលែងតែ$i, j,$ និងk បានអនុញ្ញាត និងទី

$$\begin{aligned} |B_0 \cup B_1 \cup ... \cup B_9| &= \binom{10}{1}(10-1)^m - \binom{10}{2}(10-2)^m + \binom{10}{3}(10-3)^m + ... \\ &= \sum_{k=1}^{10}(-1)^{k-1}\binom{10}{k}(10-k)^m. \end{aligned}$$

នេះ $\binom{10}{1}$ របៀបនៃការជ្រើសរើស$i,$ $\binom{10}{2}$របៀបនៃការជ្រើសរើស$i,$ និង j , $\binom{10}{3}$របៀបនៃការជ្រើសរើស i, j, k ។ល។ ដូចនេះ $S_1 = \binom{10}{1}(10-1)^m, S_2 = \binom{10}{2}(10-2)^m, S_3\binom{10}{3}(10-3)^m$, ។ល។ ចុងក្រោយយើងទទួលបាន៖

$$\begin{aligned} |B_0 \cup B_1 \cup ... \cup B_9| &= \binom{10}{1}(10-1)^m - \binom{10}{2}(10-2)^m + \binom{10}{3}(10-3)^m + ... \\ &= \sum_{k=1}^{10}(-1)^{k-1}\binom{10}{k}(10-k)^m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |B_0 \cup B_1 \cup ... \cup B_9| &= \binom{10}{1}(10-1)^m - \binom{10}{2}(10-2)^m + \binom{10}{3}(10-3)^m + ... \\ &= \sum_{k=1}^{10}(-1)^{k-1}\binom{10}{k}(10-k)^m. \end{aligned}$$

$$\left|B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_9\right| = \binom{10}{1}(10-1)^m - \binom{10}{2}(10-2)^m + \binom{10}{3}(10-3)^m + \ldots$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k-1} \binom{10}{k} (10-k)^m .$$

ដោយការជំនួសតម្លៃក្នុងសមីការ (7.3) យើងទទួលបាន៖

$$\left|A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_9\right| = \sum_{k=1}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} (10-k)^m .$$

ទ្រឹស្តីបទ ចំនួននៃរបៀបដើម្បីដាក់ b បំណែងចែកនៅក្នុង j កោដ្ឋបានចែក ដូចនេះគ្មានកោដ្ឋគឺទទេរគឺ

$$\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} (j-k)^b$$

សរាយបញ្ជាក់: សម្រាយដូចគ្នានឹងទ្រឹស្តីទយើងបានគ្រប់ចំនួនគត់ j កោដ្ឋគឺត្រូវបានប្រើ (ដូចគ្នាគ្រប់លេខដប់) នៅពេលបែងចែក b កោដ្ឋ(ដូចគ្នា កន្លែង m) ។ចំនួនលេខត្រូវបានពិនិត្យសម្រាប់ទ្រឹស្តីបទ៧.២១គឺស្មើនឹងចំនួននៃអនុគមន៍នៃអនុវត្តន៍ពេញ មានន័យថា៖ពីសំណុំb ទៅសំណុំn

ទ្រឹស្តីបទ ចំនួនករណីឬរបៀបដាក់ b ដាច់ដោយឡែកពីគ្នា ប៊ូលនៅក្នុងកោដ្ឋj ដូចនេះនៅក្នុងកោដ្ឋនោះទទេរគឺ៖

$$\frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} (j-k)^b \qquad (7.4)$$

សំរាយបញ្ជាក់: សម្រាយបញ្ជាក់នេះគឺតាមន័យត្រង់ដែលមាន $j!$ គឺជាចម្លាស់នៃ j ដែលសម្គាល់ថាជាកោដ្ឋ។សម្រាយនៃទ្រឹស្តីបទ៧.១៩ យើងមាន n ដោយសំគាល់មិនខុសប្លែក ដូចនេះគ្មានកោដ្ឋ និងនៅពេល ដែល b បំណែងចែកកាដ្ឋនៅក្នុងចំណោមពួកវាអាចជាចំនួនទទេរ។ នៅទីនោះយើងតាង j ជាមិនមែនជាកោដ្ឋមិនទទេរ គ្រប់ចំនួនគត់ $j = 0,1,2,\ldots,n$ ។សម្រាប់ចំនួនគត់ថេរ j ចំនួននៃករណីនៃបំណែងចែកមាននៅទ្រឹស្តីបទ៧.២២ ។ ដូចនេះតាមលក្ខណៈនៃផលបូកយើងពិនិត្យមើលចម្លើយខាងក្រោមនេះ៖

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} \frac{(-1)^k}{j!} \binom{j}{k} (j-k)^b$$

តើមានប៉ុន្មានរបៀបដែលអាចកើតឡើងនៅក្នុង b ស្ស៊ែត្រូវបានបែងចែកនៅក្នុងចំណោមn ដែលមិនអាចកំណត់កោដ្ឋភាពខុសគ្នា ?ឆ្លើយនូវសំណួរនេះគឺអាចធ្វើបានឡើយនៅក្នុងទម្រង់បិទ។មានការប្រហែលមួយចំនួននិងការបង្ហាញពីអាស៊ីមតូតគឺដំណើការណ៍បាន;យើងបង្ហាញការយល់ដឹងច្បាស់លាស់នៅក្នុងបញ្ហានេះ។

តាង$p(n)$សម្គាល់ថាចំនួនដោយលែកនៃរបៀបចំនួនគត់វិជ្ជមានnអាចសសេរដូចផលបូកមួយនៃចំនួនគត់មិនវិជ្ជមាន។ឧទាហរណ៍៖យើងចំណាំថា៖ប្រាំ៥អាចត្រូវបានសរសេរដូចផលបូកនៃធាតុមួយនៃគ្រប់សំណុំនីមួយៗបានបង្ហាញដូចខាងក្រោមនេះ

$\{5\}$	$\{4,1\}$ $\{3,2\}$	$\{3,1,1\}$ $\{2,2,1\}$	$\{2,1,1,1\}$	$\{1,1,1,1,1\}$

ដូចគ្នានេះដែរសម្រាប់ចំនួនគត់ 6, $p(6) = 11$, ករណីនេះអាចមើលនៅក្នុងតារាង7.1.

$\{6\}$	$\{5,1\}$ $\{4,2\}$ $\{3,3\}$	$\{4,1,1\}$ $\{3,2,1\}$ $\{2,2,2\}$	$\{3,1,1,1\}$ $\{2,2,1,1\}$	$\{2,1,1,1,1\}$	$\{1,1,1,1,1,1,1\}$

តារាង 7.1: ផ្នែកនៃចំនួនគត់ 6

$p(n)$គឺត្រូវគេស្គាល់ជាចំនួននៃរបៀបទៅកាន់ការបែងចែកចំនួនគត់n។តើ$p(n)$ចំនួនរបៀបដែលត្រូវធ្វើជាមួយ នឹងចំណោទបញ្ហានៃបំណែងចែកប៊ូលចូលក្នុងកោដ្ឋ?ពិនិត្យមើលឧទាហរណ៍៖ជួរឈរទី៣នៃតារាង7.1ដែលសំណុំនីមួយៗនោះមានធាតុចំនួន៣ជាតំណាងឲ្យករណីមួយនៃបែងចែកជា៦ចំណែកប៊ូលដែលមិនស្គាល់ដោយចែជន្យចេញជាកោដ្ឋចំនួន៣ដែលគេមិនស្គាល់ដែលមិនបានផ្តល់ជូនសោះនៃកោដ្ឋចំនួន៣គឺទទេរ។នៅជួរឈរទី១មានចំនួន១ករណី, និងមាន៣ករណីនៅជួរឈរទី២ហើយនិងនៅជួរឈរទី៣មានចំនួន៣ករណីនិងដូច្នេះបន្តបន្ទាប់។រួមទាំងអស់យើងមានចំនួន១១ករណីហើយចំនួននៃវិធីសាស្ត្រទៅកាន់បំណែងចែកជា៦នៃប៊ូលដែលមិនស្គាល់ឈ្មោះទៅជា៦នៃការរត់ដែលគេមិនស្គាល់។ចំណាំថាមួយចំនួននៃស្នៃទាំង៦នោះប្រហែលជាអាចទទេរនៅក្នុង១១ករណីនេះ។បើសិនជាមានស្នៃឬកោដ្ឋតែចំនួន៣ដំណតើរណើនោះនាំឲ្យរបៀបដើម្បីបែងចែក៦ចំនួនប៊ូលដែលមិនស្គាល់ឈ្មោះនោះចូលក្នុងទៅជាចំនួន៣ស្នៃដោយមិនខុសប្លែករត់ប្រណាំងគ្នានោះគឺករណីនៅក្នុងតារាងលេខ7.1រហូតដល់ជួរឈរទី៣។ម្យ៉ាងវិញទៀត,បើសិនជាមានច្រើនជាង៦កោដ្ឋ,នោះនាំឲ្យយើងអាចគិតពីតារាងមួយគឺដែលដូចគ្នាទៅនឹងតារាងលេខ7.1ដោយមានជួរឈរច្រើនជាងបានភ្ជាប់ជាមួយ,ក៏ប៉ុន្តែដែលបន្ទាប់ពី៦ជួរឈរទាំងអស់គឺទទេរដោយសាតែយើងមិនអាចធ្វើបំណែងចែកជាចំនួន៦ប៊ូលចូលនៅក្នុងកោដ្ឋច្រើនជាង៦មិនទទេរ។

ជាទូទៅ,តាង$p(b,n)$សម្គាល់ថាជាចំនួននៃរបៀបទៅកាន់ការបែងចែកbប៊ូលដែលមិនស្គាល់នៅក្នុងចំណោមn ចំនួនកោដ្ឋដែលគេមិនស្គាល់។ការកើតមានជារៀយៗនៃទំនាក់ទំនងមួយដែលបានចាប់ផ្តើមក្នុងទ្រឹស្តីបទខាងក្រោមនេះដែលអនុញ្ញាតឲ្យយើងលៃស្មានតម្លៃ $p(b,\ n)$ នៅក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃតម្លៃតូចជាងរបស់វា។

ទ្រឹស្តីបទ7.23 គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ b និង n,ដែល

$$p(b,n) = \sum_{1\leq k\leq n} p(b-k,k). \tag{7.5}$$

សម្រាយ: ចេញពីនិយមន័យនៃ $p(n)$ និង $p(n,n)$ វាគឺមានភាពងាយស្រួលយល់ $p(n,n) = p(n)$ គ្រប់ចំនួនគត់ n, និង $p(b,n) = 0$ បើមួយណាក៏បាន $b \leq 0$ ឬ $n \leq 0$។ទ្រឹស្តីបទដែល

$$\sum_{1\leq k\leq n} p(b-k,k) = \sum_{k=1}^{\min(b,n)} p(b-k,k).$$

ដោយមិនបាត់បង់នៃលក្ខណៈទូទៅដោ យសន្មត់ថា$b \geq n$.។ទំនាក់ទំនងកើតឡើងដដែលគឺត្រូវបានផ្តល់ឲ្យដោយការពិតដែល $p(b,\ n)$ជាផលបូកនៃរបៀបចំពោះការបែងចែកប៊ូល b នៅក្នុងចំណោមកោដ្ឋ n នៅក្នុងករណីនៃកោដ្ឋនោះមានមួយមិនទទេរ,មានកោដ្ឋ២មិនទទេរ,កោដ្ឋចំនួន៣មិនទទេរ,..., និងកោដ្ឋចំនួន n មិនទទេរ។គ្រប់ចំនួនគត់ k ដែល $1 \leq k \leq n$, ដើម្បីឲ្យប្រាកដថាមានកោដ្ឋចំនួនk មិនទទេរដែលយើងផ្តល់នូវគ្រប់កោដ្ឋនីមួយៗនូវប៊ូលទី១, បន្ទាប់មកយើងបែងចែកប៊ូលដែលនៅសល់ចំនួន $b-k$ នៅក្នុងចំណោមកោដ្ឋចំនួន k ដោយគ្មានការដាក់កម្រិត: មានរបៀបចំនួន $p(b-k,\ k)$។ ការអនុវត្តលក្ខណៈផលបូកយើងបានលទ្ធផល។ □

មាច មន

7.2.2 សង្ខេប

នៅក្នុងជំពូកនេះយើងធ្វើការសង្ខេបពីបញ្ហាការរាប់ដ៏សមញ្ញបំផុត។ពេលខ្លះចំណោទចំនួនពីរ ចែករំលែកនៅក្រោមមូលហេតុនៃទស្សនៈតែមួយ ប្រើបើទោះជាពួកវាអាចមើលទៅខុសគ្នាយ៉ាងខ្លាំង។ដូច្នេះយើងអាចបង្ហាញវាដោយប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រដូចគ្នា។នៅទីនេះយើងដាក់ការទាក់ទងមួយចំនួននូវបញ្ហាទាំងអស់ខាងក្រោមតាមរយៈដំណោះស្រាយរបស់វា។

---

1. វិធានផលបូក:ឧបមាថាមានករណី n ដែលមាននៅក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ Aកើតមានឡើងនិង m ករណីដែលក្នុងករណីព្រឹត្តិការ B កើតមានឡើង; នោះមាន $n+m$ ករណីនៅពេលដែលមួយនៃក្នុងចំណោមនៃព្រឹត្តិការណ៍ A ឬ B កើតមានឡើង [ចំណាំ: តាមការពិនិត្យឃើញថា $A \cap B = \emptyset$.]

---

2. វិធាននៃផលគុណ: ឧបមាមាន n ករណី នៅពេលព្រឹត្តិការណ៍ A កើតមានឡើង និង m ករណីនៅពេលដែលព្រឹត្តិការណ៍ B កើតមានឡើង; នោះមាន $n \times m$ ករណី នៅពេលដែលទាំងព្រឹត្តិការ A និង B កើតមានឡើង។ [សម្គាល់: យើងសង្កេតឃើញថា $A \cap B = \emptyset$.]

---

3. ទំនាក់ទំនងនៃបញ្ហា: (a) ចំនួននៃផលគុណផ្លាស់នៃ n ដែលមានអ្វីប្លែក

   (b) ចំនួននៃ អនុគមន៍មួយទល់មួយចន្លោះវា ពីរ n-សំណុំ។មានរូបមន្ត:

$$n!.$$

   ចំណាំ: $P(n)$.

---

4. ជាប់ទាក់ទងទៅនឹងបញ្ហា: (a) ចំនួនករណីអាចជ្រើសរើស r នៃកម្មវត្ថុ n នៃការបែងចែកវត្ថុ។

   (b) មេគុណ នៃx^r នៅការពន្យល់ of $(1+x)^n$.

   រូបមន្តនោះ

$$\binom{n}{r}.$$

   សម្គាល់: $C(n,r)$.

---

5. ជាប់ទាក់ទងទៅនឹងបញ្ហា: (a) ចំនួននៃរបៀបដើម្បីជ្រើសនិងចម្លាស់ r វត្ថុពី n វត្ថុដែលស្គាល់ច្បាស់។

   (b)ចំនួននៃអនុគមន៍នៃអនុវត្តប្រកាន់ពីសំណុំមួយr-សំណុំទៅកាន់n-សំណុំ

   .

   រូបមន្ត

$$\binom{n}{r} r!.$$

ចំណាំ: $P(n,r)$.

---

6. ទាក់ទងនឹងចំណោទ: (a) ចំនួននៃចម្លាស់នៃ a_1 វត្ថុជាប្រភេទទីមួយ, a_2 ជាវត្ថុសម្រាប់ប្រភេទទីពីរ, . . ., a_n ជាប្រភេទវត្ថុរបស់ទី n

រូបមន្ត:

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)!}{a_1!a_2!\cdots a_n!}.$$

---

7. ទាក់ទងនឹងចំណោទ: (a) ចំនួនករណីទៅកាន់បំណែងចែក b ដែលជាប៊ូលដែលស្គាល់ទៅជា n នៃកោដ្ឋដែលស្គាល់។

(b) ចំនួនអនុគមន៍ពីសំណុំ b ទៅកាន់សំណុំ n ។ រូបមន្ត:

$$n^b.$$

---

8. ទាក់ទងនឹងលំហាត់: (a) ចំនួនករណីនៃវិធីរបៀបដើម្បីបែងចែក b ប៊ូលដែលមិនមានអ្វីប្លែកចូលក្នុង n កោដ្ឋដែលច្បាស់លាស់។

(b) ចំនួននៃផលគុណចម្លាស់នៃb នៃវត្ថុដូចគ្នានៃប្រភេទទីមួយនិងn-1 ប្រភេទដូចគ្នានៃវត្ថុនៃប្រភេទដទៃ។

(c) ចំនួននៃដំណោះស្រាយចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្សេងគ្នានៃសមីការខាងក្រោមនេះ៖

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = b.$$

រូបមន្ត:

$$\binom{b+n-1}{b}.$$

សម្គាល់: សៀវភៅសិក្សាខ្លះចំណាំចំនួននេះដូចជា $s(b,n)$។

9.ពាក់ព័ន្ធនឹងលំហាត់: (a)ចំនួននៃករណីបែងចែកនឹង b ប៊ូលមិនមានអ្វីប្លែកនោះទៅជាnដែលជាកោដ្ឋមិនមានអ្វីប្លែក,ដែលមិនបានផ្តល់អ្វីទាំងអស់សម្រាប់កោដ្ឋគឺជាទទេរ។

(b) ចំនួននៃអនុគមន៍អនុវត្តន៍ពេញពីសំណុំ b ទៅកាន់សំណុំ n។

រូបមន្ត:

$$\sum_{0\le j}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^b.$$

---

10. ពាក់ព័ន្ធនឹងលំហាត់: (a)ចំនួននៃរបៀបដើម្បីបែងចែក bចំនួនប៊ូលដែលមិនខុសប្លែក-ទៅជា n កោដ្ឋនោះដែលមិនមានអ្វីប្លែកដែលមិនបានឲ្យនូវកោដ្ឋគឺជាទទេរ

(b) ចំនួននៃរបៀបដើម្បីបែងចែកពីសំណុំ b ទៅជា n ក្រឡា

រូបមន្ត:

$$\frac{1}{n!}\sum_{0\le j}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^b.$$

សម្គាល់ថា:ចំនួននេះត្រូវបានគេស្គាល់ផងដែរដូចជាចនួនលេខស្ទីលិញនៃប្រភេទទី២។

$$S(b,n) \quad \text{or} \quad \left\{ \begin{matrix} b \\ n \end{matrix} \right\}.$$

7.3 លំហាត់

លំហាត់ទី 1: គណនា $\binom{5}{3}$ និង $\binom{-7}{3}$ ដោយផ្ទាល់ចេញពីនិយមន័យ

លំហាត់ទី 2: បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់ $n \ge 0$,

$$\sum k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

លំហាត់ទី 3: បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់ $n \ge 0$,

$$\sum k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

លំហាត់ទី 4: បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់ $n \ge 0$,

$$\sum k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

លំហាត់ទី 5: តាង n ជាមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន។បង្ហាញថា៖

$$\sum_{0\le k}\binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.$$

លំហាត់ 6: បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់ $n, k,$ ដែល $n \ge 0$ និង $k \ge 1$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}(n-k+1)/k.$$

លំហាត់ 7: បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់ $n \ge 0$ និង $k \ge 1$,

$$\binom{n}{k} = (n/k)\binom{n-1}{k-1}.$$

លំហាត់ 8: គ្រប់ចំនួនពិត n និងចំនួនគត់ $k \ge 0$ មានសមីការដូចខាងក្រោមដោយនិយមន័យ7.1៖

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

បង្ហាញតាមផ្នែកទាំងពីរនៃភាពផ្សេងគ្នានៃសមីការខាងក្រោមនេះដោយគោរពតាមx ដែលនិយមន័យនេះគឺប៉ាន់ស្មានដោយទ្រឹស្តីបទទ្វេធាទៅចំនួនពិត n ។

$$(1+x)^n = \sum_{0\le k}\binom{n}{k}x^k.$$

លំហាត់ 9: តាង

$$f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

បង្ហាញថា $(x^n)f(1/x)$ គឺជាពហុធានៃពហុធាថ្មី $\sum a_{n-k}x^k$. ជាពហុធាលំដាប់ទីប៉ុន្មាន ?

លំហាត់ 10: រកមេគុណនៃ x^4 នៅក្នុងការបង្ហាញនៃ

$$(2 + \frac{x}{4})^{10}.$$

លំហាត់ 11: បង្ហាញថា៖

$$\sum_{0 \le k} 2^{6-k}\binom{6}{k} = 3^6.$$

លំហាត់ 12: បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់ $n \ge 0$,

$$\sum_{0 \le k} 2^{n-k}\binom{n}{k} = 3^n.$$

លំហាត់ 13: ប្រើទ្រឹស្តីបទទ្វេធាដើម្បីគណនា $(1.2)^{-1.2}$ និងភាពត្រឹមត្រូវចម្លើយឡើងទៅកន្លែងមានលេខទសភាគ ៣។

លំហាត់ 14: បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់ n និង k, ដែល $n \ge 2$ និង $k \ge 2$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}.$$

លំហាត់ 15: គ្រប់ $k \ge 0$ និង $m \ge 0$, បង្ហាញថា៖

$$\sum_{0 \le j \le k} \binom{m-j}{k-j} = \binom{m+1}{k}.$$

លំហាត់ 16: សម្រាប់ $k \ge 0$ និង $m \ge 0$, បង្ហាញថា៖

$$\sum_{0 \le n \le m} \binom{n}{k} = \binom{m+1}{k+1}.$$

លំហាត់ 17: តាង $n \ge 0$ ។បង្ហាញថាគ្រប់ r និង k ដែល $0 \le r \le n$ និង $k \ge 0$,

$$\binom{n}{k} = \sum_{0 \le j} \binom{r}{j}\binom{n-r}{k-j}.$$

[ព័ត៌មានជំនួយ៖ប្រើប្រាស់ឯកតាវ៉ាន់ដឺម៉ូតនៅលើទំព័រ 274.]

លំហាត់ 18: គ្រប់ចំនួនគត់ $j \geq 0$, ចូលរកចំនួនគត់ a_k (ដែលអាស្រ័យផងដែរលើ j) នោះគេបានខាងក្រោមនេះ

$$\sum_{0 \leq k} a_k \binom{n}{k} = \binom{n+3}{j}$$

គ្រប់ចំនួនគត់ $n \in \mathbf{N}$។ [ព័ត៌មានជំនួយ៖ព្យាយាមករណីទី១ច្បាស់លាស់តិចតួច]

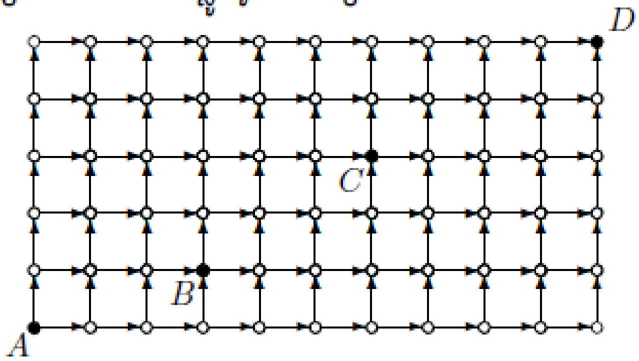
លំហាត់19: ប្រើទ្រឹស្តីបទទ្វេធានិងបង្ហាញថាគ្រប់ x, $-1 < x < 1$,

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots .$$

[ព័ត៌មានជំនួយ: $1 - x^2 = (1+x)(1-x)$, or let $-x^2 = u$.]

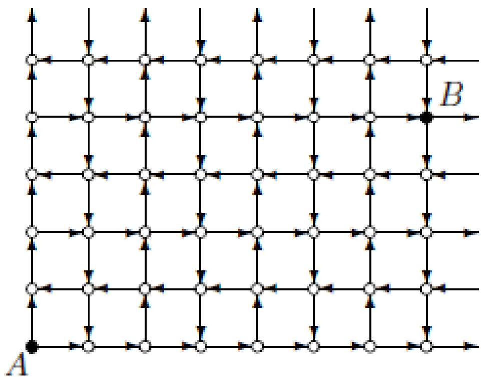
លំហាត់ 20: យើងស្ថិតនៅជ្រុងមួយលើផ្លូវក្រឡាចត្រង្គចតុកោណកែង១។យើងចង់ទៅកាន់ជ្រុង m ប្លុកខាងកើតនិងខាងជើងប្លុក n ។ យើងអាចធ្វើដំណើរទៅទិសខាងជើង ឬក៍ខាងកើតប៉ុណ្ណោះ។ បង្ហាញថាចំនួនសារុបនៃផ្លូវដែលខុសគ្នាយើងអាចរើសយកគឺ៖ *(m+n)/m*

លំហាត់ 21: ពិនិត្យមើលផែនទីនៃផ្លូវដូចខាងក្រោម៖



លើផែនទីបង្ហាញថា*B*គឺមានប្លុកចំនួន៣នៅខាងកើតនិងចំនួន១នៅខាងជើងពី*A*,*C*គឺខាងកើតមាន៣ប្លុកនិងជើងមានចំនួន២ប្លុកពី*B*និង*D*គឺនៅខាងកើតមាន៤ប្លុកនិងចំនួន២ប្លុកខាងជើងពី*C*។ឧបមាយើងចង់ប្តូរពី*A*ទៅ*D*តាមរយៈ*B*ឬ*C*ប៉ុន្តែមិនទាំងពីរនោះទេហើយយើងអនុញ្ញាតឲ្យប្តូរនៅផ្នែខាងជើងឬខាងកើតតែប៉ុណ្ណោះ។តើយើងអាចរើសបានប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នា ?

លំហាត់ 22: នៅម៉ាហាតាន់ផ្លូវគឺផ្លូវមួយដូចបង្ហាញនៅក្នុងផែនទីខាងក្រោម៖



ឧបមាថាយើងគឺអនុញ្ញាតឲ្យបើកបរទិសខាងកើតនិងខាងជើងប៉ុណ្ណោះគូត់និងមានទិសដៅបង្ហាញផ្លូវបានបង្ហាញ។តើមានផ្លូវខុសគ្នាប៉ុន្មានរបៀបនៅទីនោះដើម្បីបើកបរពី A ទៅ B នៅក្នុងផែនទីខាងលើ ?

លំហាត់ 23: តាង n និង r ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដូចនេះ $r \geq n$.។ចូរពិនិត្យមើលពហុធាមានការបង្ហាញនៅខាងក្រោមនេះ៖

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n.$$

1. បង្ហាញថាចំនួនតួនៅក្នុងការបង្ហាញនេះជាមួយដែលគ្មាននៃ x_i មាននិទស្សន្ត 2 ឬ ច្រើនជាងនេះគឺ $\binom{r}{n}$.
2. បង្ហាញថាតួនីមួយៗមានមេគុណដែរ $n!$

លំហាត់ 24: តាង f គឺជាអនុគមន៍មួយដែលកំណត់ដូចជា៖

$$f(x) = (1 + 2x)^{10}.$$

ចូលយើងកំណត់មេគុណនៃ x^{10}នៃការពន្លាតពហុធាខាងក្រោម

$$f(1 - \frac{x^2}{6}).$$

[ព័ត៌មានជំនួយ:តើវាយ៉ាងណា $f(1\text{-}x^2/6)$?

លំហាត់ 25: យើងបានបង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n, r,

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

តាមពិជគណិត។គេមានការពន្លាតនៃបន្សំសម្រាប់សមភាពនេះ;គឺថាគេត្រូវអនុញ្ញាតប្រើលក្ខណៈនេះដែលnrគឺជាចំនួននៃរបៀបដើម្បីជ្រើសរើសយកវត្ថុrពីក្នុងnវត្ថុដែលស្គាល់ប៉ុណ្ណោះ។

លំហាត់ 26: ឧបមាថាយើងមានកុំព្យូទ័រមួយដែលមាន៨រន្ធដោតទទេរដើម្បីចំណុចប្រទាក់ជាមួយនឹងកាត,កំពូងផែពីរស្របគ្នាសម្រាប់ម៉ាស៊ីនបោះពុម្ពនិងកំពង់ផែលំដាប់លេខ៤គឺសម្រាប់ឧបករណ៍ម៉ូឌឹមនិងម៉ាស៊ីនស្កែនឬកម៉ៅ។ឧបមាថាយើងកាតចុះរន្ធចំនួន១សម្រាប់ម៉ាស៊ីនព្រីន,១ម៉ៅ,១សម្រាប់ម៉ូឌឹម។តើយើងត្រូវមានប៉ុន្មានរបៀបយើងអាចភ្ជាប់ពួកវាទៅនឹងកុំព្យូទ័ររបស់យើង?

លំហាត់27: ពីម៉ាស៊ីនព្រីនបែបលាហ្សែលn ខ្សែលួស។ពួកគេទាំងអស់ត្រូវបានភ្ជាប់ដូចម្តេចទៅកាន់ស្ថានីយ៍ k លើកុំព្យូទ័រមួយ។តើមានប៉ុន្មានរបៀបទីនេះដើម្បីការភ្ជាប់ទាំងនេះ។

1. បើមិនមានខ្សែលួសពីរតើអាចភ្ជាប់ស្ថានីយ៍ដូចគ្នាបានទេ?
2. តើនៅក្នុងករណីទូទៅវិញ?

លំហាត់ 29: និស្សិត៥នាក់បានជ្រើសរើសប្រធានបទផ្សេងពីបញ្ជីមួយនៃ៨ប្រធានបទ ចំពោះរបាយការណ៍ចុងក្រោយរបស់ពួកគេ។តើអាចមានប៉ុន្មានជម្រើសដើម្បីបង្កើតថ្នាក់?

លំហាត់ 30: ពិនិត្យរង្វង់មួយជាមួយនឹង n ចំណុចដែលបានសម្គាល់នៅលើវា។តាង $n \geq 2$។ ឧបមាថាអ្នកចង់គូសអង្កត់ធ្នូមួយដោយការភ្ជាប់ចំនួនពីរចំណុចនៃn ចំណុច។តើមានអង្កត់ធ្នូផ្សេងគ្នាអ្នកអាចគូសត្រីកោណបាន?

លំហាត់ 31: ពិនិត្យមើលរង្វង់មួយដោយមានសញ្ញាសម្គាល់ n ចំណុចនៅលើវា។តាង $n \geq 3$។ តើមានប៉ុន្មានរបៀបដែលអាចគូសត្រីកោណមួយដោយភ្ជាប់3ចំណុចនៃn ចំណុចទាំងនេះ?

លំហាត់ 32: ពិនិត្យមើលពហុកោណប៉ោងមួយ ពហុកោណជាមួយនឹង n កំពូលដែល $n \geq 3$។ ឧបមាថាអ្នកចង់គូសត្រីកោណមួយដោយការភ្ជាប់កំពូល 3 តែត្រីកោណមិនអាចចែកផ្នែកខាងណាមួយពហុកោណ។តើមានប៉ុន្មានរបៀបដែលអ្នកអាចគូសវា។

លំហាត់ 33: តើមានបៀអាតាចំនួនប៉ុន្មានសន្លឹកនៅក្នុងដៃអ្នកលេងបៀទីនោះដែលខុសគ្នា?

Problem 34: តើមានផ្ទះពេញចំនួនប៉ុន្មានដែលមានពេជ្រមាននៅក្នុងដៃបៀរ?

Problem 35: តើមានខ្សែប៉ុន្មានវាមានលេខ 0ចំនួន៥ និង១មានចំនួន៥ដែលចាប់ផ្តើមនៅ ១០១?

Problem 36: តើមានខ្សែប៉ុន្មានដែលមានចំនួន៧គឺលេខ០,លេខ២មាន១ដងនិងលេខមួយមានចំនួន២

Problem 37: តើមានខ្សែអក្សរប្រាំបីខ្ទង់វែងនៃលេខ 0 និងលេខ ១ នៅទីនោះ 1's មានមិនលើសពីពីរ?បង្ហាញចំលើយរបស់អ្នកទាក់ទងនឹងមេគុណទ្វេធាហើយពន្យល់។

លំហាត់ 38: អ្នកមានមួយនៃប្រាក់កាក់នីមួយៗដូចតទៅនេះ: ភិនីល,និកែល, ឌីមី,ត្រីមាស,កន្លះដុល្លា,ដុល្លា។តើមានចំនួនទឹកប្រាក់ផ្សេងៗប៉ុន្មានដែលអ្នកអាចបង្កើតបានកាក់ប្រាក់នេះ?ចូរពន្យល់។

លំហាត់ 39: សំណុំ១នៃមនុស្ស 60 នាក់ ត្រូវបានធ្វើការស្ទង់មតិ។នៅក្នុងចំណោមមនុស្ស60នាក់មានមនុស្ស26នាក់ចូលចិត្តញ៉ាំកីសា,មនុស្ស32នាក់ចូលចិត្តការ៉េមហើយមនុស្ស30នាក់ចូលចិត្តតៅហ៊ូ។មានមនុស្ស14នាក់ដែលចូលចិត្តទាំងកីសានិងការ៉េម,មនុស្ស7នាក់ដលែចូលចិត្តទាំងកីសានិងតៅហ៊ូ,មនុស្ស2នាក់ចូលចិត្តទាំងការ៉េមនិងតៅហ៊ូ,និងមនុស្ស2នាក់ចូលចិត្តទាំង៣មុខ។តើមានមនុស្សប៉ុន្មានដែលមិនចូលចិត្តទាំង៣មុខ?

លំហាត់ 40: តើមានប្រវែងនៃខ្សែអក្សរចំនួនប្រាំលើអក្សរ a, b, c, d, e ចំនួនពីរឬច្រើនដែលជាប់គ្នា a's?

លំហាត់ 41: តើមានចំនួនគត់ចំនួនប៉ុន្មានរវាងចន្លោះលេខ1 និង10,000 ដែល 7ខ្ទង់លេចឡើង? (ចំនួនគត់ទាំងនេះគឺត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងគោល10)

លំហាត់ 42: នៅក្នុងចំណោមចម្លាស់ទាំងអស់ f នៃ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$តើមានចំនួនប៉ុន្មាន $f(1)$ សេស? $f(2)$ សេស? ទាំងពីរសេស?

លំហាត់ 43: អក្សរទាំង ២៦ តួនៃអក្ខរក្រមត្រូវបានសរសេរជាជួរដេក (ម្តងម្នាក់ៗ)។

ដូច្នេះគ្មានស្រៈពីរនៅជាមួយគ្នាទេ។ តើវិធីនេះអាចធ្វើបានប៉ុន្មានរបៀប?(ស្រៈ: a, e, i, o, u.)

លំហាត់ 44: តើមានចម្លាស់ប៉ុន្មាននៃសំណុំ 6ដែលមានវង្វង់ពីរយ៉ាងពិតប្រាកដ?ពន្យល់

លំហាត់ 45: មនុស្ស ៧ នាក់ចែកជា ៣ ក្រុមដើម្បីលេង ដេញតាម មិនសំខាន់។

ប្រសិនបើការរឹតត្បិតតែមួយគត់គឺ គ្មានក្រុមណាមួយអាចនៅទំនេរបានទេ,អ្នករាល់គ្នាស្ថិតនៅក្នុងក្រុមខ្លះ,ហើយគ្មានក្រុមពីរត្រួតគ្នាឡើយ,តើមានវិធីប៉ុន្មានដើម្បីជ្រើសរើសក្រុម ?

លំហាត់ 46: មនុស្សប្រាំពីរនាក់ចូលក្នុងជណ្តើរយន្តនៅជាន់ក្រោម។ ច្រកចេញនីមួយៗ

នៅជាន់ទី 1, 2, 3, ឬ 4។ តើវិធីនេះអាចកើតឡើងបានប៉ុន្មាន?

លំហាត់ 47: ពិចារណាសំណុំ៥ដែល $X = \{a, b, c, d, e\}$.តើមានមនុស្សចំនួន ១២ នាក់មានចំនួ

ពីទីនោះ X ដែលក្នុងនោះ a លេចឡើងយ៉ាងហោចណាស់ពីរដងនិង d យ៉ាងហោចណាស់បីដង

លំហាត់ 48: តើមានពាក្យចំនួន ៥ អក្សរដែលអាចកើតមាននៅទីនោះដោយប្រើអក្ខរក្រមភាសាអ

តើប៊ូលនិងកោដិប្រភេទនេះជាប្រភេទអ្វី?

លំហាត់ 49: 1. តើមានអនុវត្តន៍ពេញនៅទីនោះចំនួនប៉ុន្មានពី 5-សំណុំ ទៅ 5-សំណុំ?ពន្យល់។

2. តើមានប៉ុន្មាននាក់មកពី 5-សំណុំ ទៅ 3-សំណុំ?

លំហាត់ 50: ពិនិត្យមើល $w + x + y + z = 10$.

1. បើ $w \geq 2$,តើមានដំណោះស្រាយប៉ុន្មាននៅក្នុងគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានទៅកាន់សមីការ?
2. តើមានប៉ុន្មាននៅក្នុងចំនួនគត់វិជ្ជមាន?

លំហាត់ 51: តើមានដំណោះស្រាយប៉ុន្មានដែលមិនវិជ្ជមានចំពោះវិសមភាពខាងក្រោម?

$$12 \leq w + x + y + z \leq 14.$$

លំហាត់52: អ្នកមានការចើបរបស់ហ៊ីសហ៊ីចំនួនប្រាំបី (បំណែកស្ករគ្រាប់ដូចគ្នា),

ទាំងអស់ដែលអ្នកឱ្យទៅមនុស្សបួននាក់។តើមានវិធីប៉ុន្មានដើម្បីចែកចាយស្ករគ្រាប់នេះ?

លំហាត់53: មាន ៧ ច្បាប់នៃសៀវភៅមួយក្បាល ៨ ក្បាលនៃសៀវភៅទីពីរ,

និងប្រាំបួននៃសៀវភៅទីបី។តើមនុស្សពីរនាក់អាចចែកគ្នាបានប៉ុន្មាននាក់បើម្នាក់ៗយកសៀវភៅ ១២ ក្បាល? ពន្យល់។

លំហាត់ 54: ឧបមាថាប៊ូលនិងកោដអាចសម្គាល់បានដែលកោដគឺជង់

(ដូច្នេះលំដាប់នៃគ្រាប់ប៊ូលនៅក្នុងពូកវាមានសារៈសំខាន់ណាស់)ហើយទោះបីជាលំដាប់នៃកោដក៏ធ្វើឱ្យមានការខុសគ្នាដែរ។តាមរបៀបដែលអាចធ្វើទៅបានbប៊ូលត្រូវបានដាក់ចូល u កោដ?

លំហាត់ 55: ដូចគ្នានឹងបញ្ហាមុនដែរ។ តើមានអ្វីប្រសិនបើលំដាប់នៃកោដនឹង

មិនធ្វើឱ្យមានការផ្សេងគ្នាទេប៉ុន្តែកោដនៅតែជាជង់ឬ?

លំហាត់ 56: តើមានប៉ុន្មានរបៀប b ប៊ូលមិនមានអ្វីផ្លែកអាចផ្លាស់ទីបាននៅក្នុង u ដែលបែងចែកកោដ្ឋបើសិនជាកោដ្ឋនីមួយៗត្រូវមានយ៉ាងហោចណាស់ប៊ូលចំនួន k ។

លំហាត់ 57: នៅទីនេះតើមានការបែងចែកជាប៉ុន្មាននៃ 8-សំណុំ៖

1. ទៅជាពីរក្រុម, ដែលមួយក្រុមមានចំនួន៣ធាតុ,ផ្សេងទៀតមានចំនួន៥ធាតុ?
2. ទៅជា៣ក្រុមដែលមួយក្រុមមានចំនួន២ធាតុនិងពីរផ្សេងទៀតមានចំនួន៣ធាតុនៃផ្នែកនីមួយៗ?

លំហាត់ 58: តាង $S(n,m)$ ជាចំនួនលេខ Stirlingនៃប្រភេទទីពីរ;គឺថាចំនួននៃរបៀប សម្រាប់ការបែងចែកសំណុំ n ជា m ក្រុម។ បង្ហាញថា៖

$$S(n,m) = S(n-1,m-1) + mS(n-1,m).$$

[ការណែនាំ:កាន់ទីnជាធាតុទីមួយនាំឲ្យគេបានជាមួយនឹងក្រុមអ្នកគួដាក់ចូលធាតុទីn?]

លំហាត់ 59: តាង A, B ជាសំណុំ។ ដែល $|A| = 7$ និង $|B| = 5$ ។ នៅទីនេះតើមានអនុវត្តន៍ប្រកាន់ចំនួនប៉ុន្មានពី A ទៅ B? និងពី B ទៅ A?

លំហាត់ 60: តាង A, B គឺជាសំណុំ,ដែល $|A| = 7$ និង $|B| = 5.$ ។ នៅទីនេះតើមានអនុវត្តន៍ពេញចំនួនប៉ុន្មានពី A ទៅ B? និងពីB ទៅ A?

លំហាត់ 61: មួយសំណុំនៃមនុស្ស១០នាក់ត្រូវបានបង្កើតជាគណៈកម្មការមានសមាជិក៤នាក់ម្នាក់ៗតាមរបៀបមួយដែលរាល់៣សំណុំរងនៃមនុស្សគឺជាសមាជិកដែលត្រូវទទួលបានគណៈកម្មាធិការចំនួនពីរ។ តើមានគណៈកម្មការប៉ុន្មាននាក់ទាំងអស់គ្នា?

លំហាត់ 62: តាង

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \text{ និង}$$
$$B = \{1,3,5,7\}.$$

ឧបមាថាយើងចង់យកចំនួន៦ធាតុពី A និងធាតុ២ពី B និងរៀបចំវានោលើខ្សែមួយ។ តើមានខ្សែផ្សេងគ្នាប៉ុន្មានត្រូវបានសាងសង់ឡើង?

7.4 ផ្នែកដំណោះស្រាយ

ដំណោះស្រាយ 1: តាមនិយមន័យ $\binom{5}{3}$ ជាមេគុណនៃ x^3 នៅក្នុងពហុធា:

$$(1+x)^5 = 1 + 5x^1 + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5.$$

ដូចនេះ $\binom{5}{3} = 10.$ និយមន័យនេះមិនធ្វើការងារនោះទេ $\binom{-7}{3}$. យើងត្រូវប្រើប្រាស់និយមន័យ 7.1, គេបាន

$$\binom{-7}{3} = \frac{(-7)(-7-1)(-7-2)}{3!} = -84.$$

$\square$

ដំណោះស្រាយ 2: តាង $f(x) = (1+x)^n, n \geq 0$.តាមទ្រឹស្តីបទទ្វេធា នោះ យើងដឹងថា៖

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^n && (7.6)\\ &= \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^n. && (7.7) \end{aligned}$$

ដេរីវេទី១នៃអនុគមន៍ f ជាមួយនឹង x គឺសមមូលនឹងដេរីវេទី១នៃ(7.6) និង(7.7) អាស្រ័យ x។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} f'(x) &= n(1+x)^{n-1}\\ &= 1\binom{n}{1}x^0 + 2\binom{n}{2}x^1 \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1} = \sum k\binom{n}{k}x^{k-1}. \end{aligned}$$

តាង $x = 1$,នោះ

$$n2^{n-1} = \sum k\binom{n}{k}. \qquad (7.8)$$

$\square$

ដំណោះស្រាយ3:តាង $f(x)=(1+x)^n, n\geq 0$.ដូចគ្នាចំពោះលំហាត់មុនយើងនឹងរកដេរីវេទីពីរនៃ(7.6)នឹង (7.7)ដោយអាស្រ័យx ។ចេញពីលំហាត់មុនយើងបាន៖

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum k\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

ដូច្នេះ,

$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum (k-1)k\binom{n}{k}x^{k-2}.$$

តាង $x = 1$, យើងបាន

$$n(n-1)2^{n-2} = \sum k(k-1)\binom{n}{k}. \tag{7.9}$$

$\square$

ដំណោះស្រាយ4: រំលឹកឡើងវិញលក្ខណៈនៃពហុធាដូចខាងក្រោមនេះ។បើ $f(k)$ និង $g(k)$ ជាពីរពហុធាក្នុង k និង a ជាចំនួនថេរ,នាំឲ្យគេបានចំនួនពីរសមីការដូចខាងក្រោមនេះ៖

$$\sum (f(k)+g(k)) = \sum f(k) + \sum g(k),$$

ហើយ

$$\sum af(k) \ = \ a\left(\sum f(k)\right).$$

ពី (7.9), យើងបាន

$$\begin{aligned} n(n-1)2^{n-2} &= \sum (k-1)k\binom{n}{k} \\ &= \sum (k^2-k)\binom{n}{k} \\ &= \sum \left(k^2\binom{n}{k} - k\binom{n}{k}\right) \\ &= \sum k^2\binom{n}{k} - \sum k\binom{n}{k}. \end{aligned}$$

ពី (7.8),យើងដឹងថា៖ $\sum knk = n2^{n-1}$. ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} \sum k^2\binom{n}{k} &= \sum k\binom{n}{k} + n(n-1)2^{n-2} \\ &= n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} \\ &= (2n + n(n-1))2^{n-2} \\ &= n(n+1)2^{n-2}. \end{aligned}$$

$\square$

ដំណោះស្រាយ 5: តាង n គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង តាង

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^n \\ &= \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \cdots + \binom{n}{2k}x^{2k} + \binom{n}{2k+1}x^{2k+1} + \cdots + \binom{n}{n}x^{2n}. \end{aligned}$$

តាង $x=1$, យើងមាន $f(1)=(2)^n$, និង

$$2^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{2k}+\binom{n}{2k+1}+\cdots+\binom{n}{n}. \qquad (7.10)$$

ដូចគ្នានេះ, តាង $x=-1$, យើងមាន $f(-1)=0$, និង

$$0 = \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{2k}-\binom{n}{2k+1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}. \qquad (7.11)$$

ដកចេញ (7.11) ពី (7.10), យើងមាន

$$2^n = 2\binom{n}{1}+2\binom{n}{3}+\cdots+2\binom{n}{2k+1}+2\binom{n}{2k+3}\cdots$$

ដូចនេះ

$$2^n = \sum_{0\le k} 2\binom{n}{2k+1} = 2\times\sum_{0\le k}\binom{n}{2k+1},$$

ឬ

$$2^{n-1} = \sum_{0\le k}\binom{n}{2k+1}.$$

□

ដំណោះស្រាយ 6: ចំពោះ គ្រប់ចំនួនគត់ $n\ge 0$ និង $k\ge 1$,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\\ &= \frac{n!\,(n-k+1)}{k(k-1)!\,(n-k+1)\,(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!}\times\frac{n-k+1}{k}\\ &= \binom{n}{k-1}(n-k+1)/k.\end{aligned}$$

□

ដំណោះស្រាយ 7: ចំពោះចំនួនគត់ $n \geq 0$ និង $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!\ (n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!\ (n-1-(k-1))!} \\ &= \frac{n}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!\ (n-1-(k-1))!} \\ &= (n/k)\binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

□

ដំណោះស្រាយ8: តាង n គឺគ្រប់ចំនួនពិត និងតាង $a_k = \binom{n}{k}$ គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k,នោះ,

$$(1+x)^n = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots$$

យើងរក្សាទុកភាពផ្សេងគ្នាជាមួយxលើផ្នែកទាំងពីររហូតដល់a_k ឋិតនៅផ្នែកខាងស្តាំដៃក្លាយជាតួចំនួនថេរ, a_k ក្លាយជាមេគុណនៃ x^0។ ដូច្នេះយើងមានទៅកាន់ភាពខុសគ្នានៃផ្នែកទាំងពីរ k ដង, និងបន្ទាប់ យើងពិនិត្យ

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k} = (k!)a_kx^0.$$

តាង $x = 0$, យើងបាន $n(n-1)\cdots(n-k+1) = (k!)a_k$. ដូច្នេះ,

$$a_k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

□

ដំណោះស្រាយ 9: តាង $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. នោះ,

$$\begin{aligned}x^nf(\frac{1}{x}) &= x^n(a_0 + a_1(\frac{1}{x}) + a_2(\frac{1}{x})^2 + \cdots + a_n(\frac{1}{x})^n) \\ &= a_0x^n + a_1(\frac{x^n}{x}) + a_2(\frac{x^n}{x^2}) + \cdots + a_n(\frac{x^n}{x^n}) \\ &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_nx^{n-n} \\ &= a_{n-0}x^0 + a_{n-1}x^1 + \cdots + a_{n-n}x^n \\ &= \sum a_{n-k}x^k.\end{aligned}$$

នេះគឺជាពហុធាមួយនៃដឺក្រេ n នៅក្នុង x។ □

ដំណោះស្រាយ10: យើងពិនិត្យថា

$$(2+\frac{x}{4})^{10} = 2^{10}(1+\frac{x}{2^3})^{10}. \tag{7.12}$$

ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា មេគុណនៃ x^4 in $(1+\frac{x}{2^3})^{10}$ is

$$\binom{10}{4}(\frac{1}{2^3})^4.$$

ដូច្នេះ, មេគុណនៃ x^4 ក្នុង (7.12)

$$2^{10}\binom{10}{4}(\frac{1}{2^3})^4 = \frac{105}{2}.$$

□

ចម្លើយ 11: តាមទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

$$(1+\frac{1}{x})^6 = \sum_{0\le k}\binom{6}{k}(\frac{1}{x})^k.$$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការតាម x^6 គេបាន៖

$$x^6(1+\frac{1}{x})^6 = x^6\sum_{0\le k}\binom{6}{k}(\frac{1}{x})^k,$$

$$x^6(\frac{x+1}{x})^6 = \sum_{0\le k}\binom{6}{k}x^{6-k},$$

$$(x+1)^6 = \sum_{0\le k}\binom{6}{k}x^{6-k}.$$

ចុង បញ្ចប់តាង $x=2$, គេបាន

$$3^6 = \sum_{0\le k}2^{6-k}\binom{6}{k}.$$

□

ដំណោះស្រាយ 12: នេះជាលក្ខណៈទូទៅមួយនៃលំហាត់ 11. តាមទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

$$(1+\frac{1}{x})^n = \sum_{0\le k}\binom{n}{k}(\frac{1}{x})^k.$$

គុណផ្នែកទាំងពីរនៃសមីការនឹង x^n ផ្តល់ឲ្យ

$$x^n(1+\frac{1}{x})^n = x^n\sum_{0\le k}\binom{n}{k}(\frac{1}{x})^k,$$

$$x^n(\frac{x+1}{x})^n = \sum_{0\le k}\binom{n}{k}x^{n-k},$$

$$(x+1)^n = \sum_{0\le k}\binom{n}{k}x^{n-k}.$$

តាង $x=2$, we get

$$\sum_{0\le k}2^{n-k}\binom{n}{k} = 3^n.$$

$\square$

ដំណោះស្រាយ13: តាមទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

$$(1.2)^{-1.2} = (1+0.2)^{-1.2} = \sum_{k\ge 0}\binom{-1.2}{k}(o.2)^k.$$

យើងគណនាតួខ្លះរហូតដល់ $k=6$ ដូចខាងក្រោមនេះ

$$k=0:\quad \binom{-1.2}{0}(0.2)^0 = 1$$

$$k=1:\quad \binom{-1.2}{1}(0.2)^1 = \tfrac{-1.2}{1}\cdot(0.2)^1 = -0.24$$

$$k=2:\quad \binom{-1.2}{2}(0.2)^2 = \tfrac{(-1.2)(-2.2)}{2\cdot 1}\cdot(0.2)^2 = 0.0528$$

$$k=3:\quad \binom{-1.2}{3}(0.2)^3 = \tfrac{(-1.2)(-2.2)(-3.2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot(0.2)^3 = -0.011264$$

$$k=4:\quad \binom{-1.2}{4}(0.2)^4 = \tfrac{(-1.2)(-2.2)(-3.2)(-4.2)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot(0.2)^4 = 0.002365$$

$$k=5:\quad \binom{-1.2}{5}(0.2)^5 = \tfrac{(-1.2)(-2.2)\cdots(-5.2)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot(0.2)^5 = -0.000492$$

$$k=6:\quad \binom{-1.2}{6}(0.2)^6 = \tfrac{(-1.2)(-2.2)\cdots(-6.2)}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot(0.2)^6 = -0.000085$$

កត់សម្គាល់ថា នៅពេលដែល $k=6$ យើងទទួលបាន -0.000085 នោះវាមានតម្លៃតូចណាស់ចំពោះការប៉ះពាល់ដល់ដែលតម្រូវឲ្យមានភាពត្រឹមត្រូវ។ផ្សេងទៀត,គ្រាន់តែចំនួនប៉ីតួដំបូងដែល $k=0,1,\dots,5$ គឺពិតជាសំខាន់ណាស់ដែលតម្រូវឲ្យមានភាពត្រឹមត្រូវ។ ដូច្នេះ

$$(1.2)^{-1.2}\approx 1-0.24+0.0528-0.011264+0.002365-0.000492 = 0.803409.$$

បន្ទាប់ពីបិទ១ជុំនោះ យើងបាន៖ $(1.2)^{(-1.2)} = 0.803.$ $\square$

ដំណោះស្រាយ 14: តាង $n \geq 2$ និង $k \geq 2$ ។ដោយប្រើប្រាស់រូបមន្តបន្ថែមដែលផ្តល់ជូននូវទំព័រ 273, យើងបាន

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\ &= \left[\binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1}\right] + \left[\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}\right] \\ &= \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}.\end{aligned}$$

$\square$

ដំណោះស្រាយ15: តាង $k \geq 0$ ហើយ $m \geq k-1$ ។ដោយការអនុវត្តរូបមន្តផលបូកម្តងទៀត

$$\begin{aligned}\binom{m+1}{k} &= \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \\ &= \binom{m}{k} + \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k-2} \\ &= \binom{m}{k} + \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-2}{k-2} + \binom{m-2}{k-3} \\ &= \binom{m}{k} + \cdots + \binom{m-k}{k-k} + \binom{m-k}{k-k-1}.\end{aligned}$$

ពីព្រោះ $m-k-1 = 0$, យើងមាន

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \cdots + \binom{m-k}{k-k} = \sum_{0 \leq j \leq k} \binom{m-j}{k-j}.$$

នៅក្នុងករណីនេះ $0 \leq m < k-1$, ផ្នែកទាំងសងខាងគឺស្មើនឹង 0 ។ $\square$

ដំណោះស្រាយ16: ជាគោលគនិតគឺធ្វើដូចគ្នានឹងលំហាត់ទី15 លើកលែងតែរូបមន្តផលបូកគឺបានអនុវត្តន៍ចំពោះតួដ៏ទៃទៀត។តាង $k \geq 0$ និង $m \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\binom{m+1}{k+1} &= \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} \\
&= \binom{m}{k} + \binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k+1} \\
&= \binom{m}{k} + \binom{m-1}{k} + \binom{m-2}{k} + \binom{m-2}{k+1} \\
&= \binom{m}{k} + \binom{m-1}{k} + \binom{m-2}{k} + \cdots + \binom{1}{k} + \binom{1}{k+1} \\
&= \binom{m}{k} + \binom{m-1}{k} + \binom{m-2}{k} + \cdots + \binom{1}{k} + \binom{0}{k} + \binom{0}{k+1}.
\end{aligned}$$

ដោយសារតែ $k \geq 0$, យើងដឹងថា $k+1 > 0$, និងដូច្នេះ $\binom{0}{k+1} = 0$. នោះ

$$\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m-1}{k} + \cdots + \binom{0}{k} = \sum_{0 \leq n \leq m} \binom{n}{k}.$$

$\square$

ដំណោះស្រាយ17:លំហាត់នេះអាចត្រូវបានបង្ហាញដោយត្រង់ដោយអនុវត្តន៍ឯកត្តាសម្គាល់វ៉ាន់ឌឺម៉ុន ដែលផ្តល់ឲ្យទំព័រ274។ជំនួស $s = n - r$, $m = 0$ និង $n = k$ វ៉ាន់ឌើម៉ុនសម្គាល់គេបាន៖

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} \binom{r}{0+j}\binom{n-r}{k-j} = \binom{r+(n-r)}{0+k}$$

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} \binom{r}{j}\binom{n-r}{k-j} = \binom{n}{k}. \tag{7.13}$$

ពេល $\binom{r}{j} = 0$ គ្រប់ $j < 0$, (7.13) ត្រូវបានសរសេរដូចជា

$$\binom{n}{k} = \sum_{0 \leq j} \binom{r}{j}\binom{n-r}{k-j}.$$

$\square$

ដំណោះស្រាយ 18: នៅផ្នែកខាងឆ្វេងនៃសមីការគឺឲ្យ:

$$a_0\binom{n}{0} + a_1\binom{n}{1} + \cdots + a_k\binom{n}{k} + \cdots\cdots \tag{7.14}$$

នៅលើលំហាត់នេះយើងសួរ: គ្រប់ $k \geq 0$, តើអ្វីជា a_k ដូច្នេះ, (7.14) គឺស្មើនឹង

$\binom{n+3}{j}$, ដែល j ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានថេរ។ ដោយប្រើប្រាស់រូបមន្តផលបូកយើងបាន៖

$$\begin{aligned}\binom{n+3}{j} &= \binom{n+2}{j-1} + \binom{n+2}{j} \\ &= \binom{n+1}{j-2} + \binom{n+1}{j-1} + \binom{n+1}{j-1} + \binom{n+1}{j} \\ &= \binom{n+1}{j-2} + 2\binom{n+1}{j-1} + \binom{n+1}{j} \\ &= \binom{n}{j-3} + \binom{n}{j-2} + 2(\binom{n}{j-2} + \binom{n}{j-1}) + \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \\ &= \binom{n}{j-3} + 3\binom{n}{j-2} + 3\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}.\end{aligned}$$

ៈយើងពិនិត្យឃើញថាតួនីមួយៗនៅក្នុងការបង្ហាញខាងលើនេះក្លាយជាសន្ទស្សន៍ដូចនេះ

$$a_{j-3}\binom{n}{j-3} + a_{j-2}\binom{n}{j-2} + a_{j-1}\binom{n}{j-1} + a_j\binom{n}{j} = \sum_{j-3\le k\le j} a_k\binom{n}{k}, \tag{7.15}$$

ដែល, $a_{j-3}=1$, $a_{j-2}=3$, $a_{j-1}=3$, $a_j=1$. យើងថែមទាំងកត់សម្គាល់ថា 1,3,3,1 គឺស្ថិតនៅក្នុងលំនាំគំរូនៃត្រីកោណប៉ាស្កាល់នាំឲ្យ,

$$a_{j-3} = \binom{3}{0},\ a_{j-2} = \binom{3}{1},\ a_{j-1} = \binom{3}{2},\ a_j = \binom{3}{3}.$$

អនុញ្ញាតធ្វើវាឲ្យច្បាស់,

$$a_{j-3} = \binom{3}{(j-3)-j+3}, a_{j-2} = \binom{3}{(j-2)-j+3}, a_{j-1} = \binom{3}{(j-1)-j+3}, a_j = \binom{3}{j-j+3}.$$

ដូច្នេះ យើងអាចសន្និដ្ឋានថាដែល $j-3\le k\le j$,

$$a_k = \binom{3}{k-j+3}.$$

ពេលដែល $k < j-3$ or $k > j$, $a_k = \mathrm{t}\binom{3}{k-j+3} = 0$, យើងអាចពង្រីក (7.15) ទៅគ្រប់ k,នោះ

$$\sum_{0\le k} a_k\binom{n}{k} = \binom{n+3}{j}, \text{ ដែល } a_k = \binom{3}{k-j+3}.$$

□

ដំណោះស្រាយ 19: យើងមានវិធីសាស្ត្រពីរដើម្បីស្រាយថាចំពោះ $-1 < x < 1$,

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots\cdots$$

វិធីសាស្ត្រទី១៖ តាង $u=-x^2$។ដោយប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីបទទ្វេធាយើងបាន:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2} &= (1+u)^{-1}\\ &= 1+\binom{-1}{1}u^1+\binom{-1}{2}u^2+\cdots\\ &= 1-u^1+u^2-u^3+u^4+\cdots\\ &= 1-(-x^2)^1+(-x^2)^2-(-x^2)^3+\cdots\\ &= 1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots\cdots\end{aligned}$$

□

វិធីសាស្ត្រទី២៖ យើងមាន $1-x^2=(1+x)(1-x)$, និង

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right).$$

តាមទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= (1-x)^{-1}\\ &= 1+\binom{-1}{1}(-x)^1+\binom{-1}{2}(-x)^2+\cdots\\ &= 1+x+x^2+x^3+x^4\cdots\end{aligned}\tag{7.16}$$

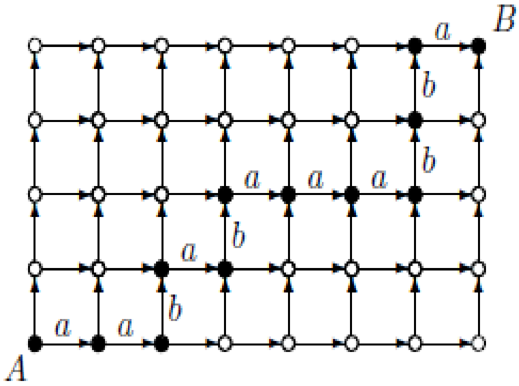
$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= (1+x)^{-1}\\ &= 1+\binom{-1}{1}x^1+\binom{-1}{2}x^2+\cdots\\ &= 1-x+x^2-x^3+x^4\cdots\end{aligned}\tag{7.17}$$

ដូច្នេះ,

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{(7.16)+(7.17)}{2}=1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots\cdots$$

□

ដំណោះស្រាយ20: ពិនិត្យមើលតួលេខដូចខាងក្រោមនេះ



ឧបមាថាយើងចង់ប្តូរពីAទៅB,ដែលBគឺមានយ៉ាងហោចណាស់7ប្លុកនិងមាន4ប្លុកនៅខាងលើ (ជើង)ពីA,និងយើងត្រូវបានអនុញ្ញាតសូមផ្លាស់ប្តូរតែផ្នែកខាងជើង(លើ)ឬខាងកើត(ឆ្វេង) ប៉ុណ្ណោះ។

សូមអនុញ្ញាតប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រចំនួន២ផ្សេងគ្នាដើម្បីបង្ហាញពីលំហាត់។

វិធីសាស្ត្រទី១៖តាង"a"សម្គាល់មួយផ្លាស់ប្តូរឆ្ពោះទៅទិសខាងកើតនិង"b"សម្គាល់មួយផ្លាស់ប្តូរទៅទិសខាងជើង។ជាជាក់ស្តែងយើងត្រូវធ្វើវាឲ្យច្បាស់លាស់៧ផ្លាស់ប្តូរទៅផ្នែកខាងកើតនិង ៤ប្តូរឆ្ពោះទៅផ្នែកខាងជើងឈានមកដល់BចេញពីA។ឧទារណ៍,បើយើងធ្វើដំណើរឆ្លងកាត់តាមចំណុចខ្មៅតូចៗទាំងនោះនៅក្នុងរូបភាពឈានដល់B ចេញពី A,ផ្លាស់ប្តូរតាមលំដាប់លំដោយយើងគួរអាចធ្វើ

$$a \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot a. \tag{7.18}$$

បើយើងចាប់យកលំដាប់ខុសគ្នាទាំងនោះនៃaនិងbយើងនិងបានផ្នែកផ្សេងទៀតចំពោះB។ដូចនេះ,ចំនួននៃរបៀបផ្សេងគ្នាពីA ទៅB គឺជាចំនួននៃចម្លាស់ផ្សេងគ្នានៃខ្សែដែលបានបង្ហាញក្នុង (7.18)។នោះគឺ

$$\frac{(4+7)!}{4!7!} = \binom{4+7}{4} = \binom{4+7}{7}.$$

ជាទូទៅបើទិសដៅគឺmប្លុកទៅទិសខាងកើតនិងnប្លុកទៅទិសខាងជើងនោះយើងត្រូវការខ្សែតនៃm +nដែលមានmឆ្ពោះទៅទិសខាងកើតនិងnប្តូរឆ្ពោះទៅទិសខាងជើង។ចំនួននៃរបៀបខុសគ្នាចេញពី A ទៅ B ជាចំនួននៃស្ទីតដូចដែលអាចធ្វើបាននោះគឺជាចម្លាស់នៃវត្ថុm+nជាមួយដែលទីនេះគឺវត្ថុm នៃប្រភេទដូចគ្នា(a) និងវត្ថុ n នៃប្រភេទ ("b")ចំនួនគឺត្រូវបាន

$$\frac{(m+n)!}{n!m!} = \binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}.$$

$\square$

ជំពូកទី៨.ទំនាក់ទំនងកំណើននៃអនុគមន៍បន្ត

គំនិតដែលនៅពីក្រោយការបង្កើតនិងការហៅឡើងវិញគឺមានការទាក់ទងគ្នា ដូចយើងបានឃើញនៅក្នុងឧទាហរណ៍ជំពូក៣ គណិតវិទ្យាមានឧទាហរណ៍ជាច្រើនមកបង្ហាញថា លក្ខណៈសម្បត្តិនៃមុខងារឬសំណុំដែលត្រូវបានដកហូតវិញអាចត្រូវបានបង្ហាញដោយគណិតវិទ្យា។

នៅក្នុងការសិក្សាអំពីគណិតវិទ្យាមូលដ្ឋាន ការកើតឡើងវិញនិងអាចគណនាបានមានអត្ថន័យដូចគ្នានោះគឺមុខងារ f អាចកើតឡើងម្តងទៀតបានបដិសេធប្រសិនបើនិងប្រសិនបើអេហ្វអាចត្រូវបានគណនាដោយកម្មវិធី។

ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយគ្រាន់តែត្រូវបានគេគណនា (ត្រូវបានគេអះអាងឡើងវិញ) មិនមានន័យថាច្រើនពេកនៅក្នុងន័យនៃភាពស៊ីចង្វាក់គ្នា ។ ប្រសិនបើអាចទៅរួចយើងចង់បានមុខងារសំណុំបែបបទបិទដូច្នេះយើងអាចគណនាវាបានស្រួលឧទាហរណ៍យើងតែងតែប្រើ $n(n+1)=2$ ជាងវិធីហៅខ្លួនឯងដើម្បីគណនាផលបូកនៃ n ដំបូងនៃលេខ ។

រូបមន្តដែលធ្វើឱ្យខូចមុខងារដដែលៗហៅថា"ទំនាក់ទំនងកើតឡើងវិញ"ការដោះស្រាយសមីការកើតឡើងដដែលៗមានន័យថាផ្តល់ភាពជិតស្និទ្ធ ទម្រង់នៃមុខងារដែលបានកំណត់ដោយសមីការកើតឡើងដដែលៗ ។ ក្នុងជំពូកនេះយើងសង្កត់ធ្ងន់លើវិធីដោះស្រាយសមីការដែលកើតឡើងដដែលៗឧទាហរណ៍មួយចំនួនត្រូវបានផ្តល់ជូនដើម្បីបង្ហាញពីមូលហេតុដែលដំណោះស្រាយសមីការកើតឡើងវិញនៃបញ្ហាដែលបានផ្តល់ឱ្យគឺល្អជាង ។

វិធីសាស្ត្រខ្លះសមស្របសម្រាប់ការដោះស្រាយសមីការកើតឡើងដដែលៗប៉ុន្តែមិនមានវិធីសាស្ត្រសកលដើម្បីដោះស្រាយសមីការកើតឡើងដដែលៗទេ ។ ជាធម្មតាយើងត្រូវសិក្សាវិធីសាស្ត្រផ្សេងៗដើម្បីផ្តល់ជូននូវដំណោះស្រាយរបស់សមីការ ។

ប្រភេទនៃសមីការកើតឡើងដដែលៗមានមុខងារបង្កើត គឺជាមុខវិជ្ជាសំខាន់មួយនៅក្នុងគណិតវិទ្យាជាមួយអនុវត្តនៅក្នុងតំបន់ចម្រុះជាច្រើនដោយមិនគិតច្រើនពេកលើលក្ខណៈសម្បត្តិការបង្កើតអនុគមន៍យើងប្រើវាជាឧបករណ៍ដើម្បីដោះស្រាយទំនាក់ទំនងកើតឡើងដដែលៗ ។

8.1 ទំនាក់ទំនងកើតឡើងវិញ

សមីការកើតឡើងដដែលៗទាក់ទងនឹងតម្លៃ a_n នៃលំដាប់នៅក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃមួយចំនួន ឬទាំងអស់នៃ

ទាំងអស់នៃតម្លៃអតីតកាលរបស់ខ្លួន $, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$ នៅក្នុងទម្រង់ទូទៅបំផុតកើតឡើង ដដែលៗ ។

សមីការត្រូវបានកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0),$$

ដែល f ជាមុខងារដែលបានផ្តល់។ ខាងក្រោមនេះគឺជាឧទាហរណ៍ពីទំនាក់ទំនង នៃការកើតឡើងដដែលៗ

ឧទាហរណ៍ 8.1៖ $a_1 = 2,\ \ a_n = 4a_{n-1} - 2, \forall n \geq 2$

ឧទាហរណ៍ 8.2៖ $a_1 = 2, a_2 = 7, a_n = a^2{}_{n-1} + 2a_{n-2}, \forall n \geq 3$

ឧទាហរណ៍ 8.3៖ $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1,\ a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_{n-3}, \forall n \geq 4$

សមីការកើតឡើងដដែលៗត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាសមីការផ្សេង។ សមីការការកើតឡើងវិញមានតម្លៃមិនត្រឹមតែគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រកុំព្យូទ័រប៉ុណ្ណោះទេ ប៉ុន្តែក៏មានផងដែរមានវិន័យជាច្រើនទៀត ។ ក្នុងជំពូកនេះគោលដៅរបស់យើងគឺផ្តល់ដំណោះស្រាយជាក់លាក់មួយ សមីការកើតឡើងដដែលៗហើយសំខាន់ជាងនេះទៀតដើម្បីស្វែងយល់ពីគណិតវិទ្យាគន្លឹះ គំនិតដែលនាំឱ្យមានដំណោះស្រាយរបស់ពួកគេ ។សូមចាំថាពេលខ្លះវាជាការធម្មតាដើម្បីពិពណ៌នា ដំណោះស្រាយនៃបញ្ហាទាក់ទងនឹងសមីការកើតឡើងដដែលៗ ។លំនាំតាមឧទាហរណ៍បង្ហាញពីចំណុចនេះ។

ឧទាហរណ៍ ក្រុមហ៊ុនជួលរថយន្តជាតិអនុញ្ញាតឱ្យអតិថិជនជួលផ្លូវតែមួយពីទីក្រុងមួយទៅទីក្រុងមួយទៀត ។ ក្នុងមួយខែ ៗ វាបញ្ជាក់ថាមួយភាគនៃឡាននោះ ចាប់ផ្តើមខែនៅក្នុងទីក្រុងញូវយ៉កបញ្ចប់វានៅវ៉ាស៊ីនតោនឌីស៊ី និងមួយភាគប្រាំមួយនៃរថយន្តដែលចាប់ផ្តើមខែនៅទីក្រុងវ៉ាស៊ីនតោនឌីស៊ីបញ្ចប់វានៅទីក្រុងញូវយ៉ក ។ ប្រសិនបើសារពើភ័ណ្ឌដំបូងនៅក្នុងទីក្រុងនីមួយៗមានឡាន ១០០០ សូមរៀបរាប់ពីស្ថានភាពបន្ទាប់ពី n ខែ។ ដំណោះស្រាយនៃបញ្ហានេះគឺទទួលបានយ៉ាងងាយស្រួលបំផុតទាក់ទងនឹងការកើតឡើងវិញសមីការ ។ ប្រសិនបើ N_n និង W_n បញ្ជាក់ពីចំនួនរថយន្តនៅដើមខែទី ២ នៅទីក្រុងញូវយ៉កនិងវ៉ាស៊ីនតោនឌីស៊ី ។ បន្ទាប់មកចំនួនរថយន្តនៅដើមខែ n +1 ខែបំពេញចិត្ត៖

$$N_{n+1} = \frac{4}{5}N_n + \frac{1}{6}W_n$$
$$W_{n+1} = \frac{1}{5}N_n + \frac{5}{6}W_n,$$

នៅកន្លែងដែល $N_0 = W_0 = 1000$ វាជាការសង្កេតងាយស្រួលមួយដែលថាតំលៃរបស់ N_n និង W_n អាចទទួលបានសម្រាប់ n = 1,2….. ពីសមីការទាំងនេះ សំខាន់មួយទៀត ការធ្វើលំហាត់ប្រាណគឺដើម្បីសិក្សាពីឥរិយាបថរបស់អិននិងអិននៅពេលដែល n កាន់តែធំ ។ ឧទាហរណ៍ខាងក្រោមបង្ហាញថាការប្រើទំនាក់ទំនងកើតឡើងពេលខ្លះអាចផ្តល់ឱ្យយើងនូវវិធីងាយស្រួលក្នុងការយល់និងដោះស្រាយ បញ្ហាមួយចំនួន។

ឧទាហរណ៍ រកចំនួនភាគថាសផ្សេងគ្នានៃសំណុំទំហំ n ទៅ k នាំឱ្យ $A = \{ a_1; a_2, \ldots . a_n\}$។ ការគិតមួយភ្លែតបង្ហាញថាចង់បានចំនួនគឺមិនងាយស្រួលក្នុងការទទួលបាន; មានវិធីច្រើនណាស់ដែលយើងអាច

ដាក់ធាតុ n នៅក្នុងសំណុំរង k ។ ទោះយ៉ាងណាសមីការដែលកើតឡើងដដែលៗមិនមែនជាការស្ថាបនាទេ។ តោះ Sn; k បង្ហាញលេខដែលចង់បានពោលគឺចំនួនភាគថាស A ចូលទៅក្នុងប្លុក k ។

បន្ទាប់មក $S_{n+1,k+1} = S_{n,k} + (k+1)S_{n,k+1}$

ហេតុអ្វី ? ការពន្យល់ដ៏សាមញ្ញធ្វើតាម។ នាំអោយ B = A អ្នកគាំទ្រ + 1g ហើយយើងចង់ទទួលបានចំណែកនៃ B ចូលទៅក្នុងប្លុក (k + 1) ។ មានលទ្ធភាពពីរ ។

ករណីទី 1៖ ពិចារណាលើភាគថាសនៃប្លុក A ក្នុង (k + 1) ហើយដាក់ +1 ក្នុងផ្នែកមួយណាមួយនៃប្លុក។

ដោយសារមាន Sn; k + 1 ចំណែកផ្សេងគ្នារបស់ A ចូលទៅក្នុង (k + 1)ប្លុកនិង + 1 អាចត្រូវបានដាក់នៅក្នុងមួយក្នុងចំណោមពួកគេដែលជាចំនួនសរុបនៃ

វិធីធ្វើគឺ (k + 1) ;Sn; k +1 ។

ករណីទី 2 ៖ ពិចារណាលើភាគណាមួយនៃ A ក្នុងប្លុក k និងបន្ថែមទៅវា កំណត់ { a_n + 1 } 16/5000

ដូច្នេះ $S_{n,k}$ វិធីដើម្បីទទួលបានភាគថាសខុសគ្នា ។

សមីការយុត្តិសាស្ត្រ (8.1) លើសពីនេះទៀតវាងាយស្រួលក្នុងការផ្ទៀងផ្ទាត់ថា

Sn ,1 = Sn; n = 1 សម្រាប់ n > 1 ។

វាមិនអាចទៅរួចទេក្នុងការបិទសំណុំបែបបទបិទសម្រាប់ S_n, k ប៉ុន្តែច្បាស់ យើងអាចថតចម្លងឯកសារតម្លៃនៃ $S_{n,k}$ ដោយប្រើសមីការ (8.1) ។

ឧទាហរណ៍ :

$$S_{3,k} = S_{2,k} + 2S_{2,2} = 3,$$
$$S_{4,2} = S_{3,1} + 2S_{3,2} = 1 + 2\times 3 = 7,$$
$$S_{4,3} = S_{3,2} + 3S_{3,3} = 3 + 3 = 6,$$

វិធីសាស្ត្រមួយដែលមានលក្ខណៈជាប្រព័ន្ធសម្រាប់ដោះស្រាយសមីការកើតឡើងវិញគឺ ស្រដៀងនឹងឯកសារនិតិវិធីដំណោះស្រាយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល និស្សិតដែលធ្លាប់ស្គាល់ពីមុន

មិនគួរមានការភ្ញាក់ផ្អើលទេដែលសមីការឌីសាញគឺជាកំណែខុសគ្នានៃសមីការឌីជីថល។

8.1.1 និយមន័យ

និយមន័យ សមីការកើតឡើងដដែលៗសំរាប់មួយត្រូវបានគេហៅថាលីនេអ៊ែរប្រសិនបើអាចសរសេរបានជាមុខងារលីនេអ៊ែរនៃគុណតម្លៃអតីតកាលរបស់វា ។

ឧទាហរណ៍ ខាងលើគឺជាសមីការកើតឡើងដដែលៗលីនេអ៊ែរចំណែកឯឧទាហរណ៍ 8.2 គឺសមីការកើតឡើងដដែលៗដែលមិនមែនជាលីនេអ៊ែរព្រោះមួយគឺជាមុខងារមិនមែនលីនេអ៊ែរនៃ a_{n-1}

និយមន័យ លំដាប់នៃសមីការកើតឡើងដដែលៗលីនេអ៊ែរគឺ k ប្រសិនបើមួយជាលីនេអ៊ែរ

មុខងាររបស់ k គុណតម្លៃពីមុន a_{n-1}, a_{n-2} ក្នុងករណីខ្លះអតីតកាលទាំងអស់តម្លៃប្រហែលជាមិនមាននៅខាងឆ្វេងទេ ។ សម្រាប់ហេតុផលនេះលំដាប់នៃសមីការកើតឡើងដដែលៗត្រូវបានគេចាត់ទុកថាជាភាពខុសគ្នារវាងធំបំផុតនិងអក្សរតូចក្រោមតូចបំផុតនៃសមីការ ។

ឧទាហរណ៍ ខាងលើគឺជាសមីការកើតឡើងដដែលៗលីនេអ៊ែរនៃលំដាប់ទី 1 ។

ឧទាហរណ៍ សមីការកើតឡើងដដែលៗលីនេអ៊ែរគឺជាលំដាប់ទី ៣ ។

និយមន័យ សមីការកើតឡើងដដែលៗលីនេអ៊ែរមានមេគុណថេរនៃអតិថិជនកោណនៃ $a_{n-1,}a_{n-2}$ គឺថេរទាំងអស់ពោលគឺមិនពឹងផ្អែកលើឯកសារសន្ទស្សន៍ $n, n-1$។ ល។

ឧទាហរណ៍សមីការកើតឡើងដដែលៗក្នុងឧទាហរណ៍8.3មានមេគុណថេរខណៈដែលសមីការកើតឡើងដដែលៗ មិនពេញចិត្តទេ លក្ខណៈវិនិច្ឆ័យ ល្អិតល្អន់ជានិច្ច ។

ក្នុងជំពូកនេះយើងផ្តោតការយកចិត្តទុកដាក់របស់យើងចំពោះសមីការកើតឡើងដដែលៗលីនេអ៊ែរមេគុណថេរនៃការបញ្ជាទិញ 1និង 2 ។

និយមន័យ សមីការកើតឡើងដដែលៗលីនេអ៊ែរត្រូវបានគេហៅថាភាពដូចគ្នាប្រសិនបើមួយមុខងារលីនេអ៊ែរនៃគុណតម្លៃអតីតកាល តែនិងមិនមានលក្ខខ័ណ្ឌបន្ថែមផ្សេងទៀត បើមិនដូច្នោះទេវាមិនអូម៉ូសែន ។

ឧទាហរណ៍ ខាងលើគឺជាសមីការកើតឡើងដដែលៗជាលីនេអ៊ែរមិនមែនជាអ័រមេនហ្សេណេសនិងសមីការកើតឡើងដដែលៗក្នុងឧទាហរណ៍ ៨.៣គឺជាការកើតឡើងដដែលៗលីនេអ៊ែរដូចគ្នាសមីការ ។

សមីការកើតឡើងដដែលៗលីនេអ៊ែរមិនមែនជាផ្នែកមានពីរផ្នែក មិនអូម៉ូសែនសមាសភាគ នៃ $f(n)$ និងសមីការដែលនៅសល់ហៅថា សមាសធាតុដូចគ្នា ។

ក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើផ្នែកដែលមានលក្ខណៈដូចគ្នាគឺ $a_n = 4a_{n-1}$ និងសមាសធាតុមិនអូម៉ូសែន គឺ $f(n) = -2$

និយមន័យ ដំណោះស្រាយនៃសមីការដែលកើតឡើងដដែលៗជាលីនេអ៊ែរដែលត្រូវបានគេហៅថាអាដំណោះស្រាយទូទៅ ។ វាមានពីរផ្នែកដែលជាផ្នែកមួយដែលទទួលបានពីព្រះគម្ពីរមរមនផ្នែកដូចគ្នានិងផ្នែកទីពីររួមវិភាគទានដោយ វាមិនមែនជាអូម៉ូសែន សមាសភាគ $f\ (n)$ ដំណោះស្រាយទូទៅនេះត្រូវតែ

បំពេញនូវសំណុំដំបូងលក្ខខណ្ឌដំណោះស្រាយដែលទទួលបាននៅក្នុងការដឹងថាជាដំណោះស្រាយពិសេស ។

8.2 ការដោះស្រាយបញ្ហាទំនាក់ទំនងដដូចគ្នា

ដំណោះស្រាយនៃសមីការដែលកើតឡើងម្តងទៀត អាចទទួលបានដោយវិធីសាស្រ្តជាច្រើនពីនាក់ដែលពេញនិយម នៅពេលសមីការកើតឡើងដដែលៗនៃលំដាប់ ១ វាគឺជាការងាយស្រួលក្នុងការទទួលបានដំណោះស្រាយរបស់វា ដោយវិធីនៃការជំនួសម្តងហើយម្តងទៀត។ វិធីសាស្រ្តទីពីរគឺប្រហាក់ប្រហែលនឹងនីតិវិធីនៃដំណោះស្រាយដែលត្រូវបានប្រើដើម្បីដោះស្រាយ សមីការ ឌីផេរ៉ង់ស្យែល និងវិធីសាស្រ្តទីបីគឺតាមរយៈការបង្កើត មុខងារ ទាំងអស់វិធីសាស្រ្តមានគុណសម្បត្តិខុសគ្នា ។

8.2.1 វិធីសាស្រ្តជំនួសការធ្វើម្តងទៀត

វិធីសាស្រ្តនេះត្រូវបានគេហៅថាវិធីសាស្រ្តនៃការបង្កើតឡើងវិញ។ក្នុងនាមជាឈ្មោះនៃការធ្វើម្តងទៀតនេះវិធីសាស្រ្តជំនួសបង្ហាញថាគំនិតគឺដើម្បីៈ

1.ជំនួសតម្លៃនៃ a_{n-1} នៅក្នុងសមីការឡើងវិញនោះនាំឲ្យ តម្លៃនៃ a_{n-2} បន្ទាប់មកតម្លៃនៃ a_{n-3} ។ល។ តម្លៃនេះត្រូវបានពិនិត្យពីសមីការឡើងវិញដោយជំនួស n ដោយ $n-1, n-2$ ។ល។នៅក្នុងការកំណត់សមីការ។

2.ប៉ាន់ស្មានចម្លើយនៃសមីការឡើងវិញពីការពិនិត្យខាងលើនេះ។

3.លទ្ធផលនៃការប៉ាន់ស្មានចម្លើយដោយអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា។

វិចារៈ វិធីសាស្រ្តការជំនួសឡើងវិញ ធ្វើការងារបានល្អចំពោះសមីការបន្ទាត់លំដាប់ទីមួយនិង អាច ឬមិនអាចសម្រាប់សមីការលំដាប់ទី២។ជាលទ្ធផលអាចពិនិត្យចំពោះករណីមេគុណនៅក្នុងសមីការលីនេអ៊ែរគឺមិនមែនជាចំនួនថេរ។ឧទាហរណ៍8.6ចំពោះ

$$n \in \mathbb{N}^0,$$

$$f(n) = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 3 + 2f(n-1), & n \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(n) &= 3 + 2f(n-1) \\ &= 3 + 2(3 + 2f(n-2)) \\ &= 3 \times (1+2) + 2^2 f(n-2) \\ &= 3 \times (1+2) + 2^2 \left(3 + 2f(n-3)\right) \\ &= 3 \times \left(1 + 2 + 2^2\right) + 2^3 f(n-3) \\ &= \ldots\ldots \\ &= 3 \times \left(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}\right) + 2^n f(0) \\ &= 3 \times \left(2^n - 1\right) + 2^{n+1} \\ &= 5 \times 2^n - 3. \end{aligned}$$

ដូច្នេះ សម្រាប់ $\forall n \in \{0,1,2....\},\ f(n) = 5\times 2^n - 3.$

តើជាចម្លើយខាងលើនេះវាបានត្រឹមត្រូវឬទេ ?ការផ្ទៀងផ្ទាត់អាចធ្វើឡើងដោយប្រើអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា យើងនឹងមានវានៅផ្នែលំហាត់។

ពិចារះ គួរតែប្រៀបធៀបពីភាពខុសគ្នារវាងឧទាហរណ៍8.6តំណាងសមីការកើតឡើងវិញនិងឧទាហរណ៍ពីមុន។សម្គាល់ a_n និង $f(n)$ មានន័យដូចតែគ្នា។

8.2.2 វិធីសាស្ត្រពីលក្ខណៈឬសនៃសមីការ

ការបង្ហាញសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរមិនអូម៉ូសែនជាមួយមេគុណថេរ។វិធីសាស្ត្រនេះមានលក្ខណៈអំណោយផលចំពោះការបង្ហាញនូវរាល់ដំណោះស្រាយសមីការលីនេអ៊ែរឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១ឬទី២មិនអូម៉ូសែន។ជាទ្រឹស្តីបទយើងអាចប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រនេះដើម្បីបង្ហាញអំពីសមីការផ្សេងៗទៀតដែលមានលំដាប់ខ្ពស់ជាងពីរ ក៏ប៉ុន្តែលំដាប់ខ្ពស់នឹងនាំឱ្យយើងស្គាល់នូវលក្ខណៈឬសសមីការជាច្រើននិងធ្វើឱ្យការងារបេពាក់ព័ន្ធជាច្រើន។

ដំណោះស្រាយជាមួយវិធីសាស្ត្រនេះសង្កេតឃើញថាមានជំហ៊ានជាច្រើន។ជាបឋមយើងគ្រោងជំហ៊ានប្រធានបទនិងបន្ទាប់មកពិពណ៌នាការអនុវត្តរបស់វា។

1.ជំហ៊ានទីមួយគឺដើម្បីផ្លាស់ប្តូរផ្នែកពីសមីការមិនអូម៉ូសែន ដូច្នេះ ការពិនិត្យអនុវត្តសមីការអូម៉ូសែន។

2.ជំហ៊ានទី២ដើម្បីរកចម្លើយសមីការអូម៉ូសែនដោយបរិយាយនៃប្រើប្រាស់វធីសាស្ត្រខាងក្រោមនេះ។ ដូច្នេះ ដំណោះស្រាយបានពិនិត្យឃើញថាមានមេគុណមួយចំនួនដែលមិនដឹងត្រូវបានកំណត់នៅពេលក្រោយបន្ទាប់។

3.ជំហ៊ានទី៣យើងពិនិត្យឃើញថា ដំណោះស្រាយជាប់ទាក់ទងនឹងផ្នែកមិនអូម៉ូសែននិងផ្សំវាជាមួយនឹងផ្នែកអូម៉ូសែន។

4.ជំហ៊ានទីចុងក្រោយ នូវល័ក្ខខ័ណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ ឬ លក្ខខណ្ឌចាំបាច់និង បើចាំបាច់នោះ ជាតំបូងបានយល់ឃើញថាមានតម្លៃខ្លះនៃលំដាប់លំដយពីសមីការនោះ ដែលយើងសង្កេតលើចំនួនថេរមួយចំនួនមិនស្គាល់។

ដំណោះស្រាយកំនើនសមីការអូម៉ូសែន

ដើម្បីភាពងាយស្រួលនៃបទបង្ហាញយើងពិនិត្យឃើញថាសមីការអូម៉ូសែនជាមួយនឹងមេគុណថេរនៃលំដាប់ទីពីរកំណើន។ឧបមាថាយើងចង់រកដំណោះស្រាយនៃ

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

ដែល c_1 និង c_2 គឺមានពីរចំនួនថេរ។ បើ $a_n = r^n$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ នោះនាំត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម៖

$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2}$

ម្យ៉ាងទៀត r គឺជាចម្លើយមួយនៃសមីការកាដ្រាទីក(សមការដឺក្រេទីពីរ) $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ ។ សមីការកាដ្រាទីកនេះគឺត្រូវបានគេស្គាល់ដូចជា **សមីការសម្គាល់** នៃសមីការអូម៉ូសែន។ឧបមាថា r_1 និង r_2 សម្គាល់ថា ឬសចំនួនពីរនៃសមីការសម្គាល់(ដើម្បីភាពងាយស្រួលក្នុងការបង្ហាញយើងមិនពិនិត្យមើលលើករណីពេលឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិក)។ បន្ទាប់មកវាអាចត្រូវបានដោយផ្ទៀងផ្ទាត់ទាំង $a_n = A_1 r_1^n$ និង $a_n = A_2 r_2^n$ គឺជាចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែនដែល A_1 និង A_2 គឺពីរជាចំនួនថេរ។

ជាទូទៅ៖ $a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n$ គឺជាចម្លើយមួយនៃសមីការអូម៉ូសែន។ចម្លើយទូទៅមានតែមួយគត់ទៀមទារឲ្យធ្វើការពិនិត្យផងដែរ។តើវាមានអ្វីកើតឡើងបើចម្លើយទូទៅនៃសមីការបើ $r_1 = r_2$? វាគួរតែគ្មានហេតុផលសម្រាប់ផ្តល់យោបល់ថាចម្លើយដែលទទួលបាននោះគឺ៖ $(A_1 + A_2) r_1^n$ ពីព្រោះថាវាសមមូលទៅនឹងចម្លើយដែលឱ្យដោយឫសមួយនៃសមីការសម្គាល់ ចំណែកឯសមីការក្រាដ្រាទីកមានឫសពីរផ្សេងគ្នា។នៅក្នុងករណីមានឫសពីរនៃសមីការស្មើគ្នានាំឱ្យចម្លើយនៃសមីការលំដាប់ទីពីរគឺ៖ $(A_1 + A_2 n) r_1^n$ សង្ខេប ដើម្បីរកចម្លើយទូទៅនៃ $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$

ជំហ៊ានទី1៖សមីការសម្គាល់មានទម្រង់គឺ៖ $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$

ជំហ៊ានទី2៖ស្វែងរកឫសពីរ r_1 និង r_2 នៃសមីការនេះ។ បើសិនជា៖

1.បើមានឫសពីរផ្សេងគ្នានោះ នាំឱ្យចម្លើយទូទៅគឺ៖ $a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n$

2.បើមានឫស២ស្មើគ្នានាំឱ្យចម្លើយទូទៅគឺ៖ $a_n = (A_1 + A_2 n) r_1^n$

ជំហ៊ានទី3៖មានចំនួនថេរ២ ដែលមិនស្គាល់ A_1 និង A_2 បានកំណត់ដោយលក្ខខណ្ឌតំបូង

ចម្លើយនៃផ្នែកមិនអូម៉ូសែន

នៅក្នុងផ្នែករងយើងពិនិត្យមើលចម្លើយនៃសមីការដែលនាំឱ្យដល់ផ្នែកមិនអូម៉ូសែន។ជាតំបូងយើងពិនិត្យមើលស្ថានភាពងាយៗ ដែលផ្នែកមិនអូម៉ូសែន $f(n)$ គេបាន៖

$$f(n) = a^n p(n),$$

ដែល $p(n)$ គឺជាពហុធាលំដាប់ n ដឺក្រេ e ។ ជាឧទាហរណ៍ $f(n) = 2^n (3n^2 + 4n + 5)$។ ទីនេះ a និង $p(n) = (3n^2 + 4n + 5)$ ។ សម្គាល់ថា៖ $p(n)$ ជាពហុធាលំដាប់ n នៃដឺក្រេ $e = 2$។

សម្រាប់អនុគមន៍ ចម្លើយពិសេសគឺដឹកនាំដោយសមីការសម្គាល់ $(r-a)^{e+1}$ ។ពីព្រោះសមីការសម្គាល់មាន $e+1$ ឬសស្មើនឹងចម្លើយរបស់វាគឺ $(A_1 n^e + A_2 n^{e-1} + \ldots + A_{e+1}) a^n$ ។ម្យ៉ាងទៀត វាអាចទៅរួចដែលថាឫសមួយនៃសមីការសម្គាល់នៃផ្នែកអូម៉ូសែនអាចស្មើនឹង ។សម្រាប់ហេតុផលនេះ ដែលសមីការសម្គាល់ $(r-a)^{e+1}$ គឺផ្សំគ្នាជាមួយសមីការសម្គាល់នៃផ្នែកអូម៉ូសែននៃសមីការកំណើន និងសមីការសម្គាល់ថ្មីបានបរិយាយ ចម្លើយទូទៅនៃលំហាត់។យើងនឹងបង្ហាញវិធីសាស្រ្តដូចខាងក្រោម។យើងស្រាយថា

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + a^n p(n),$$

ដែល $p(n)$ គឺជាពហុធាលំដាប់ n ដឺក្រេ e

បង្កើតសមីការសម្គាល់ផ្នែកអូម៉ូសែន $\left(r^2-c_1r-c_2\right)$ និងបង្កើតសមីការសម្គាល់ផ្នែកមិនអូម៉ូសែន $(r-a)^{e+1}$ ។

បន្សំសមីការសម្គាល់គឺ៖ $a_n = Ar_1^n + Br_2^n + \left(Cn^2+Dn+E\right)a^n$

$$\left(r^2-c_1r-c_2\right)(r-a)^{e+1} = (r-r_1)(r-r_2)(r-a)^{e+1}$$

ដែល r_1 និង r_2 ជាឫសចំនួនពីរ នៃសមីការកាដ្រាទីក $\left(r^2-c_1r-c_2\right)=0$ ។ចម្លើយនៃសមីការកំណើន អាស្រ័យទៅលើតម្លៃនៃ r_1 និង r_2 ។

គ្រប់ករណីទាំងអស់អាចត្រូវបានពិនិត្យមើលខាងក្រោមនេះ។ ដើម្បីមានភាពងាយស្រួលបង្ហាញនោះយើងយក $e=2$ ។

ករណីទី1៖បើ r_1, r_2, a គឺគ្រប់ចំនួនគត់មិនដូចគ្នា ដែលនាំឱ្យដំណោះស្រាយទូទៅគឺ

$$a_n = (A+Bn)r_1^n + \left(Cn^2+Dn+E\right)a^n.$$

ករណីទី2៖បើ $r_1 = r_2, r_1 \neq a,$ ដែលនាំឱ្យដំណោះស្រាយទូទៅគឺ

$$a_n = (A+Bn)r_1^n + \left(Cn^2+Dn+E\right)a^n$$

ករណីទី3៖បើ $r_1 \neq r_2, r_1 = a,$ ដែលនាំឱ្យដំណោះស្រាយទូទៅគឺ

$$a_n = Ar_1^n + \left(Bn^3+Cn^2+Dn+E\right)a^n.$$

ដូចគ្នាដែរបើ $r_1 \neq r_2, r_1 = a,$ ដែលនាំឱ្យដំណោះស្រាយទូទៅគឺ

$$a_n = Ar_2^n + \left(Bn^3+Cn^2+Dn+E\right)a^n.$$

ករណីទី4៖បើ $r_1 = r_2 = a,$ ដែលនាំឱ្យដំណោះស្រាយទូទៅគឺ

$$a_n = \left(An^4+Bn^3+Cn^2+Dn+E\right)a^n.$$

ជាជំហ៊ានចុងក្រោយយើងរកចំនួនប្រាំមេគុណដែលគេមិនដឹងពីតម្លៃប្រាំតំបូងនៃស្វ៊ីត និងដែលជាទូទៅលក្ខខណ្ឌដើមចំនួនពីរ និងតម្លៃច្រើនជាងចំនួនបីនៃស្វ៊ីតត្រូវបានបង្កើតឡើងពីសមីការកំណើន។ ដំណោះស្រាយនៃសមីការកំណើនលំដាប់ទីមួយមិនអូម៉ូសែនត្រូវបានពិនិត្យពិតប្រាកដនៅលក្ខណៈដូចគ្នា ហើយនៅក្នុងករណីនេះសមីការសម្គាល់លំដាប់ទីមួយសមាសភាគអូម៉ូសែនត្រូវបានបង្កើត។

នៅក្នុងស្ថានភាពទូទៅ សមាសភាគមិនអូម៉ូសែនជាច្រើនអាចមានការបង្ហាញច្រើនជាងមួយ។ ឧទាហរណ៍៖ ឧបមាថាសមាសភាគសមីការកំណើនមិនអូម៉ូសែនគឺ៖

$$f_1(n)+f_2(n)=a_1^n p_1(n)+a_2^n p_2(n).$$

នៅក្នុងករណីនេះយើងរកសមីការសម្គាល់ចំនួនពីរ៖ ទីមួយចំពោះ $f_i(n)$ នីមួយៗនិងបន្សំវាជាមួយនឹងផ្នែកអូម៉ូសែនសមីការសម្គាល់។ ចំនួនពហុធាមួយនៃការប៉ាន់ប្រមាណកម្រិតនៅក្នុង n គឺត្រូវបានបង្កើតឡើងវាអាស្រ័យទៅលើចំនួននៃឫសជាធម្មតា។ លទ្ធផលដូចខាងក្រោមនេះគឺត្រូវបានអនុវត្តម្តងទៀតដើម្បីពិនិត្យលើចម្លើយទូទៅមួយដែលចេញពីការបន្សំចូលគ្នានៃសមីការសម្គាល់។

បើឫសមួយដែល, $r*$, នាំឲ្យចំនួនកំណត់របស់វាដើម្បីចម្លើយទូទៅនៃសមីការកំណើននៃសមីការសម្គាល់ដែលមានពហុគុណនៃ m គឺជាពហុធាមួយនៅលើ n លំដាប់ $m-1$ ពហុគុណដោយ $r*^n$ មានន័យថា

$$\left(A_1n^{m-1}+A_2n^{m-2}+\ldots+A_{m-1}n+A_m\right)r*^n$$

យើងនឹងបង្ហាញដំណោះស្រាយខាងលើនេះនៃវិធីសាស្ត្រដោយឧទាហរណ៍មួយចំនួន។

ឧទាហរណ៍ 8.7 ចូលដោះស្រាយសមីការផលដក,

$$a_n=a_{n-1}+n^2, a_0=0.$$

ចម្លើយ៖ សមីការលំដាប់ទី១ផលដកនេះ ជាមួយជាតុផ្សំមិនអូម៉ូសែន $f(n)=n^2$, ដែលត្រូវបានរំលឹក $n^2\cdot 1^n$ ។ ដូច្នេះ $p(n)=n^2$ គឺជាពហុធានៃលំដាប់ពីរនិង $a=1$ ។ ផ្នែកសមីការអូម៉ូសែនកំណើនគឺ $a_n-a_{n-1}=0$ ដែលមានសមីការសម្គាល់គឺ $(r-1)$ និង សមាសភាពផ្សំដើម្បីបង្កើតសមីការសម្គាល់មិនអូម៉ូសែន $(r-1)^3$ ។ ដូចនេះ សមីការសម្គាល់បានបន្សំបញ្ចូលគ្នាគឺ៖

$$(r-1)(r-1)^3=(r-1)^4.$$

នេះជាសមីការសម្គាល់មួយមានឫសស្មើ 1 ជាមួយនឹងពហុគុណ 4។ ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការកំណើនគឺ៖

$$a_n=\left(An^2+Bn^2+C_n+D\right)1^n=An^3+Bn^2+Cn+D.$$

តម្លៃចំនួនបួនតំបូងនៃស្វ៊ីតនោះគឺ៖ $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=5,\ a_3=14$ ដែលនៅក្នុងណោមនោះមានមួយគឺជាលក្ខខណ្ឌដើមតំបូង និងមានច្រើនជាងបីគឺត្រូវបានពិនិត្យចេញពីសមីការកំណើន។
ដោយការប្រើប្រាស់តម្លៃចំនួនបួន យើងអាចរកតម្លៃ A,B,C និង D ។ យើងបង្ហាញប្រព័ន្ធនៃសមីការទាំងបួនខាងក្រោមនេះ៖

$$\begin{aligned}D&=0\\A+B+C+D&=1\\8A+4B+2C+D&=5\\27A+9B+3C+D&=14\end{aligned}$$

ចម្លើយទាំងនោះគឺ៖ $A=\dfrac{1}{3},\ B=\dfrac{1}{2},\ C=\dfrac{1}{6}$ និង $D=0$ ។

ដូច្នេះ ចម្លើយចុងក្រោយនៃសមីការគឺ៖ $a_n=\dfrac{1}{3}n^3+\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{6}n.$

ឧទាហរណ៍៖ បង្ហាញថា៖ $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}+2^n+n^2,\ a_0=1, a_1=2.$

ដំណោះស្រាយ៖ សមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ទីពីរផលដកមិនអូម៉ូសែន ជាមួយនឹង $f_1(n)=2^n+n^2$ ។ វាអាចពិនិត្យមើលទិដ្ឋភាពនៃអនុគមន៍ចំនួនពីរ $f_1(n)=2^n p_1(n)$, និង $f_2(n)=1^n p_2(n)$,
ដែល $p_1(n)=1$ ជាពហុធាដឺក្រេ 0 និង $p_2(n)=n^2$ គឺជាពហុធាដឺក្រេទី2 ។
សមីការអូម៉ូសែនដែលមានសមីការគោល $\left(r^2-3r+2\right)=(r-1)(r-2)$
និង សមីការសម្គាល់មិនអូម៉ូសែនមាន$(r-2)$ និង $(r-1)^3$ រៀងគ្នា។ដូច្នេះដំណោះស្រាយសមីការកំណើនត្រូវបានពិនិត្យដោយសមីការសម្គាល់គឺ៖

$$(r-2)(r-1)(r-2)(r-1)^3.$$

សមីការនេះមានឬសពីរផ្សេងគ្នាគឺ៖ $r=2$ និង $r=1$ នៃពហុគុណ 2 និង 4 រៀងគ្នា។ ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការសម្គាល់ខាងលើគឺ៖

$$a_n=(An-B)2^n+\left(Cn^3+Dn^2+En+F\right).$$

$A,B,C,D,E,$ និង F ជាបឋមយើងត្រូវបានពិនិត្យលក្ខខណ្ឌទាំងពីរដែល $a_0=1, a_1=2$ និង a_2,a_3,a_4,a_5 ត្រូវបានពិនិត្យសមីការកំណើនដោយការជំនួស $n=2,3,4,5$ រៀងគ្នា។

យើងបង្ហាញប្រព័ន្ធប្រាំមួយសមីការលីនេអ៊ែរ ផ្ទៀងផ្ទាត់ដោយការជំនួស $n=1,2,3,4,5,6$ ក្នុងសមីការកំណើននិងពិនិត្យចម្លើយចុងក្រោយ៖

$$a_n=(2n+8)2^n-\left(\frac{1}{3}n^3+\frac{5}{2}n^2+\frac{49}{6}n+7\right).$$

8.2.3 វិធីសាស្ត្រអនុគមន៍បង្ក

នៅក្នុងជំពូកនេះយើងពិនិត្យមើលលក្ខណៈនៃអនុគមន៍បង្ក និងពិពណ៌នារបៀបស្វែងរកចម្លើយនៃសមីការផលដក។

និយមន័យ គេមានចំនួននៃស្វ៊ីត $a_0,a_1,a_2,...,a_n,...$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងអនុគមន៍បង្កគឺ៖

$$A(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+...+a_nz^n+...,$$

ដែល z ជាអថេរ។
តាង $A(z)=\sum_{n\geq 0}a_nz^n$, $B(z)=\sum_{n\geq 0}b_nz^n$ និង $C(z)=\sum_{n\geq 0}c_nz^n$. ។យើងមានលក្ខណៈដូចខាងក្រោមនេះ៖

1. $A(z)+B(z)=C(z)$ សមមូល $\forall n\geq 0\left[a_n+b_n=c_n\right]$.
2. $A(z)\times B(z)=C(z)$ សមមូល $\forall n\geq 0,\left[c_n=\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot b_{n-i}\right]$.

សារៈប្រយោជន៍ខ្លះៗនៃស៊េរីស្វ័យគុណ និងទម្រង់បិទរបស់ពួកវា

ការប្រើប្រាស់អនុគមន៍បង្កលំដាប់រៀងគ្នា វាមានសារៈសំខាន់ដើម្បីដឹងសារៈប្រយោជន៍នៃផលបូកមួយចំនួន។នៅខាងក្រោមនេះជាបញ្ជីនៃសារៈប្រយោជន៍មួយចំនួនស៊េរីស្វ័យគុណ និងទម្រង់បិទរបស់វា។ ម្យ៉ាង

ទៀតវាអាចទាក់ទង់នឹងសៀវភៅគណនាសម្រាប់សម្រាយបញ្ជាក់របស់ពួកវា។តាង r គឺជាចំនួនពិតណាមួយ និង n គឺជាចំនួនគត់ធម្មជាតិតូច ។

$$\frac{1}{(1-sz)} = \sum_{0\le i} s^i z^i$$

$$\frac{1}{(1-sz)^2} = \sum_{0\le i} (i+1) s^i z^i$$

$$(1+sz)^n = \sum_{0\le i\le n} \binom{n}{i} s^i z^i$$

$$\frac{1}{(1+sz)^n} = \sum_{0\le i} \binom{-n}{i} s^i z^i$$

$$\ln(1+sz) = \sum_{1\le i} \frac{(-1)^{i+1}}{i} s^i z^i$$

$$-\ln(1-sz) = \sum_{1\le i} \frac{1}{i} s^i z^i$$

$$e^{sz} = \sum_{0\le i} \frac{1}{i!} s$$

ការភ្ជាប់រវាងចន្លោះទម្រង់បិទនៃស៊េរីស្វ័យគុណ អនុគមន៍បង្កូ និងទំនាក់ទំនងកំនើនអាចត្រូវបានពិនិត្យឃើញនៅក្នុងទាហរណ៍ខាងក្រោមនេះ។

អនុគមន៍កំនើនប្រើប្រាស់ដើម្បីបង្ហាញសមីការកំនើន

នៅក្នុងការសង្ខេប ជំហ៊ានគន្លឹះនិងគំនិតពីក្រោយការប្រើនៃអនុគន៍បង្កដើម្បីបង្ហាញសមីការកំនើនគឺៈ

ជំហ៊ានទី 1ៈសរសេរអនុគមន៍បង្កនៃស្ទីត

ជំហ៊ានទី 2ៈប្រើប្រាស់ទំនាក់ទនងរវាង a_n និង a_{n-1} ។ល។ ផ្លាស់ប្តូរកំនើនចេញពីអនុគមន៍បង្ក ហើយគណនា។

ជំហ៊ានទី 3ៈពន្លាតអនុគមន៍បង្កទទួលបាននៅក្នុងស្វ័យគុណនៃ

ជំហ៊ានទី 4ៈមេគុណសមមូលនៃ z^n នៅក្នុងការបង្ហាញចំនួនផ្សេងគ្នាពីអនុគមន៍បង្កនៃស្ទីតដូចគ្នា

ឧទាហរណ៍ខាងក្រោមនេះពន្យល់ជំហ៊ានខាងលើ។

ឧទាហរណ៍8.9 ចូលពិនិត្យមើលកំនើនៈ

$a_0 = 1$និងគ្រប់ $n \ge 1,\ a_n = 2a_{n-1} + 1.$

នៅជំហ៊ានទីមួយ យើងត្រូវការធ្វើវាទាំងអស់ទាំងអស់នេះដើម្បីសរសេរអនុគមន៍បង្កៈ

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots..$$

បន្ទាប់ដោយសម្លឹងមើលទៅលើកំនើនយើងពិតជាដឹងថាគ្រប់តម្លៃទាំងអស់នៃ កើតឡើងពី $a_n - 2a_{n-1}$ អាចត្រូវបានជំនួសដោយ 1 ។ដើម្បីប្រើប្រាស់លក្ខណៈនេះយើងគុណ $A(z)$ នឹង និង ដកវាចេញពី $A(z)$ មានន័យ ប្រើការរៀបចំដូចខាងក្រោមនេះ។

$$\begin{array}{rl} A(z) =& a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + \quad a_n z^n + \ldots. \\ 2z\, A(z) =& + 2a_0 + 2a_1 z^2 + 2a_3 z^3 + \ldots + 2a_{n-1} z^n + \ldots. \\ \hline (1-2z) A(z) =& a_0 + \ \ 1z + \ 1z^2 + 1z^3 + \ldots + \ \ 1z^n \ \ + \ldots \end{array}$$

យើងមាន

$$(1-2z)A(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots. = \frac{1}{1-z}$$

ពីព្រោះ $a_0 = 1$ ជាលទ្ធផល

$$A(z) = \frac{1}{(1-2z)(1-z)} = \frac{2}{1-2z} + \frac{-1}{1-z}.$$

យើងដឹងថា

$\frac{2}{1-2z} = \sum_{0\le i} 2\cdot 2^i z^i$ និង $\frac{-1}{1-z} = \sum_{0\le i} (-1)\cdot z^i$

$$A(z) = \sum_{0\le i} 2\cdot 2^i z^i + \sum_{0\le i} (-1)\cdot z^i = \sum_{0\le i} \left(2^{i+1} - 1\right) z^i$$

ដូច្នេះ $a_n = 2^{n+1} - 1.$។

ឧទាហរណ៍

នៅក្នុងផ្នែកតូចនេះយើងបង្ហាញពីសមីការកំណើន តាមរយៈបីវិធីសាស្រ្តដែលយើងបានពិភាក្សាខាងលើនេះ។ យើងពិនិត្យសមីការកំណើនខាងក្រោម:

$$a_0 = 1,\ \forall\ n \ge 1, \qquad 2a_{n-1} + 2^n.$$

វិធីសាស្រ្តជំនួស

សមីការកំណើនអាចសរសេរដូចជា $a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + 2^{n-1}$ គ្រប់តម្លៃ,$\forall\ n \ge 1$។ការជំនួស $n-1$ដោយ នាំឲ្យ $a_{n-1} = \frac{1}{2} a_{n-2} + 2^{n-2}$ ។ ដូចនេះ យើងអាច ជនួស n ដោយ $n-2$។

យើងអភិវឌ្ឍការជំនួសនិងគណនាដូចខាងក្រោមនេះ

$$a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + 2^{n-1}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} a_{n-1} + 2^{n-1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} a_{n-2} + 2^{n-2}\right) + 2^{n-1} \quad \text{ដោយការជំនួស} \quad a_{n-1} = \frac{1}{2} a_{n-2} + 2^{n-2} \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2}a_{n-3}+2^{n-3}\right)+\left(2^{n-3}+2^{n-1}\right)$$ ដោយការជំនួស $a_{n-2}=\frac{1}{2}a_{n-3}+2^{n-3}$

$$=\frac{1}{2^3}a_{n-3}+2^{n-5}+2^{n-3}+2^{n-1}$$

$$=\frac{1}{2^k}a_{n-k}+2^{n-2k+1}+\ldots+2^{n-3}+2^{n-1},$$ ប៉ាន់ប្រមាណចម្លើយ

$$\vdots$$

$$=\frac{1}{2^k}a_0+2^{n-2n+1}+\ldots+2^{n-3}+2^{n-1},$$ តាង $k=n$

$$\frac{1}{2^n}+2^{-n+1}+\ldots.+2^{n-3}+2^{n-1} \qquad (a_0=1)$$

$$=\frac{1}{2^n}+\frac{2^{-n+1}-2^{n-1}2^2}{1-2^2}$$ ផលបូកនៃវិវត្តធរណីមាត្រ

$$=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3}\left(2^{n+1}-2^{-n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3}\left(2\cdot 2^n-2\cdot\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}+\frac{2}{3}\cdot 2^n.$$

ដូច្នេះ យើងបានបង្ហាញនូវដំណោះស្រាយនៃអនុគមន៍កំណើនគឺ៖ $=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}+\frac{2}{3}\cdot 2^n.$ ។

វិធីសាស្ត្រលក្ខណៈឬស

នៅពេលដែល $a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+2^{n-1}$ លក្ខណៈពហុធាគឺ៖ $\left(r-\frac{1}{2}\right)(r-2)$ ដែល $\left(r-\frac{1}{2}\right)$ បានចែកដោយផ្នែកអូម៉ូរសែន $a_n-\frac{1}{2}a_{n-1}=0$ និង $(r-2)$ គឺ៖ បានចែកដោយផ្នែកមិនអូម៉ូរសែននឹង 2^n ។

យើងស្គាល់ $a_0=1,\ a_1=\frac{1}{2}a_0+2^0=\frac{3}{2}$ ។ ដូច្នេះ

$a_n=A\left(\frac{1}{2}\right)^n+B\,2^n.$ចម្លើយទូទៅគឺ៖

ដើម្បីគណនាតម្លៃ A និង B យើងត្រូវជំនួស $n=0$ និង $n=1$ នៅក្នុងចម្លើយទូទៅខាងលើ ហើយយើងបានសមីការខាងក្រោមនេះ៖

$$1 = a_0 = A\left(\frac{1}{2}\right)^0 + B\,2^0 = A + B$$

$$\frac{3}{2} = a_1 = A\left(\frac{1}{2}\right)^1 + B\,2^1 = \frac{1}{2}A + 2B$$

យើងបាន៖ $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{2}{3}$ ។ ដូច្នេះ ចម្លើយគឺ៖ $a_n = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}\cdot 2^n$

វិធីសាស្ត្រអនុគមន៍បង្ក

ពិនិត្យអនុគមន៍បង្ក $G(z)$, ដូចខាងក្រោមនេះ

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots. \qquad (8.2)$$

យក $\frac{1}{2}z \times (8.2)$ យើងបាន

$$\frac{1}{2}z \times G(z) = \frac{1}{2}a_0 z + \frac{1}{2}a_1 z^2 + \frac{1}{2}a_2 z^3 + \ldots + \frac{1}{2}a_n z^{n+1} + \ldots. \quad (8.3)$$

យក $(8.2)-(8.3)$, ហើយពេលដែល $a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = 2^{n-1}$ យើងបាន៖

$$\left(1-\frac{1}{2}z\right)G(z) = a_0 + \left(a_1 - \frac{1}{2}a_0\right)z + \left(a_2 - \frac{1}{2}a_1\right)z^2 + \ldots + \left(a_n - \frac{1}{2}a_{n-1}\right)z^n + \ldots.$$

$$= 1 + 2^{1-1}z + 2^{2-1}z^2 + \ldots + 2^{n-1}z^n + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left[2z + (2z)^2 + \ldots + (2z)^n + \ldots\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\frac{2z}{1-2z}$$, ផលបូកនៃមធ្យមធរណីមាត្រ

$$= 1 + \frac{2z}{1-2z}.$$

ដូច្នេះ $$G(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)(1-2z)}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z} + \frac{1}{(2-z)(1-2z)}. \qquad (8.4)$$

ពេលនេះយើង ត្រូវបំលែងតួទីពីរនៅផ្នែកខាងស្តាំនៃសមីការ នៅក្នុងទម្រង់ខាងក្រោមនេះ៖

$$\frac{2z}{(2-z)(1-2z)} = \frac{A}{2-z}+\frac{B}{1-2z}$$
$$= \frac{A-2zA+2B-Bz}{(2-z)(1-2z)}$$
$$= \frac{(A+2B)+(-2A-B)z}{(2-z)(1-2z)}$$

យើងបាន៖ $(A+2B)=0$ និង $(2A+B)=-2$ ហើយបង្ហាញថាសមីការមានឫស $A=-\frac{4}{3}$ និង $B=\frac{2}{3}$ ។ ដូច្នេះ អនុគមន៍បង្ក $G(z)$ គឺ៖

$$G(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z}+\frac{-\frac{4}{3}}{2-z}+\frac{\frac{2}{3}}{1-2z}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z}-\frac{2}{3}\bullet\frac{1}{1-\frac{1}{2}z}+\frac{2}{3}\bullet\frac{1}{1-2z}$$

$$=\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{1-\frac{1}{2}z}+\frac{2}{3}\bullet\frac{1}{1-2z}.$$

ដូច្នេះ ចម្លើយគឺ៖ $a_n=\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}.2^n.$

សម្គាល់ $\mathbb{N}^0=\{0,1,2,3,...\}$, $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, និង $\mathbb{R}$ សំណុំនៃចំនួនពិត។

ចំណោទបញ្ហា

នៅក្នុងលំហាត់ទី1ដល់ទី6 គឺរកទំនាក់ទំនងកំនើន នៅក្នុងតួនីមួយៗនៃតម្លៃពីមុន។ថែមទាំងផ្តល់នូវលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោមនេះ៖

លំហាត់ទី1៖ រកទម្នាក់ទំនងកនើនមួយចំពោះផលបូកនៃតួតំបូង n ជាចំនួនគត់សេសវិជ្ជមានដែលនៅក្នុងតួនីមួយៗនៃផលបូកពីតួតំបូង $(n-1)$ ចំនួនគត់វិជ្ជមានសេស។

លំហាត់ទី2៖ កំណត់ទំនាក់ទំនងកំនើន ចំពោះចំនួនអតិប្បរមានៃភីសារ១ដុំ ដោយបានត្រូវកាត់ជាចំណិត។

លំហាត់ទី3៖ រកទំនាក់ទំនងសម្រាប់ចំនួនរបៀបដើម្បីដាក់ចំនួនកាក់សេន ដងនៅក្នុងការប្រើប្រាស់ម៉ាស៊ីន បានកំណត់ប្រភេទជា ភិនី ណិកកែល ឌីមេស និង មួយភាគបួន។

លំហាត់ទី4៖ រម្លឹកឡើងវិញពីទំនាក់ទំនងមួយដើម្បី បន្សំពី វត្ថុ ដែល: $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r}$ ។កំណត់ទំនាក់ទំនងកំនើនដែលដូចគ្នាចំពោះចម្លាស់ ពី វត្ថុ មានន័យថាសម្រាប់ ។

លំហាត់ទី5៖រកទំនាក់ទំនងកំនើនមួយសម្រាប់ចំនួននៃ លេខស្ទីតគោលពីរដោយមិនរៀងៗគ្នា១។

លំហាត់ទី6៖រកទំនាក់ទំនងកំនើនមួយចំពោះចំនួនអតិប្បរមានៃមែកឈើនៅក្នុងគោលពីរនៃបណ្តោយ ។

លំហាត់ទី7៖ រកទំនាក់ទនងកំនើនមួយសម្រាប់ចំនួននៃរបៀបដើម្បីបំពេញវង់ក្រចកចំពោះការបង្ហាញពី n អថេរ ៖

$x_1+x_2+x_3+...+x_n$. ជាឧទាហរណ៍៖ $((x_1+x_2)+x_3),(x_1+(x_2+x_3))$ គឺមានពីររបៀបប៉ុណ្ណោះដើម្បីបំពេញវង់ក្រចក

$x_1+x_2+x_3$ ។ការដាក់វង់ក្រចកគឺជារបៀបមួយដែលមានសារៈប្រយោជន៍។

ព័ត៌មានណែនាំ៖ ប្រើប្រាស់ដូចខាងក្រោមនេះដូចជាចំនុចចាប់ផ្តើម។

ចំពោះ $x_1+...+x_n=((x_1+...+x_n)+(x_{i+1}+...+x_n))$ ។

ប្រើវិធីសាស្ត្រជំនួសម្តងទៀតចំពោះការស្មានចម្លើយនៃទំនាក់ទំនងកំនើននៅក្នុងលំហាត់ទី8ដល់11 និង ផ្ទៀងផ្ទាត់ភាពត្រឹមត្រូវពីការស្មានរបស់អ្នកតាមអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា។

លំហាត់ទី8៖បង្ហាញទំនាក់ទំនងកំណើនដូចខាងក្រោមនេះ៖ ចំពោះ $n\in\mathbb{N}^0$,

$$f(n)=\begin{cases}2, & n=0\\ 3+f(n-1), & n\geq 1\end{cases}$$

លំហាត់ទី9៖បង្ហាញទំនាក់ទំនងកំណើនខាងក្រោម៖

$$f(n)=\begin{cases}2, & n=0\\ 3f(n-1)+2, & n\geq 1\end{cases}$$

លំហាត់ទី10៖បង្ហាញទំនាក់ទំនងកំណើនខាងក្រោម៖

$$f(n)=\begin{cases}2, & n=0\\ 3f\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil\right), & n\geq 2\end{cases}$$

លំហាត់ទី11៖បង្ហាញទំនាក់ទំនងកំណើនខាងក្រោម៖

$$f(n)=\begin{cases}2, & n=0\\ af\left(\left\lceil\frac{n}{b}\right\rceil\right)+cn, & n\geq 2\end{cases}$$

លំហាត់ទី12៖ប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រឫសនៃសមីការសម្គាល់ដើម្បីបង្ហាញអូម៉ូសែនទំនាក់ទំនងកំណើនខាងក្រោម៖

តាង $f(0)=1, f(1)=-1$ និង សម្រាប់

$$f(n+2)+2f(n+1)-3f(n)=0.$$

លំហាត់ទី13៖តាង គឺជា ចំនួនហ្វីបូណាស៊ី គឺថា $f_0=f_1=1$ និង $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ ចំពោះ $\forall n\geq 2$ ។

យើងរក ដូចខាងក្រោម៖

$$a_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}, \quad \forall n \in \square .$$

គេមានទំនាក់ទំនងកំណើនដើម្បីគណនា និងបង្ហាញពីទំនាក់ទំនង ។

ការណែនាំ៖សង្កេតឃើញថា រួមទៅរក នៅពេលដែល

លំហាត់ទី14៖បង្ហាញទំនាក់ទំនងកំណើនដូចខាងក្រោមនេះ៖

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = -1 \\ a_n - 7a_{n-1} + 12a_{n-2} = 0, \quad \forall n \ge 2 \end{cases}$$

លំហាត់ទី15៖បង្ហាញទំនាក់ទំនងកំណើនដូចខាងក្រោមនេះ៖

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = 1 \\ a_n + 2a_{n-1} - 15a_{n-2} = 0, \quad \forall n \ge 3. \end{cases}$$

លំហាត់ទី16៖បង្ហាញទំនាក់ទំនងកំណើនដូចខាងក្រោមនេះ៖

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_2 = 0 \\ -2a_n + 18a_{n-2} = 0, \quad \forall n \ge 2. \end{cases}$$

លំហាត់ទី17៖បង្ហាញទំនាក់ទំនងកំណើនដូចខាងក្រោមនេះ៖

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_2 = 6 \\ a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0, \quad \forall n \ge 3. \end{cases}$$

លំហាត់ទី18៖បង្ហាញទំនាក់ទំនងកំណើនដូចខាងក្រោមនេះ៖

$$\begin{cases} a_1 = 5, \\ a_2 = -5 \\ a_n + 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0, \quad \forall n \ge 3. \end{cases}$$

លំហាត់ទី19៖បង្ហាញទំនាក់ទំនងកំណើនដូចខាងក្រោមនេះ៖

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 2 \\ a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2n + 1, \quad \forall n \ge 2. \end{cases}$$

លំហាត់ទី20៖បង្ហាញទំនាក់ទំនងកំណើនដូចខាងក្រោមនេះ៖

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = -1, \\ a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = n, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

លំហាត់ទី21៖គេមាន $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 13,$ និង $a_n + ba_{n-1} + ca_{n-2} = 0, \ \forall n \geq 2$ ដែល b និង c ជាចំនួនដែលមិនស្គាល់។ រក a_n ក្នុងទម្រង់បិទ។

លំហាត់ទី22៖គេមាន $a_0 = 0, a_1 = 1$ និង $3a_{n-1} - 10a_{n-1} + 3a_{n-2} = 3^n, \ \forall n \geq 2,$ បង្ហាញសមីការនេះ។

លំហាត់ទី23៖គេមាន $a_0 = 0, a_1 = 1$ និង $5a_n - 6a_{n-1} + 3a_{n-2} = n^2\left(\frac{1}{5}\right)^n, \ \forall n \geq 2,$ បង្ហាញសមីការនេះ។

ជំពូកទី៩.ប្រូបាប៊ីលីតេ

9.1.លំហសំណាក និងព្រឹត្តិការណ៍

9.1.1. និយមន័យ៖ ពិសោធន៍ចៃដន្យ - វិញ្ញាសា

ប្រូបាប គឺជាផលធៀបរវាងករណីស្រប ជាមួយនឹងករណីដែល ព្រឹត្តិការណ៍អាចកើតឡើង។ គេតាងប្រូបាបដោយអក្សរ P ។

P = $\frac{\text{ករណីស្រប}}{\text{ករណីអាច}}$ប្រសិនបើយើងបោះកាក់ ១ ដង យើងនឹងបានព្រឹត្តិការណ៍ពីរ គឺ T;H ។ យើងតាងមុខទី១ជា T និងមុខទី២ជា H។

ដូចនេះ ប្រូបាបនៃការបោះកាក់ខាងលើ H ឬ T ខាងក្រោមគឺ៖ $P(H)=P(T)=\frac{1}{2}$ (មានន័យថាលទ្ធផលមានតែមួយទេ H ឬ T តែករណីដែលអាចមានពីរគឺ H និង T ។

ប្រសិនបើគេកាក់ ២ ដង៖ លើកទី១ គេបានរូប H ហើយលើកទី២ គេបាន T នោះគេបានលទ្ធផល (HT) ។ ក្នុងវិញ្ញាសាបោះកាក់ ១ ចំនួន ២ ដងនេះ គេអាចបានលទ្ធផល ៤ របៀបគឺ÷ S= {(HH), (TT), (HT),(TH)} ជាសំណុំលទ្ធផលដែលអាចកើតឡើងក្នុងវិញ្ញាសាមួយនៃពិសោធន៍ចៃដន្យ ដែលហៅថាលំហសំណាក។

9.1.2. ព្រឹត្តិការណ៍

ព្រឹត្តិការណ៍ គឺសំណុំលទ្ធផលដែលកើតឡើងស្របតាមការចង់បាន។ឧទាហរណ៍៖ ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីក្រហម ១ ខៀវ ១ និង លឿង ១។ គេចាប់យកឃ្លីម្តងមួយដោយចៃដន្យចេញពីថង់ រួចដាក់ក្នុងថង់វិញចំនួន ២ លើក។ គេតាង «ក» ជាឃ្លីពណ៌ក្រហម «ខ» ជាឃ្លីពណ៌ខៀវ និង «ល» ជាឃ្លីពណ៌លឿង។ក្នុងវិញ្ញាសានេះ គេបានលទ្ធផល៖ ÷ S= {(a,b) , ដែល a,b $\in E$} ដែល E={ក,ខ,ល }
សំណុំលទ្ធផលដែលអាចកើតឡើង៩គឺ៖S= {(កក), (ខខ), (លល), (កខ), (ខក), (ខល), (លខ), (កល), (លក)}
(លំហសំណាក), A_4 = {(កខ)} គឺជាព្រឹត្តិការណ៍ «ចាប់បានឃ្លីក្រហមលើកទី១ និងឃ្លីខៀវលើកទី២»។
ដូច្នេះ ព្រឹត្តិការណ៍ គឺ ផ្នែក១ (សំណុំរង) នៃសំណុំលទ្ធផលដែលអាចកើតឡើង (លំហសំណាក)។

9.1.3. ព្រឹត្តិការណ៍សមាស

ព្រឹត្តិការណ៍ គឺផ្នែក១ (សំណុំរង) នៃសំណុំលទ្ធផលដែលអាចកើតឡើង (លំហសំណាក)។ ដូច្នេះ គេអាចប្រើសញ្ញាប្រសព្វ និងប្រជុំ ដើម្បីបង្កើតព្រឹត្តិការណ៍បន្ថែម ដែលជាព្រឹត្តិការណ៍សមាស ហៅថា ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ និង ព្រឹត្តិកាណ៍ផលបូក។
ឧទាហរណ៍៖ ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីក្រហម ១ ខៀវ ១ និង លឿង ១។ គេចាប់យកឃ្លីម្តងមួយដោយចៃដន្យចេញពីថង់ រួចដាក់ក្នុងថង់វិញចំនួន ២ លើក។
ចូរកំណត់លំហសំណាក S និងព្រឹត្តិការណ៍៖
A ៖ «ចាប់បានឃ្លី ២ ពណ៌ខុសគ្នា»
B ៖ «ចាប់បានឃ្លីខៀវនៅលើកទី ១»
C ៖ «ចាប់បានឃ្លី ២ ពណ៌ដូចគ្នា»
D ៖ «ចាប់បានឃ្លីក្រហមនៅលើកទី ១»

យើងបាន៖

S= {(កក), (ខខ), (លល), (កខ), (ខក), (ខល), (លខ), (កល), (លក)}
A = {(កខ), (ខក), (ខល), (លខ), (កល), (លក)}
B = {(ខខ), (ខក), (ខល)}
C = {(កក), (ខខ), (លល)}
D = {(កក), (កខ), (កល)}
ព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B មានលទ្ធផលរួម {(ខក), (ខល)} ដែលជាព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃ A និង B ៖ «**ឃ្លីទាំងពីរពណ៌ខុសគ្នា** និង **ចាប់លើកទី១បានពណ៌ខៀវ**»។
គេសរសេរ៖ $A \cap B$ = {(ខក), (ខល)}

1.**ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ** នៃ A និង B ជាប្រសព្វនៃព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B ។

2. ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក៖

S= {(កក), (ខខ), (លល), (កខ), (ខក), (ខល), (លខ), (កល), (លក)}
A = {(កខ), (ខក), (ខល), (លខ), (កល), (លក)}
B = {(ខខ), (ខក), (ខល)}
ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកនៃ A និង B គឺការប្រមូលផ្តុំគ្រប់លទ្ធផលទាំងអស់នៃព្រឹត្តិការណ៍ A និង ព្រឹត្តិការណ៍ B ៖ «ចាប់ឃ្លីទាំង ២ ពណ៌ខុសគ្នា ឬ ចាប់លើកទី១បានពណ៌ខៀវ»។
គេសរសេរ៖ A ∪ B = {(កខ), (ខក), (ខល), (លខ), (កល), (លក), (ខខ)}
ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកនៃ A និង B ជាប្រជុំនៃព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B ។

3.ព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នា៖

S= {(កក), (ខខ), (លល), (កខ), (ខក), (ខល), (លខ), (កល), (លក)}
B = **{(ខខ), (ខក), (ខល)}**
D = **{(កក), (កខ), (កល)}**
ព្រឹត្តិការណ៍ B និងព្រឹត្តិការណ៍ D ជា ព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នា គឺ ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ (ប្រសព្វ) នៃ B និង D ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន៖ A ∩ B = ∅

4. ព្រឹត្តិការណ៍បំពេញគ្នា៖

ព្រឹត្តិការណ៍ ២ ជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញគ្នា កាលណាផលគុណនៃព្រឹត្តិការណ៍ទាំង ២ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន និងព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកនៃព្រឹត្តិការណ៍ទាំង ២ ជា**ព្រឹត្តិកាណ៍ប្រាកដ៖ A ∩ $\bar{A}$ = ∅ , A ∪ $\bar{A}$ = S**
ព្រឹត្តិការណ៍ ២ បំពេញគ្នា ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នា
គេបោះគ្រប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់។ គេតាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខគូ។ B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខជាពហុគុណនៃ 3 ។ C ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខតូចជាង ឬស្មើនឹង 2។ ចូរកំណត់÷
លំហសំណាក និងព្រឹត្តិការណ៍ A, B, C
ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A ∩ B, A ∩ C, B ∩ C
ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក A ∪ B, B ∪ C
ព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនៃព្រឹត្តិការណ៍ A, B, C
តើព្រឹត្តិការណ៍ណាជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នា?

ចម្លើយ៖

S= {1, 2, 3, 4, 5, 6}
A= {2, 4, 6}
B= {3, 6};
C= {1, 2}
ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A ∩ B, A ∩ C, B ∩ C
A ∩ B = {6}; A ∩ C = {2}; B ∩ C = ∅
ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក A ∪ B, B ∪ C
A ∪ B = {2, 4, 3, 6}; B ∪ C = {1, 2, 3, 6};
ព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនៃព្រឹត្តិការណ៍ A, B, C
A= {2, 4, 6} => $\bar{A}$ = {1, 3, 5}
B= {3, 6}; => $\bar{B}$ = {1, 2, 4, 5}
C= {1, 2} => $\bar{C}$ = {3, 4, 5, 6}
តើព្រឹត្តិការណ៍ណាជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នា?
B= {3, 6}; => B ∩ C = ∅
C= {1, 2}

9.2.ប្រូបាប

9.2.1.និយមន័យ

ប្រូបាប នៃព្រឹត្តិការណ៍មួយ ជាផលធៀបនៃចំនួនករណីស្រប និងចំនួនករណីអាចកើត ឡើង។
គេតាងប្រូបាបដោយអក្សរ P ។

P(A) = $\frac{\text{ករណីស្រប}}{\text{ករណីអាច}}$ = $\frac{n(A)}{n(S)}$

ប្រសិនបើយើងបោះកាក់ ១ ដងយើងនឹងបានព្រឹត្តិការណ៍ពីរគឺ រូបក្បាល (HEAD – H) និងកន្ទុយ (TAIL -T)។ ករណីស្របៈ លទ្ធផលមានតែ 1 «ឬមួយរូប H ឬមួយរូប T »។

ករណីអាចៈ មាន 2 គឺ «រូប H និង រូប T »។

ដូច្នេះប្រូបាបនៃនៃការបោះខាងលើ H ឬ T គឺៈ $P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$

លំហាត់

គេរើសសិស្សម្នាក់ឱ្យធ្វើជាប្រធានក្រុម ក្នុងចំណោមសិស្សស្រី ៥ នាក់ និងសិស្សប្រុស៣ នាក់។ រកប្រូបាប ដែលប្រធានក្រុមជាសិស្សស្រី និងប្របាប ដែលប្រធានក្រុមជាសិស្សប្រុស។
ចម្លើយៈ តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលប្រធានក្រុមជាសិស្សស្រី និង តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលប្រធានក្រុមជាសិស្សប្រុស
សិស្សទាំងអស់ = 5+3=8 ⇒ n(S)=8
សិស្សស្រីមានចំនួន 5 នាក់ ⇒ n(A)=5
សិស្សប្រុសមានចំនួន 3 នាក់ ⇒ n(B)=3

រកប្រូបាបដែលប្រធានក្រុមជាសិស្សស្រី P(A) = $\frac{\text{ករណីស្រប}}{\text{ករណីអាច}}$ = $\frac{n(A)}{n(S)}$= $\frac{5}{8}$

រកប្រូបាបដែលប្រធានក្រុមជាសិស្សប្រុស P(B) = $\frac{\text{ករណីស្រប}}{\text{ករណីអាច}}$ = $\frac{n(B)}{n(S)}$= $\frac{3}{8}$

9.2.2.លក្ខណៈនៃប្រូបាប

ឧទាហរណ៍ៈ ក្នុងវិញ្ញាសាបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់។ លទ្ធផលដែលអាចកើតឡើងទាំងអស់ក្នុងលំហសំណាក S គឺលទ្ធផលបោះបានលេខ 1 លេខ 2 លេខ 3 លេខ 4 លេខ 5 និងលេខ 6។

គេបានប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗ ដោយ P(A) = $\frac{\text{ករណីស្រប}}{\text{ករណីអាច}}$ = $\frac{n(A)}{n(S)}$ = $\frac{1}{6}$

P({1}) = P({2}) = P({3}) = P({4}) = P({5}) = P({6}) = $\frac{1}{6}$
ផលបូកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍នីមួយទាំងអស់ស្មើនឹងៈ
ជាទូទៅ បើគេតាង e_i ជាព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗនៃលំហសំណាក S គេបានៈ
P(e_1) + P(e_2) + … + P(e_n) = = P(S) = 1 (ប្រូបាបនៃលំហសំណាក)
បើ A ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចកើតឡើងគឺ នោះ A = ∅ ហើយ n(A)=0; P(A) = 0
បើ A ជាព្រឹត្តិការណ៍មួយនៃលំហសំណាក S នោះ n(A) ≤ n(S) ហើយ P(A) ≤ P(S)
ប្រូបាបនៃលំហសំណាក S => P(S)=1
ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមានស្មើ 0; P(∅)=0
ជាទូទៅ បើគេតាង e_i ជាព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗនៃលំហសំណាក S គេបានៈ
ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយក្នុងលំហសំណាក S ជាចំនួនមួយដែលនៅចន្លោះ [0,1]
0 ≤ P(S) ≤ 1
ប្រូបាបជាអនុវត្តន៍ ដែលកំណត់ពីលំហសំណាក S ទៅចន្លោះ [0,1]
P : S —> [0,1]
ឧទាហរណ៍ៈ ក្នុងវិញ្ញាសាបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់។ តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍បោះបានលេខគូ និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍បោះបានលេខជាពហុគុណនៃ 3 ។
គេបានៈ

S= {1, 2, 3, 4, 5, 6}; n(S) = 6

A= {2, 4, 6}; n(A) = 3

B= {3, 6}; n(B) = 2 => n(A ∩ B)= 1; n(A ∪ B)= 4

1. **ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ** A និង B (បោះបានលេខគូ និងបោះបានលេខជាពហុគុណនៃ 3)៖

$A \cap B = \{6\}$; => ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A និង B គឺ $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

ប្រូបាបបោះបានលេខគូ គឺ $P(A) = \frac{3}{6}$ ហើយប្រូបាប B គឺ $P(A) = \frac{2}{6}$

ដោយ $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$; $P(A) \times P(B) = \frac{1}{6}$ នោះគេបាន $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$ ។

2. **ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក** A និង B ៖

$A \cup B = \{2, 4, 3, 6\}$; $n(A \cup B) = 4$

=> ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក A និង B គឺ $P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{4}{6}$

គេដឹងថា បើ $A \cap B \quad \emptyset$ នោះ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

ដូច្នេះ គេបាន $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$ ។

បើ $\mathbf{A \cap B}$ ជាព្រឹត្តិការមិនអាចកើតឡើង $P(A \cap B) = 0$

នោះ $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$ ។

3. **ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍បំពេញ ៖**

ព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $\bar{A}$

$A = \{2, 4, 6\}$ => $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$

$P(\bar{A}) = \frac{3}{6}$

ដោយ $A \cap \bar{A} = \emptyset$; $A \cup \bar{A} = S$

$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$

ដូច្នេះ គេបាន $\mathbf{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$ ។

9.3.ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ

9.3.1. និយមន័យប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ

ឧទាហរណ៍៖ គេដឹងថាសិស្សរៀនចប់វិទ្យាល័យមួយមានចំនួន ២០០ នាក់ ដែលក្នុងនោះមានសិស្សស្រី ៩០ នាក់ និងសិស្សប្រុស ១១០នាក់។ ក្នុងចំណោមនោះ មានតែសិស្សស្រី ២៧ នាក់ប៉ុណ្ណោះដែលបន្តការសិក្សាទៅឧត្តមសិក្សា។ ឯសិស្សប្រុសមានតែ ៦៦ នាក់ ដែលបន្តការសិក្សា។ គេចង់សម្ភាសន៍សិស្សម្នាក់ក្នុងចំណោមសិស្សទាំងនេះ។

រកប្រូបាបដែលអ្នកសម្ភាសន៍៖

១) ជួបសិស្សស្រី ២) ជួបសិស្សប្រុស ៣) ជួបសិស្សស្រីដែលបន្តការសិក្សា ៤) ជួបសិស្សប្រុសដែលបន្តការសិក្សា ៥) ជួបសិស្សបន្តការសិក្សា ៦) ជួបសិស្សបន្តការសិក្សាដោយបានដឹងមុនថាជាសិស្សស្រី ៧) ជួបសិស្សស្រីដោយបានដឹងមុនថាជាសិស្សស្រីបន្តការសិក្សា។

ចម្លើយ៖ គេអាចស្រង់ទិន្នន័យទាំងអស់ដាក់ក្នុងតារាង៖

	ស្រី	ប្រុស	សរុប
បន្តការសិក្សា	27	66	93
មិនបន្ត	63	44	107
សរុប	90	110	200

តាង៖

S ជាលំហសំណាក

F ជាព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សស្រី

B ជាព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សប្រុស
C ជាព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សបន្តការសិក្សា
$\bar{C}$ ជួបសិស្សមិនបន្តការសិក្សា

គេបាន៖

ព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សស្រីដែលបន្តការសិក្សា ជាព្រឹត្តិការណ៍ $F \cap C$
ព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សប្រុសដែលបន្តការសិក្សា ជាព្រឹត្តិការណ៍ $B \cap C$

គេមាន៖

សិស្សទាំងអស់ 200 នាក់ => $n(S)=200$
សិស្សស្រី 90 នាក់ => $n(F)=90$
សិស្សប្រុស 110 នាក់ => $n(B)=110$
សិស្សស្រីបន្តការសិក្សា 27 នាក់ => $n(F \cap C)=27$
សិស្សប្រុសបន្តការសិក្សា 66 នាក់ => $n(B \cap C)=66$
សិស្សបន្តការសិក្សា 93 នាក់ => $n(C)=93$

ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សស្រី $P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{90}{200} = 0.45$

ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សប្រុស $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{110}{200} = 0.55$

ប្រូបាបជួបសិស្សស្រីបន្តការសិក្សា $P(F \cap C) = \frac{n(F \cap C)}{n(S)} = \frac{27}{200} = 0.135$

ប្រូបាបជួបសិស្សប្រុសបន្តការសិក្សា $P(B \cap C) = \frac{n(B \cap C)}{n(S)} = \frac{66}{200} = 0.33$

ប្រូបាបជួបសិស្សបន្តការសិក្សា $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{93}{200} = 0.465$

ប្រូបាបជួបសិស្សបន្តការសិក្សាដោយបានដឹងមុនថាជាសិស្សស្រី៖
បើគេដឹងមុនថាអ្នកដែលចង់ជួបជាសិស្សស្រី មានន័យថាគេចង់ជួបសិស្សស្រីបន្តការសិក្សាក្នុងចំណោមសិស្សស្រី។ ដោយចំនួនសិស្សស្រីបន្តការសិក្សាមាន $n(F \cap C)=27$នាក់ ហើយចំនួនសិស្សស្រីមាន 90 នាក់ => $n(F)=90$ នាក់
នោះប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សបន្តការសិក្សាដោយបានដឹងមុនថាជាសិស្សស្រី គឺ៖

$\frac{n(F \cap C)}{n(F)} = \frac{27}{90} = 0.30$ គេអាចសរសេរផលធៀបនេះជា៖

$$\frac{n(F \cap C)}{n(F)} = \frac{\frac{n(F \cap C)}{n(S)}}{\frac{n(F)}{n(S)}} = \frac{P(F \cap C)}{P(F)} = \frac{0.135}{0.45} = 0.30$$

ប្រូបាបនេះហៅថា ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌនៃព្រឹត្តិការណ៍ C ដោយបានដឹងថាព្រឹត្តិការណ៍ F បានកើតឡើង គេសរសេរថា៖ $P(C/F)$ ឬ $P_F(C)$

ដូច្នេះ ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌនៃ C ដោយដឹង F គឺ៖ $P(C/F) = \frac{P(F \cap C)}{P(F)} = \frac{0.135}{0.45} = 0.30$

ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សស្រីដោយបានដឹងមុនថាជាសិស្សស្រីបន្តការសិក្សា ឬ ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌនៃព្រឹត្តិការណ៍ F ដោយបានដឹងថាព្រឹត្តិការណ៍ C បានកើតឡើង គេសរសេរថា៖ $P(F/C)$ ឬ $P_C(F)$ គឺ៖

$P(F/C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{0.135}{0.465} = 0.29$

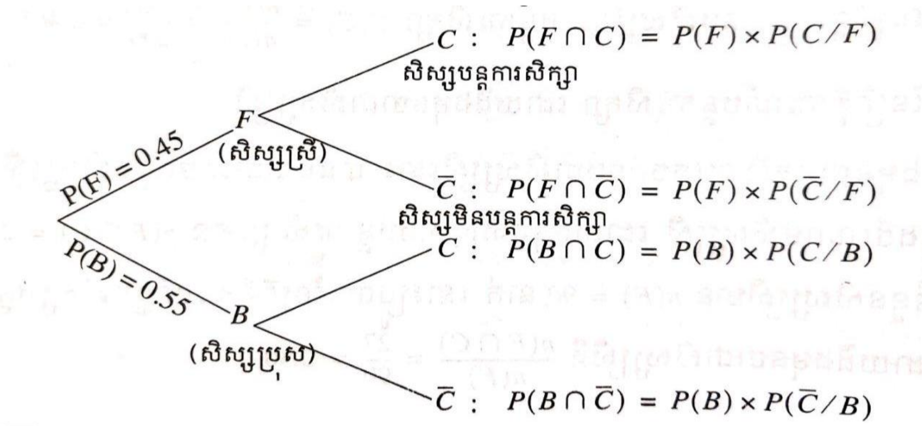
លំហសំណាក។ បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍2ក្នុងលំហសំណាកមួយដែលនោះប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌនៃព្រឹត្តិការណ៍B ដោយដឹង A គឺ៖$\mathbf{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$

គេអាចគណនាបានដូចគ្នា $\mathbf{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$ $P(B)$ 0

តាមរូបមន្តនេះ គេអាចទាញប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A និង B

$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = P(B) \times P(A/B)}$

គេអាចប្រើដ្យាក្រាមដើមឈើ ដើម្បីបង្ហាញប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ៖



9.3.2. ព្រឹត្តិការណ៍ទាក់ទងគ្នានិងមិនទាក់ទងគ្នា

ឧទាហរណ៍៖ ថង់មួយមានឃ្លីខៀវ 4 ចុះលេខ 1, 1, 2, និង 3 និងឃ្លីក្រហម 6 ចុះលេខ 1, 1, 1, 2, 3 និង 4។ គេចាប់យកឃ្លីមួយចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។

គេតាងព្រឹត្តិការណ៍៖ B «ឃ្លីយកចេញពណ៌ខៀវ» A «ឃ្លីយកចេញមានលេខ 1» និង C «ឃ្លីយកចេញមានលេខ 4»។គេឃើញថា ឃ្លីទាំងអស់មាន 10 ក្នុងនោះឃ្លីខៀវមាន 4 ហើយឃ្លីលេខ 1 មានចំនួន 5 និងឃ្លីពណ៌ខៀវលេខ 1 មាន 2

គេបាន៖ $P(B) = \frac{4}{10} = 0.40$; $P(A) = \frac{5}{10} = 0.50$; $P(B \cap A) = \frac{2}{10}$

ដោយ $P(B) \times P(A) = \frac{4}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{2}{10} = P(B \cap A)$

បើ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ នោះគេថាព្រឹត្តិការណ៍ A និង ព្រឹត្តិការណ៍ B មិនទាក់ទងគ្នា។

បើព្រឹត្តិការណ៍ A និង B មិនទាក់ទងគ្នាគេបាន៖

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$$

ដូច្នេះ៖ $P(A/B) = P(A)$; $P(B/A) = P(B)$

គេឃើញថា $P(C) = \frac{1}{10}$; $P(B \cap C) = 0$ ព្រោះ $B \cap C \quad \emptyset$

$P(C) \times P(B) = \frac{1}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{1}{25} \quad P(B \cap C)$

គេថាព្រឹត្តិការណ៍ B និងព្រឹត្តិការណ៍ C ទាក់ទងគ្នា។

ដោយ $B \cap C \quad \emptyset$ នោះ B និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុង។

ជាទូទៅ៖

A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ ដែលមានប្រូបាបមិនសូន្យ។

គេថា ព្រឹត្តិការណ៍ A និង ព្រឹត្តិការណ៍ B **មិនទាក់ទងគ្នា** កាលណាព្រឹត្តិការណ៍ទាំងពីរ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌណាមួយក្នុងចំណោមលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម៖

1. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ឬ 2. $P(A/B) = P(A)$; ឬ 3. $P(B/A) = P(B)$

គេថា ព្រឹត្តិការណ៍ A និង ព្រឹត្តិការណ៍ B **ទាក់ទងគ្នា** កាលណា៖

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

សំគាល់៖ ព្រឹត្តិការណ៍ 2 **មិនទាក់ទងគ្នា** មិនមែនមានន័យថា ព្រឹត្តិការណ៍ទាំង 2 មិនចុះសម្រុងគ្នាទេ។

ឧទាហរណ៍៖ គេបោះគ្រាប់4 ចុះលេខ 1, 1, 2, និង 3 និងឃ្លីក្រហម 6 ចុះលេខ 1, 1, 1, 2, 3 និង 4។ គេចាប់យកឃ្លីមួយចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។

9.3.3. រូបមន្តប្រូបាបសរុប

ឧទាហរណ៍៖ មានប្រជាជន 85% បានចាក់ថ្នាំការពារជំងឺឆ្លង។ 2% កើតជំងឺឆ្លងដោយដឹងថាចាក់ថ្នាំការពាររួចហើយ។ 1% មិនកើតជំងឺឆ្លងដោយដឹងថាមិនបានចាក់ថ្នាំការពារ

1) គណនាប្រូបាបដែលអ្នកកើតជំងឺឆ្លង

2) គណនាប្រូបាបដែលអ្នកបានចាក់ថ្នាំការពារ ដោយដឹងថាកើតជំងឺឆ្លង។

ចម្លើយ៖

ចំនួនអ្នកកើតជំងឺឆ្លង ជាផលបូកចំនួនអ្នកជំងឺដែលបានចាក់ថ្នាំការពារ និងអ្នកជំងឺដែលមិនបានចាក់ថ្នាំការពារ

គេតាងព្រឹត្តិការណ៍៖ V «អ្នកបានចាក់ថ្នាំការពារ»; $\bar{V}$ «អ្នកមិនបានចាក់ថ្នាំការពារ»; M «អ្នកកើតជំងឺឆ្លង»; និង $\bar{M}$ «អ្នកមិនកើតជំងឺឆ្លង» ។

អ្នកជំងឺដែលបានចាក់ថ្នាំការពារ គឺ៖ $M\cap V$

អ្នកជំងឺដែលមិនបានចាក់ថ្នាំការពារ គឺ៖ $M\cap\bar{V}$

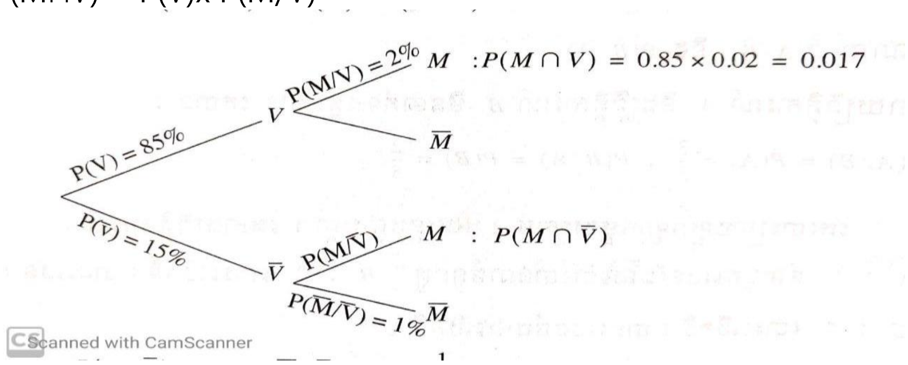
គេបាន៖

1) គណនាប្រូបាបដែលអ្នកកើតជំងឺឆ្លង

$P(M) = P(M\cap V) + P(M\cap\bar{V})$

ដោយ $P(M\cap V) = P(V) \times P(M/V)$

$P(M\cap\bar{V}) = P(\bar{V}) \times P(M/\bar{V})$



$P(M/\bar{V}) = 1 - P(\bar{M}/\bar{V}) = 1 - \frac{1}{100} = 0.99$

$P(M\cap\bar{V}) = 0.15 \times 0.99 = 0.1485$

ដូច្នេះ $P(M) = P(M\cap V) + P(M\cap\bar{V}) = 0.017 + 0.1485 = 0.1655$

អ្នកកើតជំងឺទាំងអស់មាន 16.55%

ការរកភាគរយនៃអ្នកកើតជំងឺទាំងអស់ដែលបានចាក់ថ្នាំការពារនិងអ្នកមិនបានចាក់ថ្នាំការពារហៅថារូបមន្តប្រូបាបសរុប៖ $\mathbf{P(M) = P(M/V) \times P(V) + P(M/\bar{V}) \times P(\bar{V})}$ ជាប្រូបាបដែលមានមនុស្សម្នាក់នៅក្នុងភូមិត្រូវកើតជំងឺឆ្លង។

2) ប្រូបាបដែលអ្នកបានចាក់ថ្នាំការពារ ដោយដឹងថាកើតជំងឺឆ្លង

អ្នកបានចាក់ថ្នាំដោយដឹងថាកើតជំងឺ គឺជាអ្នកចាក់ថ្នាំហើយឆ្លងជំងឺក្នុងចំណោមអ្នកកើតជំងឺ ប្រូបាបដែលអ្នកបានចាក់ថ្នាំ ដោយដឹងថាកើតជំងឺគឺ៖ **P(M/V)**

$P(V/M) = \frac{P(V\cap M)}{P(M)} = \frac{P(M/V) \times P(V)}{P(M/V) \times P(V) + P(M/\bar{V}) \times P(\bar{V})} = \frac{0.017}{0.1655} = 0.1027$

ភាគរយនៃអ្នកចាក់ថ្នាំការពារហើយឈឺក្នុងចំណោមអ្នកជំងឺមាន 10.27%

ការគណនាភាគរយនេះហៅថា ទ្រឹស្តីបទបៃយេស។ ជាទូទៅ៖

បើ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នាពីរ ក្នុងលំហសំណាកមួយ ហើយមានព្រឹត្តិការណ៍ B មួយកើតឡើងក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ $A_1, A_2, \ldots, A_n$

នោះ $B = P(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup\ldots\cup(A_n\cap B)$

$P(B) = P(A_1\cap B) + P(A_2\cap B) + \ldots + P(A_n\cap B)$

ដោយ $P(A_1\cap B) = P(B/A_1) \times P(A_1)$

គេបាន $P(B)=P(A_1)xP(B/A_1)+P(A_2)xP(B/A_2)+\ldots+P(A_n)xP(B/An)$

$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)xP(B/A_i)$

បើ A_k ជាព្រឹត្តិការណ៍មួយក្នុងលំហសំណាក នោះ៖

$P)A_k/B(= \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_k)\times P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\times P(B/A_i)}$

រូបមន្តប្រូបាបសរុប៖ $P(B)=\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P(A_i)} x \mathbf{P(B/A_i)}$

ទ្រឹស្តីបទបៃយេស៖ $P)A_k/B\ (= \frac{P(B/Ak)x\,P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)xP(B/A_i)}$

9.4.គណនាប្រូបាបដោយប្រើប្រាស់ចម្លាស់និងបន្សំ

9.4.1. គោលការណ៍រាប់

9.4.2. គោលការណ៍ផលបូក

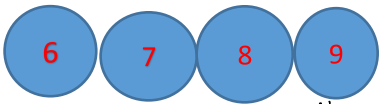
គេមានព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B
n(A) ជាចំនួនលទ្ធផលកើតក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ A; n(B) ជាចំនួនលទ្ធផលកើតក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ B
បើ A និង B គ្មានលទ្ធផលណាមួយរួមគ្នាទេ នោះចំនួនលទ្ធផលដែលកើតក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ « A ឬ B » គឺ៖ $n(A\cup B)= n(A)+ n(B)$
បើ A និង B មានលទ្ធផលរួមគ្នានោះចំនួនលទ្ធផលដែលកើតក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ « A ឬ B » គឺ៖
n(A∪B)= n(A)+ n(B)-n(A∩B)

9.4.3. គោលការណ៍ផលគុណ

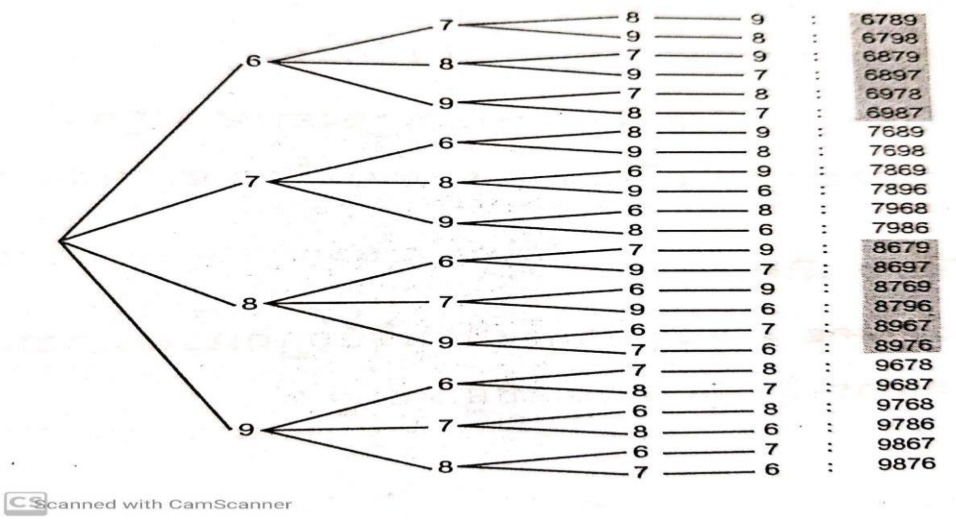
គេមានព្រឹត្តិការណ៍ A កើតឡើង n របៀប ហើយមានព្រឹត្តិការណ៍ B កើតឡើង m របៀប នោះចំនួនលទ្ធផលដែលព្រឹត្តិការណ៍ A កើតឡើង ហើយ B កើតឡើងបន្ទាប់ស្មើនឹង **m** x **n** ។

9.5. ចម្លាស់

9.5.1. ចម្លាស់នៃ n ធាតុ



ឧទាហរណ៍៖ គេមានប័ណ្ណ 4 សន្លឹកចុះលេខ 6, 7, 8 និង 9។
គេយកប័ណ្ណនីមួយៗមកតម្រៀបជាជួរមានលំដាប់ នោះគេបានលទ្ធផលផ្សេងៗគ្នា ដែលជាចំនួនមាន 4 លេខ។ ចូរកំណត់ចំនួននៃចំនួនមាន 4 លេខដែលបង្កើតបាន។
បើយកលេខទាំងបួននេះមកឆ្លាស់គ្នា តើគេបង្កើតបានប៉ុន្មានលេខ?



ដូច្នេះ តាមគោលការណ៍ផលគុណ ចំនួននៃចំនួន លេខដែលអាចបង្កើតឡើងទាំងអស់មាន៖ 4 x 3 x 2 x 1 ការតម្រៀបប័ណ្ណ 4 សន្លឹកផ្សេងៗគ្នាតាម 4 កន្លែងផ្សេងៗគ្នាហើយគិតលំដាប់នេះហៅថា ចម្លាស់នៃ 4 ធាតុ។ ចំនួនចម្លាស់នៃ 4 ធាតុ គឺ 4!= 4 x 3 x 2 x 1 (ហ្វាក់តូរ្យែល)។

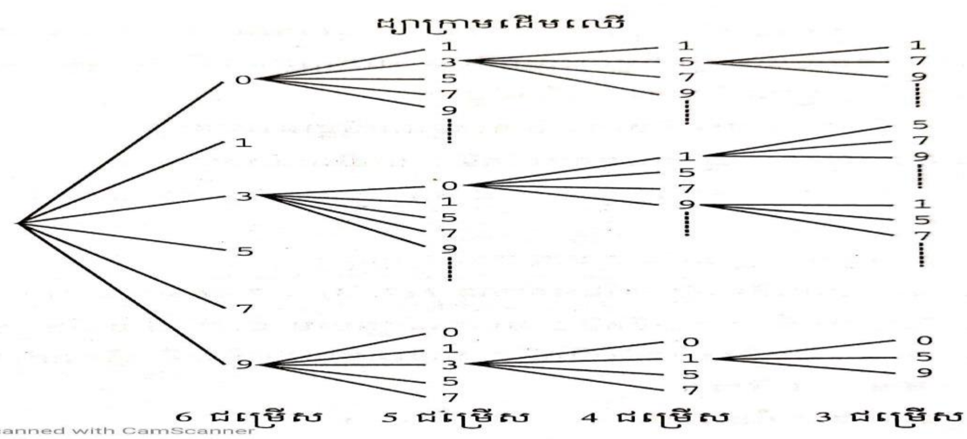
ជាទូទៅ៖

ចម្លាស់នៃ n គឺជាតម្រៀបមានលំដាប់នៃ n វត្ថុខុសៗគ្នាជាជួរដេក $n \in N$ ។ ចំនួនចម្លាស់នៃ n ធាតុស្មើនឹង n!

n!= n (n-1)(n-2)x...x 3 x 2 x 1

9.5.2. ចម្លាស់នៃ r ធាតុយកពី n ធាតុ

ឧទាហរណ៍៖ គេបង្កើតលេខកូដមាន 4 ខ្ទង់ខុសៗគ្នា ដើម្បីធ្វើប័ណ្ណពិសេស ដោយប្រើ 6 លេខ 0, 1, 3, 5, 7, និង 9។ តើគេអាចបង្កើតលេខកូដបានប៉ុន្មានប័ណ្ណ ? លេខកូដដែលអាចកើតឡើង គឺជាតម្រៀប 4 លេខខុសៗគ្នាតាមលំដាប់ដែលលេខនីមួយៗយកចេញពី 6 លេខ។ដើម្បីសរសេរលេខខ្ទង់ដំបូង គេមាន 6 លេខសម្រាប់រើសយក 1 លេខមកសរសេរ។លេខខ្ទង់ទី 2 គេមាន 5 លេខសម្រាប់រើសយក 1 លេខមកសរសេរ។ លេខខ្ទង់ទី 3 គេមាន 4 លេខសម្រាប់រើសយក 1 លេខ និងលេខប័ណ្ណខ្ទង់ចុងក្រោយគេមាន 3 លេខដែលនៅសល់ពីការសរសេរលេខ 3 ខ្ទង់មុន សម្រាប់ជ្រើសរើសយក 1 លេខ។



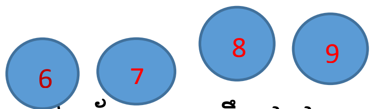
ជាទូទៅ៖ ចម្លាស់នៃ r ធាតុយកពី n ធាតុ គឺជាតម្រៀបមានលំដាប់នៃ r វត្ថុខុសៗគ្នាដែលធាតុនីមួយៗយកចេញពី n ធាតុខុសៗគ្នា។ ($n \in N$; $r \in N$, $r \le n$)។ ចំនួនចម្លាស់នៃធាតុ r ធាតុយកពី n ធាតុគឺ៖ n!
$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\times\ldots\times(n-r+1)$ ឬ **$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$** ។បើ r=n នោះចម្លាស់នៃ n ធាតុ។ គេបាន $P(n,n) = n!$ និង $0!=1$។ឧទាហរណ៍៖ គេបង្កើត

9.5.3. **ចម្លាស់ច្រំដែល**

ឧទាហរណ៍៖ គេបង្កើតលេខកូដមាន 4 ខ្ទង់ខុសៗគ្នា ដើម្បីធ្វើប័ណ្ណពិសេស ដោយប្រើ 6 លេខ 0, 1, 3, 5, 7, និង 9។ បើលេខកូដនោះអាចមានលេខដដែលៗកើតឡើង តើគេអាចបង្កើតលេខកូដបានប៉ុន្មានប័ណ្ណ? លេខកូដអាចមានលេខដដែល គឺជាតម្រៀប 4 លេខតាមលំដាប់ដែលលេខនីមួយៗយកចេញពី 6 លេខ ហើយលេខដែលយកទៅប្រើមុនក៏អាចប្រើនៅខ្ទង់បន្តបន្ទាប់ទៀតមានន័យថា លេខខ្ទង់ទី 1 មាន 6 ជម្រើស នោះលេខសម្រាប់ខ្ទង់បន្តបន្ទាប់ទៀតក៏មាន 6 ជម្រើសដែរ។ ដូច្នេះ ចំនួនប័ណ្ណទាំងអស់មាន $6\times6\times6\times6= 6^4 = 1296$។

ជាទូទៅ៖ ចម្លាស់ច្រំដែលនៃ r ធាតុយកចេញពី n ធាតុ គឺជាតម្រៀបមានលំដាប់នៃ r ធាតុដែលធាតុនីមួយៗអាចជាធាតុដដែលយកចេញពី n ធាតុខុសគ្នា។ចំនួនចម្លាស់ច្រំដែលនៃ **r** យកពី n ធាតុស្មើនឹង n^r ។

9.5.4. **ចម្លាស់វង់**

ឧទាហរណ៍៖ គេតម្រៀបប័ណ្ណ 4 សន្លឹក 

ដាក់ជារង្វង់។ តើគេបានលទ្ធផលចំនួនប៉ុន្មានបែប?ការតម្រៀបប័ណ្ណ 4 សន្លឹកជាជួរតាមលំដាប់ គឺជាចម្លាស់នៃ 4 ធាតុ ហើយចំនួនចម្លាស់មាន 4!គេសង្កេតឃើញថា ជួរដេក 4 ជួរ 6789; 7896; 8967; 9678 អាចជារបៀបតែមួយ បើគេដាក់ជារង្វង់។គេបានចំនួនចម្លាស់វង់តិចជាងចំនួនចម្លាស់ជាជួរដេក 4 ដង។ ដោយចំនួនចម្លាស់នៃ 4 ធាតុជាជួរដេកមាន 4! នោះចំនួនចម្លាស់វង់នៃ 4 ធាតុមាន $\frac{4!}{4} = 3!$ ។

ជាទូទៅ៖ ចំនួនចម្លាស់វង់នៃ n ធាតុ គឺ៖ $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

9.6.**បន្សំ**

9.6.1.**បន្សំនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុ**

ឧទាហរណ៍៖ ក្នុងក្រុមមួយមានក្មេង 4 នាក់ឈ្មោះ A, B, C, D។ បើក្មេង 2 នាក់ចាប់ដៃសំដែងការគួរសមនឹងគ្នា តើការចាប់ដៃនេះមានប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នា?បើគេឱ្យក្មេង 2 នាក់អង្គុយជិតគ្នា ដើម្បីថតរូប គេឃើញថារបៀបនៃការអង្គុយនេះមាន 2 របៀបខុសគ្នា ព្រោះថាបើ A អង្គុយខាងឆ្វេងនៃ B ខុសពីរបៀបដែល B អង្គុយខាងឆ្វេងនៃ A។ របៀបដែលឱ្យក្មេងម្តង 2 នាក់ក្នុងចំណោមក្មេង 4 នាក់អង្គុយនេះ ជាចម្លាស់ 2 ធាតុ យកចេញពី 4 ធាតុ ហើយចំនួនចម្លាស់មាន៖ $P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4\times3\times2}{2\times1} = 12$ របៀប។បើគេឱ្យក្មេង 2 នាក់ចាប់

ដៃសំដែងការគួរសមនឹងគ្នា នោះគេឃើញរបៀបចាប់ដៃនេះមានតែមួយរបៀប ព្រោះថា A ចាប់ដៃ B ក៏ដូចជា B ចាប់ដៃ A ដែរ មានន័យថាការចាប់ដៃនេះគ្មានលំដាប់មុនក្រោយ ឆ្វេងស្តាំទេ។ការដែលក្មេងចាប់ដៃគ្នាម្តង 2 នាក់ក្នុងចំណោម 4 នាក់ដោយមិនគិតលំដាប់មុនក្រោយ ឬ ឆ្វេងស្តាំនេះ ហៅថា បន្សំ នៃ 2 ធាតុយកពី 4 ធាតុ។

គេឃើញថា ចំនួនរបៀបដែលក្មេងចាប់ដៃគ្នាម្តង 2 នាក់ក្នុងចំណោម 4 នាក់ មានតែ 6 របៀប គឺតិចជាង ចំនួនចម្លាស់នៃ 2 ធាតុយកពី 4 ធាតុចំនួន 2! ដង ព្រោះថាបន្សំមួយរបៀបគេអាចចម្លាស់បាន 2! របៀប។ ដូច្នេះ ចំនួនបន្សំ 2 ធាតុយកពី 4 ធាតុស្មើនឹង 6។ គេសរសេរ៖ $C(4,2) = 6$

គេបាន $P(4,2) = C(4,2)\times 2!$ ឬ $C(4,2) = \frac{P(4,2)}{2!} = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = \frac{4\times3\times2}{2!\times 2} = 6$

ជាទូទៅ៖ បន្សំនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុ គឺជាការយកព្រមគ្នាម្តង r ធាតុចេញពី n ធាតុខុសៗគ្នា ដោយមិនគិតពីលំដាប់នៃការយកចេញ។ ($n \in N$; $r \in N$, $r \le n$)ចំនួនបន្សំនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុ គឺ៖

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

ចម្លាស់(គិតលំដាប់)		**បន្សំ(មិនគិតលំដាប់)**
AB	BA	AB
AC	CA	AC
AD	DA	AD
BC	CB	BC
BD	DB	BD
CD	DC	CD

9.6.2. **លក្ខណៈនៃបន្សំ**

$C(n,n-r) = C(n,r)$ ដោយ $C(n,n-r) = \frac{n!}{(n-n+r)!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C(n,r)$ ។

$C(n,n) = \frac{n!}{(n-n+r)!} = \frac{1}{0!}$ ដោយ $C(n,n)$ ជាបន្សំនៃ n ធាតុយកពី n ធាតុ នោះការធ្វើបន្សំនេះបាន 1 របៀប។ ដូច្នេះ $C(n,n) = 1$។ គេបាន៖ $\frac{1}{0!}=1$ ឬ $0!=1$ ។

ឧទាហរណ៍៖ 1) គណនា $C(5,3)$ និង $C(5,2)$ រួចសន្និដ្ឋាន 2)គណនា $C(n,0)$, $C(n,1)$

ចម្លើយ៖ $C(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1\times2\times3\times4\times5}{1\times2\times1\times2\times3} = 10$; $C(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$

$C(n,0) = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!\times1} = 1$

$C(n,1) = \frac{n!}{(n-1)!1!}$

9.6.3. **ចម្លាស់បែងចែកបាន**

ឧទាហរណ៍៖ គេ $n(A)$ ជាចំនួនលទ្ធផលកើតក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ A; $n(B)$ ជាចំនួនលទ្ធផលកើតក្នុង ព្រឹត្តិការណ៍ B បើ A និង B គ្មានលទ្ធផលណាមួយរួមគ្នាទេ នោះចំនួនលទ្ធផលដែលកើតក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ « A ឬ B » គឺ៖ $n(A\cup B) = n(A) + n(B)$

9.6.4. **គណនាប្រូបាបដោយប្រើចម្លាស់**

ឧទាហរណ៍៖ គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ 2 ដង។

ក) រកប្រូបាបដែលបោះបានលេខទាំង 2 លើកខុសគ្នា។

ខ) រកប្រូបាបដែលបោះបានលេខទាំង 2 លើកជាលេខគូ។

គ) រកប្រូបាបដែលបោះបានលេខទាំង 2 លើកខុសគ្នា និងជាលេខគូ។

ចម្លើយ៖

ការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ ២ ដងជាចម្លាស់ច្រំដែលនៃ ២ ធាតុយកចេញពី ៦ ធាតុ ព្រោះលេខដែលអាចចេញលើកទី១ មាន ៦ ជម្រើស និងលេខអាចចេញលើកទី ២ ក៏មាន ៦ ជម្រើសដែរ។ (ចម្លាស់ច្រំដែលនៃ r ធាតុយកចេញពី n ធាតុ គឺជាតម្រៀបមានលំដាប់នៃ r ធាតុដែលធាតុនីមួយៗអាចជាធាតុដដែលយកចេញពី n ធាតុខុសគ្នា។ ចំនួនចម្លាស់ច្រំដែលនៃ r យកពី n ធាតុស្មើនឹង n^r)។

ដូច្នេះ លទ្ធផលដែលអាចកើតឡើងទាំងអស់មានចំនួន $6^2 = 36$។ 36 ជាចំនួនករណីដែលអាច។

ក រកប្រូបាបដែលបោះបានលេខទាំង (2 លើកខុសគ្នា)

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលបោះបានលេខខុសគ្នាទាំង 2 លើក។ ការបោះបានលេខទាំង2 ខុសគ្នា គឺជាចម្លាស់នៃ 2 ធាតុយកពី 6 ធាតុ។ ចំនួនចម្លាស់នៃ2 ធាតុយកពី 6 ធាតុ

A៖ $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ ឬ $P(6,2) = \frac{6!}{(6-2)!} = 6 \times 5 = 30$

ប្រូបាប $P(A) = \frac{30}{36} = 0.833$

ខ រកប្រូបាបដែលបោះបានលេខទាំង (2 លើកជាលេខគូ)

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលបោះបានលេខទាំង លើកជាលេខគូ។ 2 ការបោះបានលេខទាំង2លើកជាលេខគូ គឺជាចម្លាស់ច្រំដែលនៃ 2 ធាតុយកពី 3 ធាតុ (2,4,6)។ ចំនួនចម្លាស់ច្រំដែលនៃ 2 ធាតុយកពី 3 ធាតុ គឺ៖ ចំនួនចម្លាស់ច្រំដែលនៃ r យកពី n ធាតុស្មើនឹង៖ $P(n,r) = n^r = 3^2 = 9$; ប្រូបាប $P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0.25$

គ) រកប្រូបាបដែលបោះបានលេខទាំង 2 លើកខុសគ្នា និងជាលេខគូ

ការបោះបានលេខទាំង 2 លើកខុសគ្នា និងជាលេខគូ គឺជា $A \cap B$ ។

$A \cap B = \{(2,4), (2,6), (4,2), (4,6), (6,2), (6,4)\}$

$n(A \cap B) = 6$;

$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = 0.166$

9.6.5. **គណនាប្រូបាបដោយប្រើបន្សំ**

ឧទាហរណ៍៖ គេរើសសិស្ស 8 នាក់ដោយចៃដន្យក្នុងចំណោមសិស្សប្រុស 9 នាក់ និងសិស្សស្រី 11 នាក់ទៅសម្ភាសន៍។

ក) តើគេអាចរើសសិស្សបានប៉ុន្មានរបៀប (ក្រុម) ខុសៗគ្នា?

ខ) រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

១) ក្រុមសិស្សទាំង 8 នាក់មានសុទ្ធតែសិស្សស្រី។

២) ក្នុងក្រុមមានសិស្សស្រី 5 នាក់ និងប្រុស 3 នាក់។

ចម្លើយៈ

ក) **តើគេអាចរើសសិស្សបានប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នា**?

ព្រឹត្តិការណ៍នេះ គឺការរើសសិស្ស 8 នាក់ក្នុងចំណោមសិស្ស 20 នាក់ ដោយគ្មានលំដាប់ ហើយសិស្សម្នាក់មិនអាចមានឈ្មោះ 2 ដងក្នុងក្រុមតែមួយ។ ចំនួនដែលអាចកើតឡើងជាបន្សំ 8 ជាតុយកចេញពី 20 ជាតុ។

ចំនួនបន្សំនៃ r ជាតុយកពី n ជាតុ គឺៈ $C(20,8)=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}=\frac{20!}{(20-8)!\,8!}=125970$

ខ) **រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ៈ**

១) ក្រុមសិស្សទាំង 8 នាក់មានសុទ្ធតែសិស្សស្រី។

ព្រឹត្តិការណ៍នេះ គឺការរើសសិស្ស 8 នាក់ក្នុងចំណោមសិស្ស 11។ ចំនួនដែលអាចកើតឡើងជាបន្សំ 8 ជាតុយកចេញពី 11 ជាតុ។ យើងតាងព្រឹត្តិការណ៍នេះថា A

ចំនួនបន្សំនៃ r ជាតុយកពី n ជាតុ គឺៈ $C(11,8)=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}=\frac{11!}{(11-8)!\,8!}=165$

ប្រូបាប $P(A)=\frac{165}{125970}=0.0013$

២) ក្នុងក្រុមមានសិស្សស្រី 5 នាក់ និងប្រុស 3 នាក់។

ព្រឹត្តិការណ៍នេះ គឺការរើសសិស្សស្រី 5 នាក់ក្នុងចំណោមសិស្ស 11 $C(11,5)$ និងរើសសិស្សប្រុស 3 នាក់ក្នុងចំណោមសិស្ស 9 $C(9,3)$ ។ ចំនួនករណីស្របគឺ $C(11,5)\times C(9,3)$។

$$P(A)=\frac{C(11,5)\times C(9,3)}{C(20,8)}=0.308$$

លំហាត់

លំហាត់១ៈនៅក្នុងធុងមួយគេមានប៊ូល 12 ដែលគេសរសេរលេខពី 1 ដល់ 12។ គេចាប់យកប៊ូល3ចេញពីធុងព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ។

1) រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានមានប៊ូលទាំងបីមានលេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 3»។

2) រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានមានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង 3»។

3) រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានមានលេខតាមលំដាប់កើនជាស្វ៊ីតនពន្ត ដែលមានផលសងរួម d=3»។

ចម្លើយៈ

គេចាប់ប៊ូល 3 ក្នុងចំណោមប៊ូល 12 ដែលសរសេរពី 1 ដល់ 12 នោះចំនួនករណីអាចគឺជា បន្សំនៃ r ជាតុយកពី n ជាតុ។ គឺជាការយកព្រមគ្នាម្តង r ជាតុចេញពី n ជាតុខុសៗគ្នាដោយមិនគិតពីលំដាប់នៃការយកចេញ។

$(n\in N;\ r\in N,\ r\le n)$

ចំនួនករណីអាចគឺជាបន្សំនៃ r ជាតុយកពី n ជាតុ គឺៈ $n(S)=C(12,3)=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}=$

$=\frac{12!}{(12-3)!\,3!}==\frac{12\text{x}11\text{x}10\text{x}9\text{x}8\text{x}7\text{x}6\text{x}5\text{x}4\text{x}3\text{x}2\text{x}1!}{(12-3)!\,3!}=\frac{12\text{x}11\text{x}10\text{x}9\text{x}8\text{x}7\text{x}6\text{x}5\text{x}4\text{x}3\text{x}2\text{x}1!}{9!\,3!}=220$

1) រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានមានប៊ូលទាំងបីមានលេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 3។

តាងៈ A ជាព្រឹត្តិការណ៍ «ចាប់បានមានប៊ូលទាំងបីមានលេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 3»

ប៊ូលដែលមានលេខចែកដាច់នឹង 3 គឺៈ {3,6,9,12}

នោះករណីស្រប $n(A)=C(4,3)=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}=\frac{4!}{(4-3)!\,3!}=\frac{4\text{x}3\text{x}2\text{x}1}{1!\,3!}=4$

យើងបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{220} = \frac{1}{55}$

2) រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានមានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង 3»។

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ «គេចាប់បានមានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង 3»។

ប៊ូលដែលមានលេខចែកដាច់នឹង 3 គឺៈ {3,6,9,12}

ប៊ូលដែលមានលេខចែកមិនដាច់នឹង 3 គឺៈ {1,2,4,5,7,8,10,11}

ព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេចាប់បានមានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង 3» គឺៈ

$C(4,1) = \frac{4!}{(4-1)!\,1!} = \frac{4!}{1X\,3!} = 4$

ព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេចាប់បានមានប៊ូលពីរមានលេខចែកមិនដាច់នឹង 3» គឺៈ

$C(8,2) = \frac{8!}{(8-2)!\,1!} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8x7}{2} = 4x7=$

ដូច្នេះៈ ចំនួនករណីដែលអាចចាប់បានមានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង 3

គឺៈ $C(4,1) \; x \; C(8,2) =$ 4x 4x7=112

យើងបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{112}{220} = \frac{28}{55}$

3) រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានមានលេខតាមលំដាប់កើនជាស្វ៊ីតនពន្ត ដែលមានផលសងរួម d=3»។

តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ «គេចាប់បានមានលេខតាមលំដាប់កើនជាស្ទីតនពន្ត ដែលមានផលសងរួម d=3»។

D=3 នោះ C= {(1,4,7); (2,5,8); (3,6,9); (4,7,10); (5,8,11); (6,9,12)}

S={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

នោះចំនួនករណីស្រប =6

$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{220} = \frac{3}{110}$

លំហាត់ទី២

Ex1 ៖ នៅក្នុងថុងមួយគេមានប៊ូល 12 ដែលគេសរសេរលេខពី 1 ដល់ 12។ គេចាប់យកប៊ូល 3 ចេញពីថុងព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ។

1) រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានមានប៊ូលទាំងបីមានលេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 3»។

2) រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានមានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង 3»។

3) រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានមានលេខតាមលំដាប់កើនជាស្វ៊ ុតនពន្ត ដែលមានផលសងរួម d=3»។

ចម្លើយៈ

គេចាប់ប៊ូល 3 ក្នុងចំណោមប៊ូល 12 ដែលសរសេរពី 1 ដល់ 12 នោះចំនួនករណីអាចគឺជា បន្សំនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុ។ គឺជាការយកព្រមគ្នាម្តង r ធាតុចេញពី n ធាតុខុសៗគ្នា ដោយមិនគិតពីលំដាប់នៃការយកចេញ។ ($n \in N;\; r \in N,\; r \le n$)

ចំនួនករណីអាចគឺជាបន្សំនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុ គឺៈ $n(S) = C(12,3) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} =$

$= \frac{12!}{(12-3)!\,3!} = = \frac{12x11x10x9x8x7x6x5x4x3x2x1!}{(12-3)!\,3!} = \frac{12x11x10x9x8x7x6x5x4x3x2x1!}{9!\,3!} = 220$

នៅក្នុងជីវិតប្រចាំថ្ងៃរបស់យើងយើងជួបប្រទះនូវស្ថានភាពដែលវាមិនអាចទៀរចទេក្នុងការទស្សន៍ទាយលទ្ធផលពិតប្រាកដ។ ស្ថានភាពបែបនេះកើតឡើងភាគច្រើននៅក្នុងការសិក្សាវិទ្យាសាស្ត្ររបស់យើង

ផងដែរ។ ទ្រឹស្តីនៃប្រូបាប៊ីលីតេជួយយើងឱ្យយល់ពីការពិសោធន៍បែបនេះក្នុងន័យថាវាអនុញ្ញាតឱ្យយើងគណនាលទ្ធភាពនៃការប្រមូលលទ្ធផលស្មុគស្មាញដែលអាចកើតមាន។ នៅពេលយើងនិយាយអំពីប្រូបាប៊ីលីតេមនុស្សគ្រប់គ្នាហាក់ដូចជាមានគំនិតអំពីអត្ថន័យរបស់វា។ ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយវាងាយស្រួលក្នុងការធ្វើខុសក្នុងការវាយតម្លៃលេខច្បាស់លាស់។ វិចារពីរដែលហាក់ដូចជាត្រឹមត្រូវអាចផ្តល់នូវចម្លើយយ៉ាងពេញលេញ។ ដូច្នេះវាមានសារៈសំខាន់ណាស់ក្នុងការអភិវឌ្ឍវិធីសាស្ត្រផ្លូវការ។

នៅក្នុងការសិក្សារបស់យើងយើងនឹងផ្តោតលើទ្រឹស្តីប្រូបាប៊ីលីតេដែលដាច់ពីគ្នាពោលគឺកន្លែងដែលប្រូបាប៊ីលីតេត្រូវបានទទួលដោយការបូកសរុបជំនួសឱ្យការធ្វើសមាហរណកម្ម។

ទ្រឹស្តីបទ ១៖ ការពិសោធន៍ដែលលទ្ធផលមិនអាចប៉ាន់ស្មានបានជាមួយភាពប្រាកដប្រជាហៅថាការពិសោធដោយចៃដន្យហើយការប្រមូលលទ្ធផលដែលអាចកើតមានទាំងអស់ត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាចន្លោះគំរូ ឬចន្លោះទំនេរដែលត្រូវបានគេចាត់ទុកជាសំណុំអេស។

ទ្រឹស្តីបទ ២៖ សំណុំរងនៃចន្លោះគំរូ S ត្រូវបានគេហៅថាព្រឹត្តិការណ៍។ ជាតុណាមួយនៅក្នុងចន្លោះគំរូត្រូវបានគេហៅថាព្រឹត្តិការណ៍បឋម។

ទ្រឹស្តីបទ ៣៖ ច្បាប់មួយកំណត់តម្លៃលេខដល់ព្រឹត្តិការណ៍ $A \subseteq S$. ច្បាប់នេះត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាការបែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនិងមានលក្ខខណ្ឌបីដូចខាងក្រោម។

1. ចំពោះសំណុំរងណាមួយនៃ A of S, $0 \le Pr(A) \le 1$.
2. $Pr(\emptyset) = 0$, $Pr(S) = 1$ ។
3. ប្រសិនបើ A និង B គឺជាសំណុំរងផ្សេងគ្នាពីររបស់ S នោះ

$Pr(A \cup B) = Pr(A)+Pr(B)$.

ច្បាប់នេះត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាវិធានបន្ថែម។

ទ្រឹស្តីបទ៤៖ តម្លៃ $Pr(A)$ ត្រូវបានគេស្គាល់ថាប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ A. ចន្លោះគំរូរួមជាមួយនឹងការបែងចែកប្រូបាបត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាប្រូបាប៊ីលីតេប្រូបាប។

ទ្រឹស្តីបទ ៥៖ ទុកឱ្យព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរដូចជាប្រការ ៦ (៦) = 0 ។ ប្រូបាប៊ីលីតេដែលមានលក្ខខណ្ឌនៃព្រឹត្តិការណ៍ B ដែលបានផ្តល់ឱ្យព្រឹត្តិការណ៍ A ដែលតំណាងឱ្យ $(B \mid A)$ ត្រូវបានចាត់ទុកថាជា៖ $Pr(B|A) = Pr(A \cap B)/ Pr(A)$

ទ្រឹស្តីបទ ៦៖ ព្រឹត្តិការណ៍កនិងខគឺឯករាជ្យប្រសិនបើនិងលុះត្រាតែ$Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B)$។ វិចារណកថាៈជម្រើសឯករាជ្យនិងការពិពណ៌នាពិពណ៌នាគឺជាជម្រើស $Pr(B|A) = Pr(B)$, ផ្តល់ថាប្រូបាប (ក) មិនមែនសូន្យទេ។ ការអនុវត្តន៍ខាងលើនិយាយថាប្រូបាប៊ីលីតេមានលក្ខខណ្ឌនៃខដែលបានផ្តល់ឱ្យ A គឺដូចគ្នានឹងប្រូបាប៊ីលីតេដោយគ្មានលក្ខខណ្ឌ។ និយាយម្យ៉ាងទៀតព្រឹត្តិការណ៍ A មិនមាននៅក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ B ដែលកើតឡើងនោះទេ។

ទ្រឹស្តីបទ ៧: អថេរចៃដន្យគឺជាមុខងារដែលពឹងផ្អែកលើព្រឹត្តិការណ៍បឋមនៃចន្លោះប្រូបាប៊ីលីតេ៖

$X : S \rightarrow R;$, $Pr(X = x) = Pr(\{A :$ ដែល $S \in A\ X(s) = x\})$.

ទ្រឹស្តីបទ ៨៖ ហាងឆេងនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺជាសមាមាត្រ $P(A) / P(A_0)$ ដែល A_0 តំណាងអោយការបំពេញបន្ថែមរបស់A។

ទ្រឹស្តីបទ៩៖ មុខងារចែកចាយប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យពិពណ៌នាពីវិធីដែលប្រូបាបត្រូវបានចែកចាយលើតម្លៃដែលអាចមានដែលអថេរចៃដន្យអាចកើតឡើង។ យើងតាងនេះដោយទំ (x) ។ ឧទាហរណ៍ ប្រសិនបើអថេរចៃដន្យ X យកតម្លៃ 0,1,2, ... , n ដោយប្រូបាបវិជ្ជមានហើយតម្លៃផ្សេងទៀតមិនអាចទៅរួច ទេបន្ទាប់មក

p(i) = Pr(X = i), i = 0,1,...,n

តំណាងឱ្យផ្នែកនៃអនុគមន៍ដាច់របស់វា។ មុខងារដែលទាក់ទងមួយទៀតគឺ F(x) = Pr(X ≤x) =X j≤x p(j).

មុខងារនេះត្រូវបានគេហៅថាមុខងារចែកចាយតគ្នា (cdf) ឬគ្រាន់តែមុខងារចែកចាយនៃអនុគមន៍ដាច់។

ទ្រឹស្តីបទ ១០៖ ទុកឱ្យ X និង Y ជាអថេរចៃដន្យពីរ។ យើងនិយាយថា X និង Y គឺជាអថេរចៃដន្យឯករាជ្យ ប្រសិនបើPr(X = x and Y = y) = Pr(X = x)•Pr(Y = y)សម្រាប់ x និង y ទាំងអស់។

តើការប្រព្រឹត្តនេះទាក់ទងនឹងព្រឹត្តិការណ៍នៅក្នុងចន្លោះគំរូយ៉ាងដូចម្តេច? នេះត្រូវបានពន្យល់នៅក្នុងការពិភាក្សាខាងក្រោម។ ដោយផ្តល់ជូន យើងអាចកំណត់សំណុំគំរូគំរូដូចជា X = a ។ សំណុំដែលបង្កើត X = a អាចត្រូវបានសរសេរជា X − 1 (a) ។ ដូចគ្នានេះដែរចំពោះ b ∈ R យើងតាងដោយ Y − 1 (ខ) សំណុំនៃព្រឹត្តិការណ៍ទាំងអស់ដូចជា Y = b ។ តាមការសង្កេតនេះយើងនិយាយថាអថេរចៃដន្យពីរគឺ X និង Y គឺឯករាជ្យប្រសិនបើនិងសំរាប់តែ a, b∈R,Pr(X−1(a)∩Y−1(b)) = Pr(X−1(a))Pr(Y−1(b))។

ឧទាហរណ៍៖

តាង S ={00,01,10,11} និង រកឃើញថា៖Pr(00) = $\frac{1}{2}$; Pr(01)= $\frac{1}{4}$; Pr(10)= $\frac{1}{8}$; Pr(11)=$\frac{1}{8}$

រក X = កូអរដោណេទីមួយនៃ x និង Y = ជាកូអរដោណេទី២នៃ x មាន x ∈ S។

ឧទាហរណ៍

X	Pr(x)	X(x)	Y(x)
00	½	0	0
01	¼	0	1
10	1/8	1	0
11	1/8	1	1

យើងបាន៖

Pr({x | X(x) = 0 & Y(x) = 0}) = Pr({00,01}∩{00,10})= Pr({00}) = $\frac{1}{2}$

Pr({x | X(s) = 0}) = Pr({00,01}) = $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Pr({x |Y(x) = 0}) = Pr({00,10}) = $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

ពេល $\frac{1}{2} \neq \frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$, X និង Y មិនអាស្រ័យនឹងគ្នា។

និយមន័យ១១៖ ទុកឱ្យ X ជាអថេរចៃដន្យ។ មធ្យម (ត្រូវបានគេស្គាល់ផងដែរថាជាតម្លៃរំពឹងទុកហើយជាធម្មតាតាងដោយ μ ឬ E (X)) នៃ X ត្រូវបានគេចាត់ទុកថាជា $\sum_{\forall x} X$. Pr(X=x)

សេចក្តីយោង១២៖ សូមអោយ X ជាអថេរចៃដន្យ។ មេដ្យានរបស់ X គឺត្រូវបានកំណត់ថាជាសំណុំនៃ x ទាំងអស់នោះ Pr(X ≤ x) ≥ $\frac{1}{2}$ and Pr(X ≥ x)≥ $\frac{1}{2}$។

ទ្រឹស្តីបទ ១៣៖ ទុកឱ្យ X ជាអថេរចៃដន្យ។ របៀបនៃ X គឺត្រូវបានកំណត់ជាសំណុំនៃ x ទាំងអស់នោះ Pr(X = x)≥Pr(X = x)´គ្រប់តម្លៃ X = x´

ទ្រឹស្តីបទ១៤៖ បំរែបំរួលនៃអថេរចៃដន្យដែលត្រូវបានតាងជា σ² ត្រូវបានគេចាត់ទុកថាជា។ var(X) = $\sum_{\forall x}(x - E(X))^2$Pr(X=x)ឬសការ៉េនៃបំរែបំរួលត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាគម្លាតគំរូ។

ឧទាហរណ៍និងការពិភាក្សា

ឧទាហរណ៍ ១៖

ទុកឱ្យ S = {(១,១), (១.២), ... , (១.៦), (២,១), ... , (៦,៦)} ជាចន្លោះគំរូនៃការវិល ស្លាប់ទៀងទាត់ពីរដង។ចន្លោះគំរូ S មាន ៣៦ ធាតុ។ នៅទីនេះ (២,៣) គឺជាព្រឹត្តិការណ៍បឋមនិងតំណាងឱ្យការពិតដែលថាតម្លៃមុខទី ១ គឺ ២ និងតម្លៃមុខទី ២ គឺ ៣ ។ វិលចំនួន ២ ដូចជា (២,៣) និង (៣,២) ត្រូវបានគេចាត់ទុកថាឌី។ ព្រឹត្តិការណ៍មួយអាចត្រូវបានសរសេរជាសំណុំរងឧទាហរណ៍ {(2,3), (1,4)} ឬអាចត្រូវបានបង្ហាញដោយពាក្យឧទាហរណ៍ "តម្លៃមុខទាំងពីរគឺដូចគ្នា" ។ នៅក្នុងសញ្ញាណកំណត់ព្រឹត្តិការណ៍ចុងក្រោយគឺ {(១.១), (២,២), ... , (៦,៦)} ។ ជាធម្មតាយើងសន្មតថាមរណភាពគឺ" យុត្តិធម៌" (ទៀងទាត់) ពេលគឺតម្លៃមុខនីមួយៗ ៦ នឹងត្រូវបានគេមើលឃើញថាមានប្រូបាបស្មើគ្នា ១ .៦។ ប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែល" តម្លៃមុខទាំងពីរគឺដូចគ្នា" គឺ ៦ .៣.៦, ទទួលបានដោយរូបមន្តសាមញ្ញ

$$\text{Pr(ព្រឹត្តការណ៍)} = \frac{\text{ចំនួនពិន្ទុអំណោយផលដល់ព្រឹត្តិការណ៍នេះ}}{\text{ចំនួនពិន្ទុក្នុងចន្លោះគំរូ}}$$

វាជាការសំខាន់ក្នុងការកត់សម្គាល់ថារូបមន្តនេះអាចអនុវត្តបានលុះត្រាតែព្រឹត្តិការណ៍បឋមទាំងអស់នៅក្នុងចន្លោះគំរូត្រូវបានកំណត់ប្រូបាបស្មើគ្នា។ ប្រសិនបើព្រឹត្តិការណ៍បឋមកើតឡើងជាមួយប្រូបាប៊ីលីតេដូច្នេះប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយត្រូវបានទទួលដោយវិធានបន្ថែមដែលបានរៀបរាប់ខាងលើពេលគឺ អថេរចៃដន្យ X អាចត្រូវបានកំណត់ដោយលក្ខណសម្បត្តិ៖X = តម្លៃស្មើនឹងផលបូកនៅលើខ្ទង់ឡុកឡាក់(9.1)

ឧទាហរណ៍ ៖ X ({(2,3)}) = 5. [ដើម្បី ធ្វើឱ្យការសម្គាល់របស់យើងកាន់តែសាមញ្ញយើងចូលចិត្តសរសេរ X ({(a, b)}) ជា X (a, b)] អថេរចៃដន្យ Y អាចត្រូវបានគេចាត់ទុកថា ៖

Y:=តម្លៃស្មើនឹងតម្លៃដាច់ខាតនៃឌីយ៉េនៅលើចំណុចនៅលើក្រឡុកគ្រាប់ឡុកឡាក់(9.2)

ឧទាហរណ៍៖ Y (2,3) |2 - 3| =1

ពិចារណាអំពីអថេរចៃដន្យ X ដែលយើងទើបតែបានរកឃើញ។ pdf និង cdfនៃ X អាចរកបានយ៉ាងងាយស្រួល (សូមមើលតារាងខាងក្រោម) ប្រសិនបើឡុកឡាក់នីមួយៗមានភាពយុត្តិធម៌។

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

p(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
F(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

វាងាយស្រួលក្នុងការផ្ទៀងផ្ទាត់ថាមធ្យម, មធ្យមនិងរបៀបនៃអថេរចៃដន្យ X គឺ ៧

ឧទាហរណ៍ ២៖ នៅទីនេះយើងពិចារណាឧទាហរណ៍មួយទៀតដែលមរណភាពត្រូវបានរំកិលពីរដង លើកលែងតែវាផ្ទុក (មិនយុត្តិធម៌) ស្លាប់។ ឧបមាថាប្រូបាប៊ីលីតេនៃតម្លៃមុខត្រូវបានចែកចាយដូចបង្ហាញខាងក្រោម៖

X	1	2	3	4	5	6
Pr(x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

ក្នុងឧទាហរណ៍នេះប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍" តម្លៃមុខទាំងពីរគឺដូចគ្នា" គឺ

$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{144}+\frac{1}{144}+\frac{1}{144}+\frac{1}{144}=\frac{1}{4}$

សម្រាប់អថេរចៃដន្យ Y, កំណត់ក្នុង (៩.២) , យើងទទួលបាន pdf និង cdf ខាងក្រោម

x	0	1	2	3	4	5
P(x)	$\frac{36}{144}$	$\frac{46}{144}$	$\frac{20}{144}$	$\frac{18}{144}$	$\frac{16}{144}$	$\frac{8}{144}$
F(x)	$\frac{36}{144}$	$\frac{82}{144}$	$\frac{102}{144}$	$\frac{120}{144}$	$\frac{136}{144}$	$\frac{144}{144}$

តើយើងទទួលបានឯកសារ pdf ខាងលើយ៉ាងដូចម្តេច? យើងបង្ហាញវាសម្រាប់ករណីមួយ : p(1) = Pr(Y=1) ,ច្បាស់ណាស់ Y=1 នៅពេលកំណត់នៅលើតម្លៃមុខគឺ ១ យើងបាន Pr(Y = 1) = Pr(A)

$A=\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)\}$

ឧទាហរណ៍ Pr(1,2) = $\frac{1}{3}\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ ហើយ Pr(2,3)= $\frac{1}{3}\,\frac{1}{12}=\frac{1}{36}$; ។ល។,

p(1) = $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{144}+\frac{1}{144}+\frac{1}{144}+\frac{1}{144}+\frac{1}{144}+\frac{1}{144}$

មធ្យមរបស់ Y ទាក់ទងនឹងមរណភាពផ្ទុកនេះ $0 \times \frac{36}{144} + 1 \times \frac{46}{144} + 2 \times \frac{20}{144} + 3 \times \frac{18}{144} + 4 \times \frac{16}{144} + 5 \times \frac{8}{144} =$ 1.694។មេដ្យានរបស់ Y គឺ 1 (ចំណាំ Pr(Y≤1) = 82/144≥0.5, និង Pr(Y≥ 1) = 108/144≥ 0.5 និង ម៉ូដនៃ Y គឺ 1ផងដែរ។

ចំណាំ ៖ ទំហំគំរូអាចមានទំរង់ផ្សេងៗដែលមួយក្នុងចំណោមនោះអាចមានភាពងាយស្រួលជាងកន្លែងផ្សេងទៀត។ ឧទាហរណ៍នៅពេលដែលមិនពិតត្រូវបានគេបោះចោលពីរដងនៃទំហំគំរូធម្មជាតិបំផុត
(1.1),(1.2),...,(6.6)}។
ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយប្រសិនបើយើងចាប់អារម្មណ៍នឹងព្រឹត្តិការណ៍ដែលទាក់ទងទៅនឹងផលបូកនៃតម្លៃមុខរបស់អថេរពីរនោះយើងក៏អាចជ្រើសរើសចន្លោះគំរូផ្សេងទៀតដែរ។ {2,3,...,12}.
វាច្បាស់ណាស់ថាចន្លោះគំរូចុងក្រោយនឹងមិនមានប្រយោជន៍សម្រាប់ការឆ្លើយសំណួរមួយចំនួនទៀតទេ
ឧទាហរណ៍៖
ថាតើប្រូបាប៊ីលីតេដែលតម្លៃមុខទាំងពីរគឺដូចគ្នាវីឯចន្លោះគំរូដំបូងឆ្លើយសំណួរនេះយ៉ាងងាយស្រួល។

9.6.6.ទ្រឹស្តីបទប្រូបាប៊ីលីតេ

ទ្រឹស្តីបទ 9.1 : តាង A' បង្ហាញព្រឹត្តិការណ៍បន្ថែមរបស់ A. បន្ទាប់មកចំពោះព្រឹត្តិការណ៍ A,
$\Pr(A') = 1-\Pr(A)$។
ទ្រឹស្តីបទ 9.2 : ចំពោះព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា A និង B,
$\Pr(A\cup B) = \Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(A\cap B)$.
ទ្រឹស្តីបទ 9.3 : តាង A និង B គឺជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរ
$\Pr(A\cap B) = \Pr(A)\Pr(B|A) = \Pr(B)\Pr(A|B)$.
ទ្រឹស្តីបទ 9.4 : តាង $A_1,\ldots, A_n$ នោះ n ព្រឹត្តិការណ៍បែ បនោះ (i) $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n = S$, និង (ii) $A_i\cap A_j = \emptyset$, ដែល S ជាកន្លែងបង្ហាញចន្លោះគំរូ ។
$\Pr(A_i \backslash B) = \frac{\Pr(A_i)\Pr(B\backslash A_i)}{\sum_j^n \Pr(A_i)\Pr(B\backslash A_j)}$
គ្រប់ចំនួនគត់ $i=1,\ldots,n$.
ទ្រឹស្តីបទ 9.5 : ចំពោះអថេរចៃដន្យមានពីរ X និង Y ,
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.
ទ្រឹស្តីបទ 9.6 : ចំពោះអថេរចៃដន្យ X និង ថេរ a,
$E(aX) = aE(X)$.
ទ្រឹស្តីបទ 9.7 : ចំពោះអថេរពីរមិនទាក់ទងគ្នា X និង Y
$E(XY) = E(X)E(Y)$.
ទ្រឹស្តីបទ 9.8 : បំរែបំរួលនៃអថេរចៃដន្យ X ច្រើនតែងាយស្រួលដើម្បីវាយតម្លៃដោយប្រើរូបមន្តដូចខាងក្រោម:$\mathrm{var}(X) = \sum_{\forall x} x^2 \Pr(X = x) - E(X)^2$
ទ្រឹស្តីបទ 9.9 : តាង X ជាអថេរចៃដន្យណាមួយដែលមានតម្លៃកំណត់ μ និងគម្លាតគំរូσ។ បន្ទាប់មកសម្រាប់ថេរ k>1.
$\Pr(\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma)\geq 1-\frac{1}{k^2}$

លំហាត់

លំហាត់ 1: តាង A = {a,b,c,d,e}. ឧបមាថាយើងចង់ជ្រើសរើសអក្សរបីពី A ។ រាយទំហំគំរូនៃការពិសោធន៍នេះ។

លំហាត់ 2: អក្សរចំនួន ៣ ត្រូវបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យពីពាក្យ" Steve."

1. ពិពណ៌នាទំហំគំរូ,
2. ពណ៌នាព្រឹត្តិការណ៍ E ដែល" មួយក្នុងចំណោមបីនៃអក្សរគឺ t " តើប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍នេះគឺជាអ្វី? សន្មតថាការជ្រើសរើសទាំងអស់ទំនងជាដូចគ្នា។
3. ពិពណ៌នាព្រឹត្តិការណ៍ E ដែល" មួយឬច្រើននៃអក្សរទាំងបីគឺ E " ។ តើប្រូបាប៊ីលីតេរបស់វាគឺជាអ្វី? សន្មតថាការជ្រើសរើសទាំងអស់ទំនងជាដូចគ្នា។

លំហាត់ 3. អក្សរចំនួន ៣ ត្រូវបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យពី"ម៉ាស៊ីនសម្រាប់គណនា. " តើប្រូបាប៊ីលីតេនោះគឺជាអ្វី?

1. មួយក្នុងចំណោមនោះគឺជា t ?
2. មួយឬច្រើនក្នុងចំណោមនោះគឺ a c?

សន្មតថាការជ្រើសរើសទាំងអស់ទំនងជាដូចគ្នា

លំហាត់4. សិស្ស១០នាក់ $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_{10}$ ត្រូវបានរៀបចំដោយចៃដន្យនៅក្នុងបន្ទាត់។

1. ពិពណ៌នាទំហំគំរូ
2. រៀបរាប់ពីព្រឹត្តិការណ៍ E ដែល" p_1 និង p_2 នៅជាប់គ្នា" ។ តើប្រូបាប៊ីលីតេរបស់វាគឺជាអ្វី?

លំហាត់5. នៅពេលអ្នកបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ចំនួន ៣ តើប្រូបាប៊ីលីតេនៃការបូកសរុបនៃលេខនៅលើជួរមុខគឺ ១០ ដែរឬទេ?

លំហាត់ 6. កំណត់S: = {0,1,……,n} និង {Pr(k)=$\binom{n}{k}^{2-n}$

1. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា (S, Pr) គឺជាចន្លោះគំរូ។
2. អថេរចៃដន្យពីរគឺ f និង g ដូច x ϵ S, f (x), g(x) =1.

គណនាតម្លៃដែលបានកំណត់នៃអថេរចៃដន្យ f និង g.

លំហាត់ 7: ក្នុងការចែកសន្លឹកបៀ ៥២សន្លឹក ត្រូវចែកជា ៤ សន្លឹកនៃសន្លឹកបៀ ១៣ សន្លឹក។ តើប្រូបាប៊ីលីតេដែលដៃរបស់អ្នកគ្មានសន្លឹកអាត់គឺជាអ្វី? [សន្មតថាទាំងអស់ ៥២! ចូរទំនងជាដូចគ្នា។]

លំហាត់8: ឧបមាថាប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍គឺ x / y ដែល x និង y ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ បង្ហាញពីចំនួននៃព្រឹត្តិការណ៍ទាក់ទងនឹង x និង y ។

លំហាត់ 9: អ្នកបោះហើយមិនដាក់ចូលវិញ។ ប្រសិនបើមានលេខគូអ្នកនឹងទទួលបានចំនួនដុល្លារ។ ប្រសិនបើលេខសេសណាមួយលេចចេញមកអ្នកត្រូវបង់ចំនួនដុល្លារនោះ។ តើការរំពឹងទុករបស់អ្នកមានតម្លៃប៉ុន្មាន? ពន្យល់។

លំហាត់ 10: អ្នកបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ពីរ។ ប្រសិនបើផលបូកនៃព្រឹត្តិការណ៍ឃើញចំនួនគូអ្នកនឹងឈ្នះច្រើនប្រសិនបើសេសអ្នកនឹងបាត់បង់ចំនួននោះ។ តើអ្នកគិតថាចេញចំនួនគូឬសេស? ពន្យល់។

លំហាត់ 11: តាង A និង B មិនអាចមានព្រឹត្តិការណ៍នៅក្នុងចន្លោះគំរូ បញ្ជាក់ថា A និង B មិនទាក់ទងគ្នាទេលើកលែងតែ Pr (A) ឬ Pr (B) គឺ 0 ។

លំហាត់12: ឧបមាថា S ជាចន្លោះគំរូនៃពីរចំនុច S ={a,b} and Pr(a)Pr(b)≠ 0.
បង្ហាញថាមិនមានអថេរថៃដន្យពីរ f និង g នៅលើ S គឺមិនទាក់ទងគ្នាទេលើកលែងតែមួយជាមុខងារថេរ។
លំហាត់13: ឧបមាថាមានម៉ាស៊ីនដែលនៅពេលចុចប៊ូតុងត្រឡប់ចំនួនគត់ពីលេខ ២ ដល់លេខ ១០១ ទាំងអស់មានប្រូបាបស្មើ។
អ្នកលេងពីរនាក់ A និង B យល់ព្រមលេងល្បែងដូចតទៅ៖ A អ្នកបង់ប្រាក់ d ដុល្លារដើម្បីលេងហ្គេម។ B ចុចប៊ូតុងលេងហើយបង់ប្រាក់ p ដុល្លារទៅ A ដែល p ជាចំនួនតូចបំផុតចែកជាចំនួនគត់តូចជាងត្រឡប់មកវិញដោយម៉ាស៊ីន។ អ្វីដែលគួរតែដូច្នេះហ្គេមនេះ" យុត្តិធម៌" (ឧទាហរណ៍តម្លៃរំពឹងទុករបស់អ្នកឈ្នះម្នាក់ៗគឺសូន្យ) ។ឧបមាថា A លេងហ្គេមខាងលើដប់ដងដោយគិតថ្លៃ d = 10 ដុល្លារក្នុងមួយការលេង។ តើអ្វីទៅជាការឈ្នះដែលរំពឹងទុក A's
លំហាត់ទី14: ស៊េរីពិភពលោកបញ្ចប់នៅពេលក្រុមមួយឈ្នះ ៤ លើក ។ មិនមានទំនាក់ទំនងទេហើយមានតែពីរក្រុមប៉ុណ្ណោះ។ តើអ្វីទៅជាប្រូបាប៊ីលីតេដែលស៊េរីមានរយៈពេលប្រាំពីរលើកប្រសិនបើ៖ក្រុមត្រូវបានផ្គូផ្គងស្មើគ្នា;
ក្រុមមួយជាក្រុមដែលពេញចិត្ត ៣ ទៅ ២ (ហាងឆេងពិត) ជាងក្រុមផ្សេងទៀត ?
លំហាត់ទី15: ឧបមាថាយើងចង់ជ្រើសរើសលេខពីរពី {1,2, ..., 100} ដោយចៃដន្យ។ តើប្រូបាប៊ីលីតេដែលផលបូកនៃលេខដែលបានរើសទាំងពីរអាចត្រូវបានបែងចែកដោយលេខ 5 ជាអ្វី ?
លំហាត់ទី16: តាង (S, Pr) ជាចន្លោះគំរូនិង f អថេរចៃដន្យលើ (S, Pr) ។ យើងកំណត់សំណុំ T និងអនុគមន៍ G ដូចខាងក្រោម:

$T = \{v \mid v = f(a), a \in S\}$;

$G: T \to [0,1], \forall v \in T, G(v) = \sum_{a\in S, f(a)=v} \Pr(a)$.

បញ្ជាក់ថា (T, G) គឺជាចន្លោះគំរូ។
លំហាត់ទី17: ប្រអប់មួយមានគ្រាប់បាល់ខ្មៅមួយនិងបាល់ពណ៌សពីរ។ អ្នកត្រូវបានគេស្នើសុំឱ្យរើសបាល់ពីប្រអប់រហូតដល់បាល់ខ្មៅត្រូវបានជ្រើសរើសសម្រាប់លើកទីមួយ។ តើអ្វីទៅជាពេលវេលាដែលរំពឹងទុកសម្រាប់ការរើសបាល់ខ្មៅប្រសិនបើ៖
(i) អ្នកមិនចាំបាច់ជំនួសបាល់ពណ៌សដែលបានជ្រើសរើសក្នុងប្រអប់ទេ ?
(ii) អ្នកត្រូវជំនួសបាល់ពណ៌សដែលបានជ្រើសរើសក្នុងប្រអប់ ?
លំហាត់ទី18: បោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ពីរអ្នកឈ្នះ $|x-y|$ ដុល្លារដែល x និង y ជាលេខមុខ។ បង្ហាញថាការរំពឹងទុករបស់អ្នកគឺឈ្នះ $\frac{35}{18}$ ។
លំហាត់ទី19: អ្នកត្រូវបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ចំនួនបីហើយឈ្នះលេខចន្លោះមុខអតិបរិមានិងអប្បបរមា។ បង្ហាញថាការរំពឹងទុករបស់អ្នកគឺ $\frac{35}{12}$ ។
លំហាត់ទី20: ប្រសិនបើប្រូបាប៊ីលីតេនៃការឈ្នះល្បែងកីឡាវាយកូនបាល់គឺជាទំតើអ្វីទៅជាប្រូបាប៊ីលីតេដែលបន្ទាប់ពីការលេងកីឡាវាយកូនបាល់ចំនួនប្រាំមួយអ្នកនាំគូប្រជែងរបស់អ្នកបួនប្រកួតទៅពីរ ? ឆ្លើយសំណួរសម្រាប់ (i) ទំ = 0.5, (ii) ទំ = 0,6 និង (iii) ទំ = 0,4 ។

លំហាត់ទី21: ថ្នាក់មួយនៃសិស្ស ១៥ នាក់មានស្ថានីយកុំព្យូទ័រចំនួន ៣ ដែលមាននៅក្នុងបន្ទប់ពិសោធន៍។ សិស្សម្នាក់ៗប្រើស្ថានីយដែលមានប្រូបាប៊ីលីតេ 1/10 ។ តើអ្វីទៅជាប្រូបាប៊ីលីតេដែលសិស្សម្នាក់ឬច្រើននាក់មកពីថ្នាក់នេះនឹងត្រូវរង់ចាំប្រើប្រាស់ស្ថានីយ? គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដែលមានភាពត្រឹមត្រូវចំពោះភាពលេចធ្លោពីរ។

លំហាត់ទី22: ជាមធ្យមរថយន្តក្រៅរដ្ឋចំនួន ១៥ ឆ្លងកាត់ចំណុចជាក់លាក់មួយនៅលើដងផ្លូវក្នុងមួយម៉ោង។ តើអ្វីទៅជាប្រូបាប៊ីលីតេដែលរថយន្តនៅក្រៅរដ្ឋចំនួន ៤ ឆ្លងកាត់ចំណុចនោះក្នុងរយៈពេល ១២ នាទី?

លំហាត់ទី23: តាង S = {1,2,3,4,5,6} និងតាង Pr, f, និង g ត្រូវបានកំណត់ដូចខាងក្រោមៈ

s	Pr(s)	f(s)	g(s)
1	1/4	1	3
2	1/6	0	3
3	1/6	1	3
4	1/6	0	6
5	1/6	1	6
6	1/12	0	6

1. បញ្ជាក់ថា (S, Pr) គឺជាចន្លោះគំរូ។
2. តាង {1,2,6} និង {2,4} ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរ។ តើពួកគេឯករាជ្យឬ? ហេតុអ្វី?
3. តើ f និង g អថេរចៃដន្យឯករាជ្យពីរនៅលើ (S, Pr)? ហេតុអ្វី?

លំហាត់ទី24: រក f និង g ខាងលើ

1. E(f+g).
2. Var (f+g).

លំហាត់ទី25: លើសពីសំណុំជាតុចូលធំកម្មវិធីមួយដំណើរការទ្វេដងតាមដែលវាបោះបង់។ តើអ្វីទៅជាប្រូបាប៊ីលីតេដែលការប៉ុនប៉ងចំនួន ៦ ដង ៤ រឺក៏លើសនេះនឹងដំណើរការ?

លំហាត់ទី26: ការតាបមួយមាន

1. Counter សម្គាល់លេខ 1
2. Counter សម្គាល់លេខ 4
3. Counter សម្គាល់លេខ 9

ហើយដូច្នេះនៅលើរហូតដល់រាប់ n បានសម្គាល់ n^2 (ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន) ។ អ្នកគូររាប់មួយហើយអ្នកត្រូវបានបង់តាមចំនួនទឹកប្រាក់ដែលបានបង្ហាញ។ បង្ហាញថាការរំពឹងទុករបស់អ្នកស្មើនឹងចំនួនអ្នករាប់។

លំហាត់ទី27: បង្ហាញថាចំពោះ 10,000 fips នៃលុយកាក់ដែលមានប្រូបាប៊ីលីតេយ៉ាងហោចណាស់គឺ 0,99 ដែលសមាមាត្រនៃភាពសំខាន់ដែលវាធ្លាក់នឹងធ្លាក់ចុះនៅចន្លោះ 0,45 ទៅ 0,55 ។

ដំណោះស្រាយបញ្ហា

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 1: ចន្លោះគំរូគឺជាការប្រមូលគ្រប់វិធីដែលអាចធ្វើទៅបានដើម្បីជ្រើសរើស ៣ អក្សរពី

$\{a, b, c, d, e, f\}$ ។ យើងដឹងថាមាន $\binom{6}{3}$= 20 វិធីធ្វើដូច្នេះ។ ពួកគេគឺជា:

$$\begin{Bmatrix} abc, abd, abe, abf, acd, ace, acf, ade, adf, aef \\ bcd, bce, bcf, bde, bdf, bef, cde, cdf, cef, def \end{Bmatrix}$$

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 2: អក្សរបីត្រូវបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យពី Steve។

ករណីអាចគឺ $\{ste, stv, sev, see, tev, tee, eev\}$

មនុស្សម្នាក់ត្រូវយកចិត្តទុកដាក់ជាពិសេសចំពោះប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍នៅក្នុងចន្លោះគំរូ។ប្រូបាប៊ីលីតេមិនស្មើគ្នាទេ។ឧទាហរណ៍ Pr(ste)=$\frac{2}{10}$ ។

ពីព្រោះយើងមាន $\binom{5}{3}$ = 10 វិធីក្នុងការជ្រើសរើសអក្សរបីអក្សរ នៅក្នុង Steve ហើយអ៊ីនៅក្នុងឡចំហាយព្រឹត្តិការណ៍អាចមកពីជំហានដំបូងឬអ៊ីទី ២ នៅក្នុងឡចំហាយ។ ដូច្នេះយើងមានវិធីពីរយ៉ាងដើម្បីរើសយកជណ្តើរ។ តារាងខាងក្រោមបង្ហាញ

	ste	stv	sev	see	tev	tee	eev
Pr	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

ពីប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍។

ព្រឹត្តិការណ៍" មួយក្នុងចំណោមបីនៃអក្សរគឺ t" គឺអ៊ី = {ste, stv, Tev, t} ហើយប្រូបាប៊ីលីតេ

របស់វាគឺ $Pr(ste)+Pr(stv)+Pr(tev)+Pr(tee)=\frac{6}{10}$ ព្រឹត្តិការណ៍" មួយឬច្រើននៃអក្សរបីគឺ e" គឺ

$E = \{ste, sev, see, tev, tee, eev\}$, ហើយប្រូបាបប៊ីលីតេវាគឺៈ

$$Pr(ste)+Pr(sev)+Pr(see)+Pr(tev)+Pr(tee)+Pr(eev) = \frac{9}{10}$$

ម៉្យាងទៀតអ៊ី = អេស - {stv} ដែល S ជាទំហំគំរូទាំងមូលហើយ" stv" គឺជាព្រឹត្តិការណ៍តែមួយគត់ដែលគ្មាន" e" ។ ដូច្នេះប្រូបាប៊ីលីតេនៃអ៊ីគឺ $1-Pr\ (stv) = \frac{9}{10}$

ដំណោះស្រាយបញ្ហា3: ដំបូងយើងពិចារណាទំហំគំរូដែលរួមមានជម្រើសដែលអាចធ្វើបានទាំងអស់នៃអក្សរបីក្នុងចំណោមដប់។ យើងជ្រើសរើសយកអក្សរបីក្នុងចំណោមដប់, ចៃដន្យ, នៅក្នុងវិធី $\binom{10}{3}$។ ព្រឹត្តិការណ៍ទាំងអស់នៅក្នុងចន្លោះគំរូមានប្រូបាប៊ីលីតេស្មើគ្នា 1 / $\binom{10}{3}$។ ឥឡូវនេះបញ្ហាដែលនៅសេសសល់គឺវិធីវាយតម្លៃប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលយើងចាប់អារម្មណ៍។

1. " ជំរើសទាំងអស់ដែលមានមួយ t" :ដំបូងយើងជ្រើសរើសយក t ហើយបន្ទាប់មក $\binom{9}{2}$ យើងនឹងជ្រើសរើសអក្សរ ២ ផ្សេងទៀត។ ដូច្នេះយើងមាន$\binom{9}{2}$ ជ្រើសរើសមួយគឺ t

   Pr(ជម្រើសមានយ៉ាងហោចណាស់មួយ t) = $\frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$

2. យើងមានពីរ c នៅក្នុងពាក្យ {Calulator} ។ ដូច្នេះយើងមានព្រឹត្តិការណ៍ពីរប្រភេទៈ មួយ C និងC's ។ យើងវាយតម្លៃប្រូបាប៊ីលីតេរបស់ពួកគេដាច់ដោយឡែក។ សម្រាប់មួយគយើងទទួលយកមួយក្នុង

ចំណោមពីររបស់ c ហើយបន្ទាប់មកយកអក្សរពីរបន្ថែមទៀត (ក្រៅពី c) តាម $2\times\binom{8}{2}$ ។ សម្រាប់លេខពីរយើងបានជ្រើសរើសលិខិតជាច្រើនពី 8 អក្សរ ដែលនៅសល់តាមរបៀប $\binom{8}{1}$ ។ ដូច្នេះ

Pr(ជម្រើសមានយ៉ាងហោចណាស់មួយ t)= $\frac{2\text{x}\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}}+\frac{\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{8}{15}$

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 4:

1. ចន្លោះគំរូគឺជាសំណុំនៃការអនុញ្ញាតដែលអាចធ្វើបានទាំងអស់នៃ $p_1, p_2, \cdots, p_{10}$ ។ ដូច្នេះទំហំនៃទំហំគំរូគឺ 10! ។ ហើយចាប់តាំងពីសិស្សត្រូវបានតម្រង់ជួរដោយចៃដន្យលំដាប់នីមួយៗមានប្រូបាប៊ីលីតេដូចគ្នា c ។
2. យើងចាត់ទុក p1 និង p2 រួមគ្នាជាសិស្សម្នាក់ A. មាន 9! ការអនុញ្ញាតនិស្សិត 9 នាក់ $A, p_3, p_4, \dots, p_{10}$ សម្រាប់ការអនុញ្ញាតនីមួយៗទទួលបានតាមរបៀបនេះយើងមានវិធីពីរយ៉ាងដើម្បីដាក់ p1 និង p2 នៅជាប់គ្នា៖ p_1p_2 ឬ p_2p_1 ។ ដូច្នេះ

Pr(p_1 និង p_2 នៅជាប់គ្នា) $=\frac{9!\times 2}{10!}=0.2$

ដំណោះស្រាយបញ្ហា5:

គ្រាប់ឡុកឡាក់ចំនួនបី។ ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយប្រសិនបើចំនួនគ្រាប់ឡុកឡាក់មានច្រើនជាងបួនវិធីសាស្ត្រហាត់នឿយនឹងក្លាយទៅជាស្មុគស្មាញ។ យើងប្រើវិធីសាស្ត្រជំនួសដើម្បីឆ្លើយតបនឹងបញ្ហានេះ។

យើងគូសឡុកឡាក់ទាំងបីដើម្បីធ្វើឱ្យវាអាចសម្គាល់បាន។ ទំហំនៃចន្លោះគំរូគឺ 6^3 ។ តាង x, y និង z បង្ហាញលេខនៅលើផ្នែកខាងលើនៃគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំង ៣ ។ យើងចង់ដឹងថាតើចំនួនគត់នៃចំនួនគត់នៃដំណោះស្រាយ៖ x+y+z=10

នៅពេលដែល $1\le x\le 6, 1\le y\le 6, 1\le z\le 6$។សំនួរដែលមានតំលៃស្មើគឺៈតើចំនួនគត់នៃចំនួនគត់នៃ $x'+y'+z'=7$ នៅពេលដែល $0\le x'\le 5, 0\le y'\le 5, 0\le z'\le 5$? យើងមាន៖$\binom{7+3-1}{7}$=36

ដំណោះស្រាយចំនួនគត់ដែលមិនមែនជាបញ្ហានៃបញ្ហាខាងលើ។ យើងត្រូវដកដំណោះស្រាយដែល $x'\ge 6$, $y'\ge 6$, ឬ $z'\ge 6$។ មាន

$$\binom{1+3-1}{7}x3=9$$

ដំណោះស្រាយបែបនេះ។ ដូច្នេះយើងមាន 36-9 = 27 វិធីអ៊ីដែលផលបូកលេខនៅលើគឺ10 ដូច្នេះប្រូបាប៊ីលីតេដែលចង់បានគឺ $\frac{27}{6^3}=\frac{1}{8}$

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 6: រំលឹកឡើងវិញ $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ and $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=n2^{n-1}$

ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់ថា (S, Pr) គឺជាចន្លោះគំរូដែលមិនមានគុណភាពល្អយើងពិនិត្យមើល

S = {0,1, ... , n} និង Pr (k) = i n k ¢ 2 − n ≥0។ លើសពីនេះទៅទៀត

$$\sum_{k\in s}\Pr(k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{-n}$$

$=2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

$=2^{-n}2^n$

តាង f : S→R; f(x)=x=1

E(f)= $\sum_{x\in s} f(x)\Pr(x)$

=$\sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x} 2^{-n}$

=$2^{-n}\sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}$

=$2^{-n}n2^{n-1}$

=$\frac{n}{2}$

ប្រសិនបើ g : S→R; g(x)=1

E(f)= $\sum_{e\in s} g(x)\Pr(x) = \sum_{x\in s}\Pr(x) = 1$

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 7: ទំហំនៃទំហំគំរូគឺ $\binom{52}{13}$។ ចំនួននៃវិធីដាក់បញ្ចូល 13 សន្លឹកពី 48 សន្លឹក (បន្ទាប់ពីដកសន្លឹកអាត់ចំនួន 4) $\binom{48}{13}$ ដូច្នេះហើយ

Pr(Aមិនពូកែរ)=$\frac{\binom{48}{13}}{\binom{53}{13}} = \frac{39.38.37.36}{52.51.50.49}$

ម៉្យាងទៀតសូមពិចារណាអំពីប្រូបាបនៃការគូរកាតដែលមិនមែនជាសន្លឹកអាត់៖ ប្រូបាប៊ីលីតេដែលកាតទី ១ មិនមែនជាសន្លឹក ace គឺ 48/52 ប្រូបាប៊ីលីតេដែលcard ទី 2មិនមែនជាសន្លឹក ace គឺ 47/51 ... និង ប្រូបាប៊ីលីតេដែល card ទី 13 មិនមែនសន្លឹក ace គឺ 36/40 ។ ដូច្នេះប្រូបាប៊ីលីតេនៃការគូរបៀរ 13 សន្លឹកដោយគ្មានសន្លឹក ace គឺ

$\frac{48}{52}$ x $\frac{47}{51}$ x $\frac{36}{40}\ldots\ldots x = \frac{39.38.37.36}{52.51.50.49}$

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 8: នៅក្នុងបញ្ហានេះ Pr (E) = x / y ។ ដូច្នេះករណីអាចនៃព្រឹត្តិការណ៍ E គឺ៖

$$\frac{\Pr(E)}{1-\Pr(E)} = \frac{\frac{x}{y}}{1-\frac{x}{y}} = \frac{x}{y-x}.$$

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 9:

សំណុំនៃករណីអាចគឺ៖ $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. ស្វែងរកអថេរចៃដន្យ $f(x)=\begin{cases} x, & x \text{ even} \\ -x, & x \text{ odd}\end{cases}$ (9.5)

ដែលចំនួនវិជ្ជមានតំណាងឲ្យអ្នកនិងឈ្នះនៃចំនួនប្រាក់នោះឯ ចំនួនអវិជ្ជមានវិញតាងឲ្យប្រាក់ដែលអ្នកបានចំណាយ។ នោះយើងបាន៖

$$\begin{aligned} E(f) &= \sum_{s\in S} f(x)\frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6}(-1+2-3+4-5+6) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ យើងរំពឹងថានឹងឈ្នះបាន ០.៥ ដុល្លាក្នុង ១ប្រកួត

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 10 : ចំពោះបញ្ហានេះយើងអាចបែងចែកចន្លោះគំរូនិងមុខងារប្រូបាប៊ីលីតេដែលជាប់ទាក់ទងតាមវិធីពីរយ៉ាង។ គ្នាមានគុណសម្បត្តិនិងគុណវិបត្តិ។

វិធីសាស្ត្រទី១ : មិនមានទំហំគំរូ S = {2,3, ... , 12} និងអថេរចៃដន្យ

$$f(x)=\begin{cases} x \text{ ប្រសិនបើ } x \text{ ជាព្រឹត្តិការណ៍} \\ -x \text{ ប្រសិនបើ } x \text{ ជាចំនួនសេស} \end{cases}$$

បន្ទាប់មកមុខងារដង់ស៊ីតេប្រូបាប៊ីលីតេគឺមានភាពខុសគ្នាប៉ុន្តែតម្លៃរំពឹងទុកងាយស្រួលទទួលបាន។ តារាងខាងក្រោមបង្ហាញពីប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗនៅក្នុងចន្លោះគំរូ។

x		*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
f(x)		*2*	*-3*	*4*	*-5*	*6*
Pr(x)		$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$
x	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
f(x)	*-7*	*8*	*-9*	*10*	*-11*	*12*
Pr(x)	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ដូចនេះ

$E(f)=\sum_{x=2}^{12} f(x).\Pr(x) = 0$

វិធីសាស្ត្រទី2: ប្រសិនបើចន្លោះគំរូគឺ S = {1,2,3,4,5,6} × {1,2,3,4,5,6}, បន្ទាប់មកមុខងារដង់ស៊ីតេប្រូបាប៊ីលីតេងាយនឹងពិពណ៌នា៖ សម្រាប់ទាំងអស់ (x, y) ∈S, Pr (x, y) = ១ ៣៦ ។ ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយការងារបន្ថែមតម្រូវឱ្យមានអថេរចៃដន្យនិងដើម្បីគណនាការរំពឹងទុករបស់វា។ យើងមិនអថេរចៃដន្យដូចជា៖

$$f(x,y)=\begin{cases} (x+y) \text{ ប្រសិនបើ } x+y \text{ ជាព្រឹត្តិការណ៍} \\ -(x+y) \text{ ប្រសិនបើ } x+y \text{ ជាចំនួនសេស} \end{cases}$$

គេអាចសន្និដ្ឋានបានថាគឺដូចគ្នា។

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 11: Part1: តាង A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនពិតពីរ។ ដោយសារ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់មិនបាន Pr (A∩B) = Pr (∅) = 0 ។ ឧបមាថា A និង B គឺឯករាជ្យបន្ទាប់មក

Pr(A∩B)=Pr(A)Pr(B)

ដូច្នេះ Pr(A)Pr(B)=0

ដែលមានន័យថាយ៉ាងហោចណាស់មួយនៃ Pr (A) និង Pr (B) គឺ 0 ។

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 12: តាង f និង g ជាអថេរឯករាជ្យពីរលើ {S, Pr} ដែល S = {a, b} និង Pr (a) Pr (b) ៦ = 0 ។ យើងចង់បញ្ជាក់ថាយ៉ាងហោចណាស់មួយនៃ f និង g គឺជា មុខងារថេរ

តាង u និង v ជាតម្លៃពីរនៅក្នុងជួរនៃ f និងនៃ g i.e. , f^{-1} (u) = ∅ and g^{-1}(v) 6 = ∅។ ដោយសារតែ f និង g មានភាពឯករាជ្យយើងមាន

Pr ({s | f (s) = u & g (s) = v}) = Pr ({s (f) (u) | u)) Pr ({s | g (s) = v}) ។

យើងមានករណីដូចខាងក្រោម:

1. {s|f(s) = u & g(s) = v}=∅. ករណីនេះ, យើងមានករណីរងបន្ទាប់ដូចតទៅ:

   (a) {s|f(s) = u}={a} និង {s|g(s) = v}={b}.

(b) {s|f(s) = u}={b} និង {s|g(s) = v}={a}.

នៅក្នុងសំណុំរងទាំងពីរយើងទទួលបាន Pr (a) Pr (b) = 0 ដែលផ្ទុយពីការស្មានរបស់យើង។

2. {s|f(s) = u & g(s) = v}={a}។ យើងមានករណីរងបន្ទាប់ដូចតទៅ:

(a) {s|f(s) = u}={a} and {s|g(s) = v}={a}។ករណីរងបន្ទាប់ Pr(a) = Pr(a)Pr(a),នាំអោយ Pr(a) = 1, Pr(b) = 0, a ផ្ទុយកមវិញ។

(b) {s|f(s) = u}={a,b} និង {s|g(s) = v}={a}។ ករណីរងបន្ទាប់នេះ fគឺចំនួនថេរ u, ព្រោះ គ្រប់ s∈{a,b} f(s) = u។

(c) {s|f(s) = u} = {a} និង {s|g(s) = v} = {a,b}។ធ្វើដូចគ្នា, gគឺជាចំនួនថេរមួយ។

3. {s | f (s) = u & g (s) = v} = {b} ។ អាគុយម៉ង់សម្រាប់ករណីនេះគឺស្រដៀងគ្នាទៅនឹងករណីមុន។

4. {s|f(s) = u & g(s) = v}={a,b}។វាបញ្ជាក់ច្បាស់ថាទាំង f និង gជាចំនួនថេរក្នុងករណីនេះ។

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 13: សំណុំនៃលទ្ធផលដែលអាចកើតមានទាំងអស់គឺ S = {2,3, ... 101} ។ ដែលបានអោយ p∈S, កំណត់បាន A (p) = A(p) ={x : x∈S,p ចែកដាច់ x និង ∄ a ចំនួនបឋម q < p ដូច្នេះ q ចែកដាច់ x} និង n (p) = ចំនួនធាតុនៅក្នុង A (p) ។ នៅក្នុងសញ្ញាណទាំងនេះវាងាយស្រួលក្នុងការសង្កេតថាចំនួនទឹកប្រាក់រំពឹងទុកដែលបានបង់ដោយ B ទៅ A គឺ

$$\sum_{p\in S\ p\ is\ a\ prime} p\frac{n(p)}{100}$$

ពីព្រោះសំរាប់ x នីមួយៗ∈ A (p) B ដើរត្តួជាប្រាក់ដុល្លារសំរាប់A។ សំរាប់តំលៃបឋម p∈ S តំលៃដែលទាក់ទងនៃ n (p) ត្រូវបានផ្តល់អោយក្នុងតារាងខាងក្រោម ។A សេចក្តីអត្ថាធិប្បាយសង្ខេបអំពីវិធីទទួលវាតាមតារាង

prime : n(p)	prime : g(p)	prime : g(p)
2:50	29:1	67:1
3:17	31:1	71:1
5:7	37:1	73:1
7:4	41:1	79:1
11:1	43:1	83:1
13:1	47:1	89:1
17:1	53:1	97:1
19:1	59:1	101:1
23:1	61:1	:

P=2: វាងាយស្រួលក្នុងការឃើញថា n (2) = 50 ពីព្រោះ 2 បែងចែកចំនួនគត់ចំនួន 50 នៅ S។

p=3: មាន $\frac{100}{3}$= 33 ចំនួនគត់អាចចែកបានដោយ 3 នៅក្នុង S ប៉ុន្តែក្នុងចំណោមចំនួនគត់ទាំងបីនេះ $\frac{100}{6}$ = 16 អាចបែងចែកបានដោយលេខ 2 ហើយដូច្នេះជារបស់ A (2) ។ ដូចនេះ n (3)= 33-16=17 p=5: ដើម្បីរកចំនួនធាតុដែលអាចចែកបានដោយ 5 ប៉ុន្តែមិនមែនដោយ 2 ឬ 3 ទេយើងទទួលបានចំនួនធាតុដែលអាចចែកបានដោយ 5 (មានចំនួន $\frac{100}{5}$ = 20 បន្ថែម) ហើយបន្ទាប់មកដកចំនួនគត់ដែលអាចបែងចែកបានដោយ 2x5=10 និងដោយ 3 × 5 = 15 ប៉ុន្តែដោយមិនរាប់បញ្ចូលធាតុបែបនេះពីរដង។ ដូច្នេះ n (5) = 20 − $\frac{100}{10}$ − $\frac{100}{15}$ + b100 30 c = 20−10−6 + 3 = 7។

p = 7 Using ដោយប្រើអាគុយម៉ង់ខាងលើ

$$\begin{aligned} n(7) &= \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{14} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{35} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{42} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{70} \right\rfloor \\ &= 14-7-4-2+2+1 \\ &= 4. \end{aligned}$$

គុណតម្លៃសម្រាប់សម័យដែលនៅសល់ S អាចទទួលបានតាមរបៀបស្រដៀងគ្នា។ ម៉្យាងវិញទៀតការសង្កេតសាមញ្ញមួយបង្ហាញថាសម្រាប់ចំនួនបឋមដែលនៅសេសសល់ក្នុង S តម្លៃ n (p) គឺ 1 ។ ចំពោះ x∈S ណាមួយប្រសិនបើវាជាពហុគុណនៃ p≥11 កត្តាផ្សេងទៀតត្រូវតែតូចជាង 11 ដូច្នេះអាចបែងចែកដោយលេខតូចជាង 11 និងមិនអាចរាប់បាននៅក្នុង A (p) លើកលែងតែពេល x = p។

សរុបមកចំនួនទឹកប្រាក់ដែលរំពឹងទុកនៃប្រាក់ B បង់ទៅ A គឺ $\sum_{p \in s} p \times \frac{g(P)}{100}$=13.58

ដូច្នេះ d=13.58 ជាចំនួនពិត

ផ្នែកទី២: ប្រសិនបើ A ចំណាយ ១០ ដុល្លារសម្រាប់ការលេងហើយរំពឹងថានឹងទទួលបាន ១៣.៥៨ ដុល្លារនោះចំនួនទឹកប្រាក់ដែល A រំពឹងថានឹងទទួលបានគឺ $13.58×10−$10×10 = $35.80.

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 14: ស៊េរីពិភពលោកមាន ៧ ប្រកួតប្រសិនបើក្នុង ៦ ប្រកួតដំបូងក្រុមនីមួយៗឈ្នះ ៣ ប្រកួត។ លំដាប់ដែលក្រុមនីមួយៗឈ្នះបីប្រកួតគឺមិនមានភាពត្រឹមត្រូវទេ។

$$\frac{6!}{3!.3!} = 20$$

លំដាប់ដែលអាចកើតមានសម្រាប់ការប្រកួតទី ៦ ដែលក្រុមនីមួយៗឈ្នះ ៣ ។ យើងមិនខ្វល់ថាក្រុមណាឈ្នះការប្រកួតទី ៧ នោះទេ។

សូមឱ្យក្រុមពីរត្រូវគ្នា។ សម្រាប់លំដាប់នីមួយៗនៃការប្រកួតដែលអាចកើតមានគឺ $(\frac{1}{2})^6$ ដូច្នេះប្រូបាប៊ីលីតេសរុបគឺ$(\frac{1}{2})^6$x20=$\frac{5}{16}$ប្រសិនបើក្រុមមួយជាក្រុមដែលចូលចិត្ត ៣ ទៅ ២ ជាងក្រុមផ្សេងទៀតនោះប្រូបាប៊ីលីតេនៃក្រុមដែលឈ្នះគឺ $\frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$ ហើយប្រូបាប៊ីលីតេនៃការឈ្នះក្រុមផ្សេងទៀតគឺ1- $\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$។

ដូច្នេះ សម្រាប់លំដាប់នីមួយៗនៃល្បែងទាំង ៦ ប្រូបាប៊ីលីតេគឺ$(\frac{3}{5})^3(\frac{2}{5})^3$។ ដូច្នេះប្រូបាប៊ីលីតេសរុបគឺ

$$(\frac{3}{5})^3(\frac{2}{5})^3 \times 20 = \frac{864}{3125}$$

តាមរយៈការប្រៀបធៀបលេខទាំងពីរខាងលើយើងសន្និដ្ឋានថាប្រសិនបើក្រុមពីរមិនត្រូវគ្នាទេនោះយើងនឹងមានឱកាសតិចជាងចំនួន ៧ ប្រកួត។

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 15: ដើម្បីរកចំនួនគត់ចំនួន ២ ដូចជាផលបូកអាចចែកបានដោយ ៥ យើងពិចារណាភាគថាសដូចខាងក្រោមនៃ {1,2, ... , 100}៖C_1 ={1,6,11,...,96}, C_2 ={2,7,12,...,97}, C_3 ={3,8,13,...,98}, C_4 ={4,9,14,...,99}, C_5 ={5,10,15,...,100}។

សំណុំនីមួយៗខាងលើមាន ២០ ធាតុហើយប្រសិនបើលេខមួយក្នុងចំណោមលេខ ២ ត្រូវបានជ្រើសរើសពីC1 បន្ទាប់មកលេខមួយទៀតត្រូវជ្រើសរើសពីC4 ប្រសិនបើមួយក្នុងចំណោមពីរត្រូវបានជ្រើសរើសពីC2 បន្ទាប់មកលេខមួយទៀតត្រូវជ្រើសរើសពីC3 ឬ ទាំងពីរត្រូវតែត្រូវបានជ្រើសរើសពីC5 ។ ដូច្នេះមាន $\binom{20}{1}\binom{20}{1}$ +

$\binom{20}{1}\binom{20}{1}+\binom{20}{2}$= 990 តាមផ្លូវដើម្បីជ្រើសរើសលេខពីរពី {1,2,...,100} ដែលផលបូករបស់ពួកគេគឺ អាចបែងចែកបាន។ ចែក 990 គុណនឹង $\binom{100}{2}$ទំហំនៃទំហំគំរូដើម្បីទទួលបានប្រូបាប 0.20

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 16: ដើម្បីបញ្ជាក់ថា (T, G) គឺជាចន្លោះគំរូយើងត្រូវបង្ហាញវា

$$\sum_{v\in T} G(v) = 1$$

ដោយការបែងចែករបស់ G (v) ផ្នែកខាងឆ្វេងនៃសមីការ (9.6) អាចត្រូវបានសរសេរឡើងវិញដូចជា៖

សមីការ (៩.៧) គឺជាសមីការទៅ$\sum_{v\in T}$ $\sum_{v\in T}\left(\sum_{a\in S, G(a)=v}\Pr(a)\right)$.') គឺជាចន្លោះគំរូ។

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 17:

ប្រសិនបើការធ្វើសមាធិជំនួសការរកគ្រាប់បាល់បញ្ចូលទីគ្រាប់បាល់ទី1 ដើម្បីទទួលបានបាល់ពណ៌ខ្មៅទី 1 និងប្រូបាប៊ីលីតេដែលជាប់ទាក់ទងគឺ៖

Number of balls	Probability
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$
3	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{3}$

ដូច្នេះ ចំនួនគ្រាប់បាល់ដែលរំពឹងទុកនឹងត្រូវបានទាញ $1\times\frac{1}{3}+2\times\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}=2$ ប្រសិនបើបាល់ត្រូវបានគូរជាមួយនឹងការជំនួសបន្ទាប់មកប្រូបាប៊ីលីតេនៃការជ្រើសរើសការផ្លាស់ប្តូរគ្រាប់បាល់មានលក្ខណៈខុសៗគ្នាពួកគេបានលេខ $\frac{2}{3}$ និង $\frac{1}{3}$ រៀងៗខ្លួនសម្រាប់ការចាប់បាល់នីមួយៗ។ លើសពីនេះទៅទៀតវាអាចធ្វើឱ្យយើងដឹងថាយើងប្រហែលជាមិនដែលឃើញបាល់ខ្មៅទេ។ ឧបមាថាគ្រាប់បាល់ទី n ត្រូវបានគេទាញដើម្បីមើលឃើញបាល់ខ្មៅដំបូងបង្អស់ពោលគឺគ្រាប់បាល់ខ្មៅត្រូវបានជ្រើសរើសក្នុងការចាប់ឆ្នោតទី ១ ប្រូបាប៊ីលីតេសម្រាប់រឿងនេះកើតឡើងគឺ $(\frac{2}{3})^{n-1}\frac{1}{3}$ដែល $(\frac{2}{3})^{n-1}$ គឺជាប្រូបាប៊ីលីតេនៃការគូរបាល់ពណ៌ស n – 1 ដងក្នុងមួយជួរហើយ $\frac{1}{3}$ គឺប្រូបាប៊ីលីតេនៃការគូរខ្មៅ បាល់នៅក្នុង n នេះ។ ដូច្នេះចំនួនរំពឹងនៃការចាប់រង្វាន់គឺ៖E=$\sum_{n\geq 1} n.\frac{1}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ដោយប្រើវិធីសាស្ត្រ 7 វាអាចឃើញថា E = 3 ។

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 18: មានតម្លៃ ៦ ដែលអាចធ្វើបាននៃ | x – y | តម្លៃទាំងនេះនិងប្រូបាប៊ីលីតេដែលទាក់ទងត្រូវបានបង្ហាញដូចខាងក្រោម

$\lvert x-y\rvert$	0	1	2	3	4	5
Probability	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

ចំពោះតវ៉ាន់នីមួយៗរាប់ចំនួននៃតម្លៃដែលអាចមាន x និង y ហើយបន្ទាប់មកចែកលេខដែលទទួលបានដោយ ៣៦ ដើម្បីទទួលបានប្រូបាប។ យើងបង្ហាញពីនីតិវិធីសម្រាប់ករណីមួយ។ | x – y | = 3. ចំណាំទីមួយថា x និង y មានឥរិយាបថស៊ីមេទ្រីនិងចំណាំទី ២ ដែលគូ x និង y អាចធ្វើបានដែល x <y គឺ (1,4),(2,5) និង (3,6) ។ ដូច្នេះមានករណីចំនួន ៦ ដែលអាចកើតមានការរំពឹងទុកនៃការឈ្នះ | x – y | ចំនួនដុល្លារគឺ $0\times\frac{6}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{8}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{4}{36}+5\times\frac{2}{36}=\frac{35}{18}$

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 19: តាងតំលៃមុខនៃគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងបីគឺ x, y និង z, m = អតិបរមា (x, y, z), និង μ = នាទី (x, y, z) ។ យើងចង់រកការរំពឹងទុករបស់ m - μ ។ តម្លៃប្រាំមួយដែលអាចមាននៃ | m – μ | និងប្រូបាប៊ីលីតេដែលជាប់ទាក់ទងត្រូវបានផ្តល់ជូនខាងក្រោម។

$\lvert m-\mu \rvert$	5	4	3	2	1	0
Probability	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

តម្លៃទាំងនេះគឺដូចគ្នានឹងបញ្ហាមុនដែរដូចនេះតម្លៃដែលរំពឹងទុក $\frac{38}{18}$. ដើម្បីបង្ហាញពីការគណនាប្រូបាប៊ីលីតេ សូមពិចារណាលើករណី | m − μ | = 5 និង | m − μ | = 4 តើយើងអាចទទួលបានដោយរបៀបណា? | m − μ | = 5? នេះអាចទៅរួចប្រសិនបើយ៉ាងហោចណាស់ចំនួនមួយនៃ x, y និង z យកតម្លៃ 6 យ៉ាងហោចណាស់មួយក្នុងចំណោមពីរដែលនៅសល់ត្រូវយកតម្លៃ 1 ហើយលេខ 3 នៅសល់ត្រូវបានអនុញ្ញាតិអោយយកតម្លៃណាមួយរវាង 1 និង 6 ។ មានវិធីបីយ៉ាង ជ្រើសរើសមរណភាពដែលមានតម្លៃធំបំផុតពីរវិធីដើម្បីជ្រើសរើសមរណភាពដែលយកតម្លៃតូចបំផុតនិង 6 វិធីសម្រាប់មរណភាពដែលនៅសល់។ ដូច្នេះប្រូបាប៊ីលីតេនៃ | m − μ | = 5 គឺ $\frac{2\times30}{6\times6\times6}=\frac{10}{36}$

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 20: យើងអាចជ្រើសរើសការប្រកួត 4 ក្នុងចំណោម 6 ដែលឈ្នះនៅក្នុង $\binom{6}{4}$ហើយបើប្រូបាប៊ីលីតេនៃការឈ្នះល្បែងមួយគឺ p ដូច្នេះប្រូបាប៊ីលីតេនៃការឈ្នះ 4 ក្នុងចំណោម 6 ហ្គេមគឺ $\binom{6}{4}p^4(1-p)^2$។

ដូច្នេះ

P	ប្រប៊ាប៊ីលីតេ
0.5	0.234
0.6	0.311
0.4	0.0138

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 21: មានស្ថានីយកុំព្យូទ័រចំនួន 3 ។ ប្រសិនបើតិចជាងឬស្មើនិស្សិតបីនាក់ព្យាយាមប្រើស្ថានីយបន្ទាប់មកគ្មានសិស្សណាម្នាក់រង់ចាំនៅជួរទេ។ ដូច្នេះចម្លើយនៃបញ្ហានេះគឺ៖

ប្រូបាប៊ីលីតេ (សិស្ស ៣ នាក់ឬតិចជាងប្រើស្ថានីយ)

$$l-\binom{15}{0}(0.9)^1 5+\binom{15}{1}(0.9)^1 4(0.1)+\binom{15}{2}(0.9)^1 3(0.1)^2+\binom{15}{3}(0.9)^1 2(0.1)^3=0.1791$$

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 22:

$\lambda=\frac{15}{60/12}=3.$ ដោយប្រើប្រាស់រូបមន្ត $\Pr(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ យើងបាន៖ $\Pr(4)=0.168$

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 23:

1. ដើម្បីបញ្ជាក់ថា (S, Pr) គឺជាចន្លោះគំរូយើងត្រូវពិនិត្យមើលថាសម្រាប់គ្រប់ S ∈ S, 0≤Pr (s) ≤1។ បន្ទាប់មក

$\sum_{s\in S}\Pr(s)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$

ដូច្នេះ (S, Pr) គឺជាចន្លោះគំរូ

2. តាង {1,2,6} និង {2,4} ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរ

Pr({1,2,6}∩{2,4}=Pr({2})=$\frac{1}{6}$

$\Pr(\{1,2,6\})=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

$\Pr(\{2,4\})=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

នៅពេលដែល $\Pr(\{1,2,6\}\cap\{2,4\}) = \Pr(\{1,2,6\})\Pr(\{2,4\})$,{ 1,2,6}និង{2,,4}គឺជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា f និង g មិនមានអថេរចៃដន្យឯករាជ្យសម្រាប់ហេតុផលខាងក្រោម៖

$\Pr(\{s|f(s) = 0 \;\&\; g(s) = 3\}) = \Pr(\{2\}) =\frac{1}{6}$

$\Pr(\{s|f(s) = 0\}) = \Pr(\{2,4,6\}) =\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$,

$\Pr(\{s|g(s) = 3\}) = \Pr(\{1,2,3\})=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{7}{12}$,

និង $\frac{1}{6}\neq\frac{5}{12}\times\frac{7}{12}$

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 24:

$$
\begin{aligned}
E(f+g) &= \sum_{s\in S}(f+g)(s).\Pr(s)\\
&=\left(f(1)+g(1)\right).\Pr(1)+\ldots+\left(f(6)+g(6)\right).\Pr(6)\\
&=4.\frac{1}{4}+3.\frac{1}{6}+4.\frac{1}{6}+6.\frac{1}{6}+7.\frac{1}{6}+6.\frac{1}{12}\\
&=\frac{29}{6}
\end{aligned}
$$

ដោយសារ f និង g មិនឯករាជ្យយើងមិនអាចប្រើសមភាពបានទេ

$Var(f+g) = Var(f)+Var(g).$

យើងត្រូវគណនា Var (f + g) ពីអង្គភាពដោយផ្ទាល់ពោលគឺ I,e..;

$Var(f+g) = E(f+g)^2-\left(E(f+g)\right)^2$

$$
\begin{aligned}
E(f+g)^2 &= \sum_{s\in S}(f+g)^2(s).\Pr(s)\\
&=\left(f(1)+g(1)\right)^2.\Pr(1)+\ldots+\left(f(6)+g(6)\right).\Pr(6)\\
&=4^2.\frac{1}{4}+3^2.\frac{1}{6}+4^2.\frac{1}{6}+6^2.\frac{1}{6}+7^2.\frac{1}{6}+6^2.\frac{1}{12}\\
&=\frac{304}{12}
\end{aligned}
$$

ដូច្នេះ $Var(f+g)=\frac{304}{12}-\frac{29^2}{6^2}=\frac{71}{36}.$

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 25: ហាងឆេងដែលកម្មវិធីនឹងដំណើរការគឺ 2:1 ។

ដូច្នេះ Pr (កម្មវិធីមួយនឹងដំណើរការ) = $\frac{2}{3}$ តាង B បញ្ជាក់ព្រឹត្តិការណ៍ដែលកម្មវិធី ៤ រឺច្រើននឹងដំណើរការហើយ A_j បញ្ជាក់ថាកម្មវិធី j នឹងដំណើរការ ។ បន្ទាប់មក

$$
\begin{aligned}
\Pr(B) &= \Pr(A_4 \cup A_5 \cup A_6) \\
&= \Pr(A_4) + \Pr(A_5) + \Pr(A_6) \\
&= \binom{6}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{6}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3} + \binom{6}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^6 \\
&= 0.5706
\end{aligned}
$$

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 26: យើងមាន$\sum_{1\leq k\leq n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ បញ្ចូរ ប្រូបាប៊ីលីតេនៃការជ្រើសរើសរាប់ k និងទទួលបានចំនួន k^2 គឺ $\frac{2k}{n(n+1)}$, ចំពោះ k=1,2,…,n. ដូច្នេះចំនួនទឹកប្រាក់រំពឹងទុកដែលទទួលបានគឺ

$$
\sum_{1\leq k\leq n} \frac{2k^3}{n(n+1)} = \frac{2n^2(n+1)^2}{4n(n+1)} = \frac{n(n+1)}{2}
$$

ដំណោះស្រាយបញ្ហា 27: គណនាលំហាត់

$$\mu = 10{,}00 \times \frac{1}{2} = 5{,}000 \text{ និង}$$

$\sigma = \sqrt{10{,}000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{100}{2} = 50$,

និង 1-$\frac{1}{k^2}$=0.99 ទិន្នផល k = 10 ។ ដូច្នេះដោយភាពមិនស្មើភាពគ្នារបស់ Chebyshev's យើងដឹងថាប្រូបាប៊ីលីតេយ៉ាងហោចណាស់ 0.99 ដែលយើងនឹងទទួលបានពី 5,000-10x50=4,500និង 5,000 + 10 × 50 = 5,500 ។ ដូច្នេះប្រូបាប៊ីលីតេគឺយ៉ាងហោចណាស់ 0,99 ដែលសមាមាត្រនៃក្បាលនឹងធ្លាក់ចុះរវាង $\frac{4500}{10000} = 0.45$ និង $\frac{5500}{10000} = 0.55$។

សន្និដ្ឋាន

ឆ្លងតាមរយៈការសិក្សាស្រាវជ្រាវ និងដោះស្រាយខាងលើយើងសង្កេតឃើញថាដំណោះស្រាយគណិតវិទ្យាសម្រាប់ កុំព្យូទ័រនេះជាវិធីស្រាស្ត្រមួយ ដែលអាចជួយមួយផ្នែកដល់ សិស្សានុសិស្ស និស្សិត អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវ ដែលត្រូវការចំណេះដឹង ដំណោះស្រាយលំហាត់ដោយមិនពឹងផ្អែកលើឧបករណ៍ អេឡិកត្រូនិក ម៉ាស៊ីនគិតលេខ កុំព្យូទ័រ ទូរស័ព្ទដៃ ដើម្បីជួយ ជាប្រយោជន៍លើការអភិវឌ្ឍ សមត្ថភាព ជាដើម។ ពិតណាស់ថាមានទ្រឹស្តីជាច្រើនដែលត្រូវចងចាំ និងស្វែងយល់ ប៉ុន្តែទោះជាយ៉ាងណាវាប្រាកដជួយសម្រួលមួយផ្នែកធំដល់ការគណនាលំហាត់ ។

ទោះបីជាការស្រាវជ្រាវ និងចងក្រងរបស់យើងពុំទានសម្រេចបានវត្ថុបំណងដ៏ល្អប្រពៃនៃការរីកចម្រើនរបស់មុខវិជ្ជាវិទ្យាសាស្ត្រក៏ដោយ ប៉ុន្តែទោះបីជាយ៉ាងណាក៏យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថាការរាបរៀងនេះនឹងបានចូលរួមចំណែកដល់ការស្រាវជ្រាវរបស់អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវជំនាន់ក្រោយ ដើម្បីធ្វើការស្រាវជ្រាវបន្តទៀតផងដែរ។

ហេតុនេះ គណិតវិទ្យាសម្រាប់មុខវិជ្ជាកុំព្យូទ័រ គឺជាការអនុវត្តន៍ក្នុងការគណនារាលលំហាត់ សម្រាប់សំណុំ តក្កវិទ្យា អនុមាណរួមគណិតវិទ្យា ទំនាក់ទំនង អនុគមន៍ ចំនួនគត់ ការរាប់ និងទ្រឹស្តីពហុជា ទំនាក់ទ

នងកំណើននិងអនុគមន៍បង្កប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរដាច់និងប្រើប្រាស់ជាប្រូក្រាមនៅក្នុងម៉ាស៊ីនអេឡិចត្រូនិចជាដើម។

ឯកសារយោង

១. Problem on Discrete Mathematics, New York , USA ,2007
២.លឹម ជា "គន្លឹះអនុគមន៍" ថ្នាក់ទី១២ ឆ្នាំ១៩៧៥ ស្របតាមខេមរយានកម្ម
៣.សួនសុវណ្ណ វិភាគចំនួនពិត ភាគ១ , សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០០៨
៤. ជ ចន្ទដារា Data Structures និង Algorithms , សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០១៤

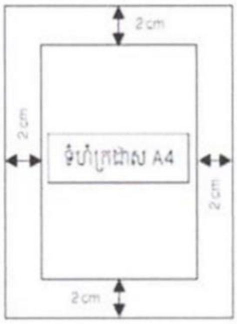
ឧបសម្ព័ន្ធទី៧

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

....

ទម្រង់នៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា



១. **ការកំណត់ និងតម្រឹមក្រដាស៖**

- ប្រភេទក្រដាសដែលត្រូវប្រើ A4
- ការតម្រឹមខាងលើ ២ សម
- ការតម្រឹមខាងក្រោម ២ សម
- ការតម្រឹមខាងឆ្វេង ២ សម
- ការតម្រឹមខាងស្តាំ ២ សម

២. **ចំណងជើង និងអត្ថន័យក្នុងជំពូកនីមួយៗ៖**

- ចំណងជើងមេរៀន Khmer OS Moul Light ទំហំ១៤
- ចំណងជើងរងទី១ Khmer OS Moul Light ទំហំ១២
- ចំណងជើងរងទី២ Khmer OS Moul Light ទំហំ១២
- ខ្លឹមសារអត្ថបទ Khmer OS Siemreap ទំហំ១២

៣. **ការកំណត់គម្លាតនៃល្បះ** (Line Spacing)៖

- Single Space

គណិតវិទ្យាកុំព្យូទ័រ នៃសាកលវិទ្យាល័យ ហេង សំរិន ត្បូងឃ្មុំ

សាកលវិទ្យាល័យ ហេង សំរិន ត្បូងឃ្មុំ

UHST

UNIVERSITY OF HENG SAMRIN THBONGKHMUM