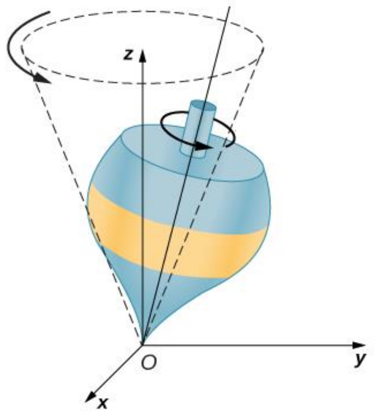
រូបវិទ្យា

មេកានិចទ្រឹស្តី



ហង់ ស៊ីម

២០២២

ភាគ២

គាំទ្រថវិកាលើការរៀបរៀងនិពន្ធនិងកែលម្អដោយ
មូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និង នវានុវត្តន៍

មេកានិចទ្រឹស្តី

ហង់ ស៊ីម

២០២២

ភាគ២

CAMBODIA
RESEARCH CREATIVITY INNOVATION

គាំទ្រថវិកាលើការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អដោយ
មូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍

សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
មហាវិទ្យាល័យវិទ្យាសាស្ត្រ
ដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យា

គណៈកម្មការនិពន្ធ

លោក **ហង់ ស៊ីម** សាស្ត្រាចារ្យដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យា

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ

លោកបណ្ឌិត **យុន គឹមលាង** ប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យា
លោកស្រីបណ្ឌិត **ស៊ូ កល្យាណ** អនុប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យា
លោក **ហូ សុខបាន្នី** សាស្ត្រាចារ្យដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យា

បុព្វកថា

ដំណើរអភិវឌ្ឍនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជានៅក្នុងយុគសម័យទំនើបនេះ ជាមេរៀនដ៏ជោគជ័យបំផុតមួយ ដែលចាប់ឫសគល់ចេញពីការបញ្ចប់របបប្រល័យពូជសាសន៍ ការបញ្ចប់សង្គ្រាម ការផ្សះផ្សារជាតិ ការកសាងមូលដ្ឋានរឹងមាំនៃសន្តិភាពនិងស្ថេរភាព និងការអភិវឌ្ឍសេដ្ឋកិច្ច។ នៅក្រោយពេលដែលសន្តិភាពត្រូវបានកើតឡើងដោយបរិបូរណ៍នៅឆ្នាំ១៩៩៨ កម្ពុជាទទួលកំណើនសេដ្ឋកិច្ចខ្ពស់ គឺប្រមាណ៨% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ លើសពីនេះទៀត អត្រានៃភាពក្រីក្រត្រូវបានកាត់បន្ថយពីប្រមាណ៥៣% នៅឆ្នាំ២០០៤ មកនៅទាបជាង១០% នៅឆ្នាំ២០១៩។ ដំណើរនៃការអភិវឌ្ឍជាតិជាសកម្មភាពដែលបន្តទៅមុខជាប់ជានិច្ច ហើយគោលនយោបាយថ្មីៗដែលមានលក្ខណៈអន្តរវិស័យគ្របដណ្តប់ក៏កំពុងលេចរូបរាងឡើង ដើម្បីតម្រង់ទិសកម្ពុជាឆ្ពោះទៅកាន់ប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលមធ្យមកម្រិតខ្ពស់នៅឆ្នាំ២០៣០ និងឈានឡើងជាប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលខ្ពស់ នៅឆ្នាំ២០៥០។ ការប្រែប្រួលឆាប់រហ័សនៃនិម្មាបនកម្មពិភពលោកនិងតំបន់ រួមទាំងទំនាក់ទំនងភូមិសាស្ត្រនយោបាយ បានផ្តល់កាលានុវត្តភាពសម្រាប់ការអភិវឌ្ឍឧស្សាហកម្មនៅកម្ពុជា ដែលត្រូវបានរាជរដ្ឋាភិបាលចាត់ទុកជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃកំណើនសេដ្ឋកិច្ចកម្ពុជា។ រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជាបាន និងកំពុងបន្តពង្រឹងនិងអភិវឌ្ឍវិស័យអប់រំឆ្ពោះទៅរកការស្រាវជ្រាវនិងនវានុវត្តន៍ ដើម្បីពង្រឹងសមត្ថភាពនិងជំនាញរបស់ធនធានមនុស្សនៅកម្ពុជា ឱ្យស្របទៅនឹងបរិបទថ្មីនៃការអភិវឌ្ឍ ជាពិសេសការពង្រឹងសហគ្រិនភាពក្នុងការរៀបចំម៉ូដែលធុរកិច្ចថ្មីៗ។ ដើម្បីចាប់យកកាលានុវត្តភាពពីបដិវត្តន៍ឧស្សាហកម្មទី៤ និងសេដ្ឋកិច្ចឌីជីថលដែលកំពុងផុសផុលឡើង ប្រព័ន្ធអេកូឡូហ្ស៊ីដែលបង្កលក្ខណៈអំណោយផលដល់ការបង្កើតថ្មី នវានុវត្តន៍ ការស្រាវជ្រាវ និងអភិវឌ្ឍន៍ត្រូវតែមានការកែលម្អ។

បណ្តាប្រទេសនៅទ្វីបអាស៊ីកំពុងនាំមុខក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ដោយមានភាគហ៊ុនប្រមាណ៤៤% នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក។ ប្រទេសចិនកំពុងបន្តកសាងហេដ្ឋារចនាសម្ព័ន្ធនៃការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ក៏ដូចជាសមត្ថភាពមនុស្ស។ ផ្ទុយទៅវិញប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូងនិងអាហ្វ្រិក កំពុងស្ថិតនៅឆ្ងាយពីការវិនិយោគនេះ ហើយជាលទ្ធផលប្រទេសទាំងនោះក៏ពុំមានកំណើនសេដ្ឋកិច្ចគួរឱ្យកត់សម្គាល់ដែរ។ ទុនវិនិយោគសរុបលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍរបស់ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូវនិងអាហ្វ្រិក មានប្រមាណ៥%នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក ក្នុងពេលដែលតំបន់ទាំង២នេះមានប្រជាជនប្រមាណ២០%នៃប្រជាជនពិភពលោក។ ប្រទេសចំនួន៦ដែលមានលំដាប់ខ្ពស់ជាងគេនៅក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ រួមមានសហរដ្ឋអាមេរិក ចិន ជប៉ុន អាល្លឺម៉ង់ ឥណ្ឌា និងកូរ៉េខាងត្បូង ដែលស្មើនឹងប្រមាណ៧០%នៃទុនវិនិយោគសរុបរបស់ពិភពលោក។

តើចំណេះដឹង ផលិតផល និងសេវាកម្មថ្មីទាំងនេះកើតឡើងពីអ្វី? ហើយកើតឡើងដោយរបៀបណា? ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាកំពុងតែកសាងមូលដ្ឋានសម្រាប់ការត្រៀមខ្លួនទទួល និងប្រកួតប្រជែងក្នុងយុគសម័យបដិវត្តឧស្សាហកម្មទី៤ នៅក្នុងសេដ្ឋកិច្ចដែលផ្អែកលើពុទ្ធិ ហើយដែលប្រការនេះ

ចាំបាច់តម្រូវឱ្យពលរដ្ឋកម្ពុជា ត្រូវក្លាយខ្លួនជាពលរដ្ឋឌីជីថល ពលរដ្ឋសកល និងពលរដ្ឋដែលប្រកបដោយការទទួលខុសត្រូវ ដែលមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ចែកចាយ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិដើម្បីទទួលមនុញ្ញផល និងរួមចំណែកក្នុងកំណើន។ ធនាគារពិភពលោកបានធ្វើការកត់សម្គាល់តាំងពីឆ្នាំ២០០២នូវបម្លាស់ប្តូរនៃមូលដ្ឋានសេដ្ឋកិច្ច ពីសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើកម្លាំងពលកម្ម និងធនធានអតិកម្ម (Labour and Resource Based Economy) ទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិ (Knowledge Based-Economy) ដែលក្នុងន័យនេះ ពុទ្ធិគឺជាគន្លឹះនៃការអភិវឌ្ឍ។ អាស្រ័យហេតុនេះ នៅលើគន្លងដែលកម្ពុជាកំពុងធ្វើដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចឌីជីថល សង្គមកម្ពុជាត្រូវតែមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ជ្រើសរើស បន្សាំ បង្កើតមុខរបរ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិ ដើម្បីរក្សានិរន្តរភាពនៃកំណើន និងកែលម្អជីវភាពរស់នៅ។ សមត្ថភាពទាំងនេះ អាចកើតឡើងនៅពេលពលរដ្ឋកម្ពុជាមានឱកាសក្នុងការទទួលបានបទពិសោធន៍ពីការស្រាវជ្រាវ ការបណ្តុះគំនិតច្នៃប្រឌិត និងការស្វែងរកនវានុវត្តន៍។

កំណែទម្រង់វិស័យអប់រំ គឺជាការត្រួសត្រាយមាគ៌ាសម្រាប់ដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ និងប្រជាពលរដ្ឋប្រកបដោយភាពរស់រវើក។ តាមរយៈមូលដ្ឋានអប់រំ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិនឹងប្រមូលផ្តុំ បង្កើត និងចែករំលែក ទៅកាន់សមាជិកក្នុងសង្គមនូវសម្បទាអប់រំ ពិសេសគឺពុទ្ធិសម្បទាក្នុងបុព្វហេតុនៃមនុស្សជាតិនិងឧត្តមប្រយោជន៍នៃប្រទេស។ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ គឺពុំគ្រាន់តែជាសង្គមដែលសម្បូរព័ត៌មានប៉ុណ្ណោះទេ តែជាសង្គមដែលប្រជាពលរដ្ឋអាចធ្វើបរិវត្តកម្មពីព័ត៌មានទៅជាមូលធនប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។ ការរីកចម្រើនទៅមុខជាលំដាប់នៃបច្ចេកវិទ្យានិងតំណភ្ជាប់ បានពង្រីកព្រំដែននៃការចូលទៅកាន់ និងការទទួលបានព័ត៌មានជាសកល ហើយដែលក្នុងន័យនេះ ការអប់រំនឹងបន្តវិវត្តទៅមុខនិងមានការផ្លាស់ប្តូរ។ សង្គមមួយដែលមានអំណាន និងរបាប់ជាបុរេលក្ខខណ្ឌនៃជីវភាពប្រចាំថ្ងៃនៃប្រជាពលរដ្ឋ ពេលនោះបំណិននៃអំណាន និពន្ធ និងការគណនាលេខនព្វន្ត គឺជាចលករនៃការរៀនរបស់សិស្ស។ ជាតុដ៏ចម្បងមួយដែលស្ថិតនៅក្នុងការកសាងសង្គមដែលប្រកបដោយពុទ្ធិគឺសៀវភៅសិក្សា ហើយការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សាជាប្រចាំ គឺជានវានុវត្តន៍នៃវិស័យអប់រំដែលនាំទៅរកការសិក្សាពេញមួយជីវិត ការអភិវឌ្ឍសម្បទាអប់រំ និងការចែករំលែកចំណេះដឹង។ មូលដ្ឋានអប់រំ ជាពិសេសគឺគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាត្រូវមានតួនាទីដែលប្រកបដោយការឆ្លើយតប ចំពោះតម្រូវការខាងលើនេះ។ សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំត្រូវបន្តសិក្សាជាប់ជានិច្ច តាមរយៈការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ហើយដែលសៀវភៅសិក្សាទាំងនេះនឹងក្លាយជាស្ពាននៃទំនាក់ទំនងរវាងនវានុវត្តន៍នៃបច្ចេកវិទ្យា និងការរៀននិងបង្រៀននៅក្នុងថ្នាក់រៀន។

សង្គមដែលប្រកបពុទ្ធិ ក៏ជាសង្គមដែលបណ្តុះឱ្យមានរចនាសម្ព័ន្ធទន់នៃសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិដែរ។ ឧទាហរណ៍ជាក់ស្តែងនៃបែបផែននេះរួមមាន Silicon Valley នៃសហរដ្ឋអាមេរិក សួនឧស្សាហកម្មវិស្វកម្មអាកាសយានយន្តនិងយានយន្តនៅទីក្រុង Munich ប្រទេសអាល្លឺម៉ង់ តំបន់ជីវបច្ចេកវិទ្យានៅក្រុង Hyderabad ប្រទេសឥណ្ឌា តំបន់ផលិតគ្រឿងអេឡិចត្រូនិកនិងសារគមនាគមន៍ឌីជីថលនៅទីក្រុង Seoul ប្រទេសកូរេខាងត្បូង ក៏ដូចជាសួនឧស្សាហកម្មថាមពល និងឥន្ទនគីមីសាស្ត្រនៃប្រទេសប្រេស៊ីល ហើយក៏នៅមានទីក្រុងនៃប្រទេសជាច្រើនទៀតនៅលើពិភពលោក។ លក្ខណៈសម្បត្តិ

នៃទីក្រុងទាំងនេះគឺការប្រើប្រាស់និន្នាការនៃការអភិវឌ្ឍដែលជំរុញ និងតម្រង់ទិសដោយចំណេះដឹង ហើយដែលចំណេះដឹងទាំងនោះកើតចេញជាដំបូងពីការវិនិយោគទៅលើគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា ស្ថាប័នស្រាវជ្រាវ មជ្ឈមណ្ឌលឧត្តមភាពនៃជំនាញជាន់ខ្ពស់ ការប្រកួតប្រជែងដោយគុណាធិបតេយ្យ និងជាពិសេសគឺការបណ្ដុះវប្បធម៌អំណាននិងនិពន្ធសៀវភៅ។ ល្បឿននៃការរីកចម្រើនផ្នែកពុទ្ធិ និងបច្ចេកវិទ្យាកំពុងមានសន្ទុះលឿនជាងអ្វីដែលសិស្ស និងនិស្សិតអាចទទួលបានពីគ្រូនៅគ្រឹះស្ថានសិក្សា ដែលធ្វើឱ្យគោលដៅនៃការអប់រំនៅពេលបច្ចុប្បន្ននេះ មានការប្រឈមខ្លាំងជាងពេលណាទាំងអស់។ ឧទាហរណ៍ក្នុងមួយឆ្នាំ មានសៀវភៅជាង២,២លានចំណងជើង ត្រូវបានសរសេរនិងបោះពុម្ព ដែលក្នុងនោះប្រទេសចិនមាន៤៤០ពាន់ ចំណែកឯសហរដ្ឋអាមេរិកមាន៣០៥ពាន់ និងប្រទេសរុស្ស៊ីមាន១២០ពាន់ចំណងជើង។

ខណៈពេលដែលបច្ចេកវិទ្យាកំពុងរីកចម្រើនជារៀងរាល់ថ្ងៃ មធ្យោបាយសម្រាប់អំណានក៏មានច្រើនជម្រើសសម្រាប់សិស្ស-និស្សិត និងសាធារណៈជន រួមមានការអានសៀវភៅ ការអានលើឧបករណ៍អេឡិចត្រូនិក ការអានដោយប្រើទូរសព្ទវៃឆ្លាត និងការអានលើកុំព្យូទ័រ ដែលសុទ្ធសឹងជាមធ្យោបាយសំខាន់ៗដែលនាំអ្នកអានទាំងឡាយឱ្យសម្រេចគោលបំណងអានរបស់ខ្លួន។ម្យ៉ាងវិញទៀត អំណានដោយប្រើមធ្យោបាយបច្ចេកវិទ្យាទំនើប ចំណាយពេលតិច ងាយស្រួលអាន និងជួយដល់បរិស្ថានមួយកម្រិតទៀត។ នាពេលបច្ចុប្បន្ន សិស្ស-និស្សិត និងសាធារណៈជនកម្ពុជាដែលស្រឡាញ់អំណានកំពុងតែប្រើប្រាស់មធ្យោបាយអំណានទាំងនេះ។ បើយើងក្រឡេកមើលទៅប្រទេសជឿនលឿន ទោះបីជាបច្ចេកវិទ្យារីកចម្រើនខ្លាំងយ៉ាងណា អំណានតាមរយៈសៀវភៅនៅតែមានសន្ទុះដដែល។ ម្យ៉ាងវិញទៀតបច្ចេកវិទ្យាអានបែបទំនើបតាមរយៈឧបករណ៍ទំនើប អាស្រ័យលើលទ្ធភាពនៃធនធានអប់រំឌីជីថល និងមាតិកាឌីជីថលគ្រប់គ្រាន់ដែលបានផលិត និងបង្ហោះចែកចាយសម្រាប់អំណាន។

ក្នុងបរិបទកម្ពុជា ជាពិសេសក្នុងបរិការណ៍នៃការផ្ទុះរីករាលដាលនៃជំងឺកូវីដ-១៩ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានជំរុញឱ្យមានបរិវត្តកម្មឌីជីថលនៅក្នុងអេកូស៊ីស្តែមនៃការអប់រំ ជាពិសេសការអប់រំតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិកនិងការអប់រំពីចម្ងាយ ដើម្បីលើកកម្ពស់អំណាន តាមរយៈការផលិតមាតិកាឌីជីថលដែលមានភាពចំរុះ ការកសាងសមត្ថភាពផ្នែកតំណភ្ជាប់និងវេទិកាឌីជីថល ការពង្រីកវិសាលភាពនៃមជ្ឈមណ្ឌលទិន្នន័យ និងការលើកកម្ពស់គុណភាពនៃការផលិតធនធានអប់រំឌីជីថល គួបផ្សំជាមួយការចែកសន្លឹកកិច្ចការឱ្យសិស្សយកទៅរៀននៅផ្ទះ និងការចុះទៅជួបជាមួយសិស្សជាបណ្ដុំនៅតាមសហគមន៍។ ក្នុងន័យលើកកម្ពស់អំណាន និងភាពសម្បូរបែបនៃធនធានសៀវភៅសិក្សា ឱ្យកាន់តែមានប្រសិទ្ធភាពនិងភាពសក្ដិសិទ្ធិ និងផ្ដល់ឱកាសអំណានកាន់តែច្រើនថែមទៀតដល់សិស្សានុសិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជន ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាលើកទឹកចិត្តនូវចំណុចមួយចំនួនដូចខាងក្រោម៖

១. សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំ សូមបន្តនិងបង្កើនការបោះពុម្ពស្នាដៃបន្ថែមទៀត ដើម្បីធ្វើឱ្យធនធានសម្រាប់អំណានកាន់តែសម្បូរបែប ជាពិសេសធនធានអំណានជាខេមរភាសា

២. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា សូមផ្តល់លទ្ធភាពគ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ និងនិស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សាអាចចូលរួមអាន និងសិក្សាស្រាវជ្រាវតាមគ្រប់លទ្ធភាពជាមួយធនធានអំណាន ជាពិសេសការរៀបចំឱ្យមានពេលវេលាសម្រាប់សហសិក្សា និងអំណានក្នុងបណ្ណាល័យ
៣. សាស្ត្រាចារ្យតាមមុខវិជ្ជា និងអ្នកស្រាវជ្រាវតាមជំនាញឬវិស័យ ត្រូវរៀបចំដំណើរការរៀនបង្រៀន និងស្រាវជ្រាវដែលមានដាក់បញ្ចូលកិច្ចការស្វ័យសិក្សា សហសិក្សា ឬការស្រាវជ្រាវបណ្ណាល័យដែលតម្រូវឱ្យនិស្សិត ត្រូវអាននិងស្រាវជ្រាវជាមួយធនធានអំណាន
៤. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងមជ្ឈមណ្ឌលស្រាវជ្រាវ ត្រូវខិតខំឱ្យអស់លទ្ធភាពក្នុងការបង្កើតបណ្ណាល័យ មជ្ឈមណ្ឌលរក្សាឯកសារ ឬមជ្ឈមណ្ឌលអប់រំឌីជីថលជាដើម ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់និងនិស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សាអាចទទួលបាន និងស្វែងរកប្រភពសម្រាប់អំណានកាន់តែសម្បូរបែប និងមានភាពបត់បែន ឆ្លើយតបតាមតម្រូវការអ្នកអាន
៥. និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សាត្រូវខិតខំនិងចំណាយពេលវេលាដើម្បីអាន និងចាត់ទុកវប្បធម៌និងអកប្បកិរិយាអំណានជាផ្នែកមួយ នៃពេលវេលានិងភាពស៊ីវិល័យនៃជីវិតប្រចាំថ្ងៃ
៦. បងប្អូនជនរួមជាតិ ដែលជាមាតាបិតា ឬអ្នកអាណាព្យាបាល សូមជួយជំរុញនិងបង្កលក្ខណៈកាន់តែច្រើនថែមទៀត ជាពិសេសការលៃលកចំណាយនៅក្នុងគ្រួសារសម្រាប់ការទិញសម្ភារៈសិក្សា សៀវភៅអាន និងឧបករណ៍សម្រាប់អំណានដល់កូនៗ ដែលចាត់ទុកជាការវិនិយោគមួយដ៏សំខាន់ សម្រាប់ បង្កើនចំណេះដឹង និងអនាគតរបស់ពួកគេ។

ដោយមានការគាំទ្រពីក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ នៅឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា "មូលនិធិ ស.គ.ន." និងហៅជាភាសាអង់គ្លេសថា The Research Creativity and Innovation Fund ដែលហៅកាត់ជាភាសាអង់គ្លេសថា "RCI Fund"។ គោលដៅចម្បងនៃមូលនិធិនេះ គឺរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។ មូលនិធិ ស.គ.ន. បានសម្រេចកំណត់ប្រធានបទ ជាអាទិភាពសម្រាប់ការគាំទ្រដោយមូលនិធិចំនួន៣ រួមមានឌីជីថលនីយកម្មសម្រាប់បដិវត្តឧស្សាហកម្ម៤.0 (Digitalization for IR.4.0) ការស្រាវជ្រាវអនុវត្តលើវិស័យកសិកម្ម (Applied Agricultural Research) និងការស្រាវជ្រាវគរុកោសល្យសតវត្សទី២១ (21st Century Pedagogy Research)។

ដោយមានការធ្វើអាទិភាពូបនីយកម្មទៅលើទិសដៅ នៃការប្រើប្រាស់ថវិកាមូលនិធិសម្រាប់ឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ និងក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានផ្តល់ការគាំទ្រដល់ការ **រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សា (Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។** គោលបំណងនៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា គឺដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូនដល់និស្សិត

ដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ លើសពីនេះទៀត ការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា មានគោលដៅដូចខាងក្រោម ៖

១. ឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់និស្សិតនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា

២. លើកកម្ពស់ទំនើបភាវូបនីយកម្ម និងឧត្តមានុវត្តន៍នៃការរៀននិងបង្រៀន និងការស្រាវជ្រាវនៅលើមុខវិជ្ជា កម្មវិធីសិក្សា ឬមុខជំនាញជាក់លាក់

៣. បង្កើនភាពស៊ីជម្រៅក្នុងការកសាងវិជ្ជាជីវៈនិងបទពិសោធន៍សម្រាប់បានសាស្ត្រាចារ្យ និងអ្នកស្រាវជ្រាវ

៤. រួមចំណែកដល់ការកសាងភាពជាសហគមន៍វិជ្ជាជីវៈ ការចែករំលែកបទពិសោធន៍ និងវប្បធម៌នៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានវាយតម្លៃខ្ពស់ចំពោះការបោះជំហានប្រកបដោយមនសិការវិជ្ជាជីវៈនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងបុគ្គលិកអប់រំទាំងអស់ ក្នុងការរៀបចំ រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រឹងសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូននិស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ សៀវភៅសិក្សាជាផ្នែកមួយនៃការទទួលស្គាល់គុណភាពអប់រំនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងជាធនធានសិក្សាដែលជាមូលដ្ឋានមួយដ៏សំខាន់ ក្នុងការគាំទ្រដល់ការបង្រៀន និងរៀន ហើយត្រូវមានបរិមាណគ្រប់គ្រាន់ ឆ្លើយតបទៅនឹងកម្មវិធីអប់រំ និងតម្រូវការសិក្សាស្រាវជ្រាវ។ ជាគោលការណ៍ គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាទាំងអស់ ត្រូវមានសៀវភៅសិក្សាដែលប្រើជាគោលសម្រាប់មុខវិជ្ជានីមួយៗ។ ចំនួនសៀវភៅសិក្សាដែលគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ការស្រាវជ្រាវ និងការសិក្សារបស់និស្សិត ត្រូវមានយ៉ាងតិចមួយចំណងជើងក្នុងមួយមុខវិជ្ជា ហើយត្រូវតែម្កល់យ៉ាងតិច២ច្បាប់នៅក្នុងបណ្ណាល័យ ឬអាចរកបានតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិក។ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លើកទឹកចិត្តបន្ថែមទៀតជូនដល់គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋ និងឯកជនដែលបានស្នើសុំថវិកាមូលនិធិ ស.គ.ន រួច សូមចូលរួមបន្ថែមទៀតដើម្បីបង្កើនចំនួនចំណងជើងសៀវភៅ។ ចំណែកគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋ និងឯកជនដែលពុំទាន់បានដាក់ពាក្យស្នើសុំថវិកាមូលនិធិ ដើម្បីរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា សូមរួសរាន់ចូលរួមដើម្បីជាគុណប្រយោជន៍ដល់តម្រូវការដ៏ទទូចនិងថ្លៃថ្លានៃនិស្សិតកម្ពុជាក្នុងការសិក្សា និងស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

សេចក្ដីបញ្ជាក់
នៃមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍

សៀវភៅសិក្សានេះជាលទ្ធផលនៃការស្នើសុំអនុវត្តថវិកាមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ក្នុងគម្រោងរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ សៀវភៅសិក្សានេះ ត្រូវបានរៀបរៀង និពន្ធ ឬកែលម្អដោយមានការធានាអះអាងថាជាស្នាដៃរបស់អ្នកនិពន្ធផ្ទាល់ និងបានឆ្លងកាត់ត្រួតពិនិត្យ ផ្តល់យោបល់ និងវាយតម្លៃដោយក្រុមប្រឹក្សាអប់រំ ក្រុមប្រឹក្សាស្រាវជ្រាវ ឬក្រុមប្រឹក្សាដែលមានតម្លៃស្មើនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងតាមរយៈកិច្ចសន្យាដែលបានធ្វើឡើង និងដែលបានតម្កល់ទុកនៅមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។ រាល់ខ្លឹមសារ ការបកស្រាយ ឬរូបភាព ដែលមាននៅក្នុងសៀវភៅនេះ គឺជាជំហរនិងទស្សនៈផ្ទាល់របស់អ្នកនិពន្ធ ហើយពុំឆ្លុះបញ្ចាំង ឬជាតំណាងដល់មូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ នៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាឡើយ។

អារម្ភកថា

សៀវភៅនេះត្រូវបានរៀបរៀងឡើងក្រោមការឧបត្ថម្ភគាំទ្ររបស់មូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍សម្រាប់ទុកជាសៀវភៅសិក្សាគោល ដើម្បីបម្រើឲ្យការរៀននិងបង្រៀនមុខវិជ្ជាមេកានិចទ្រឹស្តីភាគ២ ក្នុងដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យានៃមហាវិទ្យាល័យវិទ្យាសាស្ត្រនៅសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ។ សៀវភៅនេះផ្តល់ជូនអ្នកសិក្សាទាំងផ្នែកទ្រឹស្តី និងអនុវត្តន៍ ដែលខ្លឹមសារគោលក្នុងសៀវភៅនេះមានតាំងពីជំពូក១៧រហូតដល់ជំពូក២០ ដែលអាចសមល្មមឲ្យអ្នកសិក្សារូបវិទ្យាទាំងឡាយមានមូលដ្ឋានគ្រឹះរឹងមាំក្នុងការសិក្សាបន្ត ឬស្រាវជ្រាវបន្ថែម ឬក្នុងការប្រកបការងារផ្សេងៗក្នុងវិជ្ជាជីវៈរបស់ខ្លួន។ មិនតែប៉ុណ្ណោះ សៀវភៅនេះក៏អាចចាត់ទុកជាឯកសារពិគ្រោះសម្រាប់អ្នកស្នេហារូបវិទ្យាផងដែរ។

លើសពីនេះ មេកានិចទ្រឹស្តីទាក់ទងយ៉ាងជិតស្និទ្ធជាមួយមេកានិចបុរាណ(ច្បាប់ទាំងឡាយរបស់ Isaac Newton)។ ដំបូងសិក្សាស៊ីនេម៉ាទិចនៃចំណុចរូបធាតុនៅក្នុងប្រព័ន្ធកូអរដោនេផ្សេងៗ ដើម្បីបង្ហាញទីតាំង និងចលនា ព្រមទាំងគន្លងរបស់ចំណុចរូបធាតុ។ បន្ទាប់សិក្សាឌីណាមិចនៃចំណុចរូបធាតុគឺច្បាប់ទាំងបីរបស់ញូតុន ព្រមទាំងបង្ហាញគោលការណ៍គ្រឹះឌីណាមិចអនុវត្តន៍នៅក្នុងតម្រុយកាលីលេ និងតម្រុយមិនកាលីលេ។ តាមការសិក្សាចំណុចរូបធាតុ នាំទៅសិក្សាប្រព័ន្ធចំណុចរូបធាតុនៅក្នុងតម្រុយកាលីលេ និងតម្រុយផ្ចិតម៉ាស(តម្រុយបារីសង់)។ ផ្នែកចម្បងមួយទៀត សិក្សាស៊ីនេទិចនៃអង្គធាតុរឹង ទាំងស៊ីនេម៉ាទិចនៃអង្គធាតុរឹងដែលលើចលនាទូទៅរបស់វា (ចលនារំកិល និងចលនារង្វិល) និងឌីណាមិចនៃអង្គធាតុរឹង។ ចុងបញ្ចប់នៃសៀវភៅសិក្សាលើការី Lagrange និង Hamilton ដើម្បីដោះស្រាយចំណោទមេកានិចកម្រិតខ្ពស់។

ទោះបីជាយើងខ្ញុំខិតខំស្រាវជ្រាវ និងធ្វើកិច្ចទាំងនេះដោយយកចិត្តទុកដាក់យ៉ាងណាក៏ដោយ ពិតជាមានកំខុសមិនខាន លើខ្លឹមសារ វាក្យស័ព្ទ ឬកំខុសផ្សេងៗដោយអចេតនា។ យើងខ្ញុំរង់ចាំទទួលការរិះគន់កែលម្អដោយក្តីសោមនស្ស ហើយយើងខ្ញុំសង្ឃឹមថាសៀវភៅនេះមានគុណភាពកាន់តែប្រសើរនៅពេលបោះពុម្ពក្រោយៗទៀត។

ហង់ ស៊ីម

រាជធានីភ្នំពេញ ២០២២

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ខ្ញុំបាទ **ហង់ ស៊ីម** ជាសាស្ត្រាចារ្យដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យានៃមហាវិទ្យាល័យវិទ្យាសាស្ត្រនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ និងជាអ្នករៀបរៀងសៀវភៅសិក្សាដែលមានចំណងជើងថា "**មេកានិចទ្រឹស្តីភាគ២**"។ ខ្ញុំបាទសូមសម្តែងនូវគារវកិច្ចដ៏ខ្ពង់ខ្ពស់ និងសូមគោរពថ្លែងអំណរគុណ និងដឹងគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះ៖

- ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ ដែលបានផ្តល់ថវិកាមកក្រសួងអប់រំ ដើម្បីបង្កើតជាមូលនិធិសម្រាប់គាំទ្រដល់ការសរសេរសៀវភៅសិក្សាសម្រាប់កម្រិតឧត្តមសិក្សារបស់ខ្ញុំបាទនេះ។

- ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលមាន ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យរដ្ឋមន្ត្រី **ហង់ជួន ណារ៉ុន** ជាប្រមុខ ដែលលោកបានដឹកនាំបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ឡើង ដើម្បីគាំទ្រទាំងស្រុងដល់ដំណើរការសរសេរសៀវភៅនេះ ដែលជាចំណែកមួយក្នុងបេសកកម្មកំណែទម្រង់វិស័យអប់រំឧត្តមសិក្សារបស់លោក។

- ឯកឧត្តមបណ្ឌិត **សាន វឌ្ឍនា** អនុរដ្ឋលេខាធិការក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលក្នុងនាមលោកជាតំណាងមូលនិធិ លោកបានយកអស់កម្លាំងកាចិត្ត ជួយចាត់ចែងនិងជ្រោមជ្រែងយ៉ាងពេញទំហឹង ព្រមទាំងផ្តល់ជាអនុសាសន៍និងដំណោះស្រាយនានា ដើម្បីជំនះនូវរាល់ឧបសគ្គដែលកើតមានក្នុងដំណើរការសរសេរសៀវភៅនេះ។

- ឯកឧត្តមបណ្ឌិត **ជេត ជាលី** សាកលវិទ្យាធិការនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ដែលបានយកអស់កម្លាំងកាយចិត្ត ព្រមទាំងពេលវេលាដ៏មមាញឹកនិងមានតម្លៃរបស់លោកក្នុងការជួយលើកទឹកចិត្ត ជួយខ្នះខ្នែងដោះស្រាយ និងផ្តល់អនុសាសន៍ដ៏ត្រឹមត្រូវ ក៏ដូចជាបង្កលក្ខណៈងាយស្រួលនានា ទាំងផ្នែករដ្ឋបាល និងទាំងផ្នែកបច្ចេកទេស ដើម្បីឲ្យដំណើរការរៀបរៀងសៀវភៅនេះបានប្រព្រឹត្តទៅដោយរលូនរហូតចប់ចុងចប់ដើម។

- លោក **លួន ពេជ្របូរី** និង អស់លោក-លោកស្រី ជាក្រុមការងារសម្របសម្រួលទាំងអស់របស់មូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលបានយកអស់កម្លាំងកាយចិត្ត ជួយឈឺឆ្អាលក្នុងការដោះស្រាយបញ្ហាប្រឈមនានាយ៉ាងសស្រាក់សស្រាំជាទីបំផុត ដោយមិនត្អូញត្អែរ និងមិនខ្លាចនឿយហត់ ដើម្បីឲ្យការសរសេរសៀវភៅនេះប្រព្រឹត្តទៅដោយរលូន។

- ឯកឧត្តមបណ្ឌិត **ស្រ៊ីវ ថារិទ្ធ** អ្នកសម្របសម្រួលសាលាក្រោយឧត្តម និង លោកបណ្ឌិត **សុខ សិរី** អនុប្រធានការិយាល័យស្រាវជ្រាវ ដែលតែងជួយឈឺឆ្អាល ជួយសម្របសម្រួល និងផ្តល់សេវាសម្រាប់ការប្រជុំបច្ចេកទេសនានាតាមអនឡាញតាំងពីដើមរៀងមក។

- អស់លោក-លោកស្រី ជាសមាជិក-សមាជិកាគណៈកម្មការអភិវឌ្ឍសៀវភៅសិក្សា ក៏ដូចជាគណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យសៀវភៅសិក្សារបស់សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ដែលបានជួយផ្តល់ធាតុចូលដល់សៀវភៅនេះឲ្យកាន់តែមានគុណភាពប្រសើរថែមទៀត។

- ជាចុងក្រោយ និងជាពិសេស លោក ធូ រេណូ ប្រធានការិយាល័យស្រាវជ្រាវនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ដែលតែងជួយផ្តល់ធាតុចូលចំពោះរាល់ឯកសារការងារ ទាំងផ្នែករដ្ឋបាលនិងទាំងផ្នែកបច្ចេកទេស លោកថែមទាំងជួយសម្រួលរាល់បញ្ហាប្រឈមនានាយ៉ាងជឹតដល់បំផុត ដោយមិនប្រកាន់ពេលវេលា និងដោយចិត្តជ្រះថ្លា រហូតការសរសេរសៀវភៅនេះទទួលបានជោគជ័យជាស្ថាពរ។

មាតិកា

បុព្វកថា	i
សេចក្តីបញ្ជាក់	vi
អារម្ភកថា	vii
សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ	viii
ជំពូក១៧៖ ទីប្រជុំទម្ងន់និងសង់ត្រូអ៊ីត	1
1. ទីប្រជុំទម្ងន់ ផ្ចិតម៉ាសចំពោះប្រព័ន្ធចំណុចរូបធាតុ	1
2. ទីប្រជុំទម្ងន់ ផ្ចិតម៉ាស និងសង់ត្រូអ៊ីតចំពោះអង្គធាតុ	2
3. អង្គធាតុសមាស	19
4. ទ្រឹស្ដីបទ PAPPUS និង GULDINUS	21
5. របាយកម្លាំងសរុប	26
6. សម្ពាធសន្ទនីយ	27
សង្ខេបមេរៀន	33
ចំណោទ	34
ជំពូក១៨៖ ម៉ូម៉ង់និចលភាព	46
1. និយមន័យម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃ	46
2. ទ្រឹស្ដីបទអ័ក្សស្របចំពោះផ្ទៃ	50
3. កាំនៃ GYRATION របស់ផ្ទៃ	52
4. ម៉ូម៉ង់និចភាពចំពោះផ្ទៃដោយអាំងតេក្រាល	55
5. ម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃសមាស	60
6. ផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃ	63

7. ម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃធៀបនឹងអ័ក្សទេរ 68

8. រង្វង់MOHRចំពោះម៉ូម៉ង់និចលភាព 71

9. ម៉ាសម៉ូម៉ង់និចលភាព 72

10. ការីម៉ូម៉ង់និចលភាពនិងម៉ាទ្រីសម៉ូម៉ង់និចលភាព 82

សង្ខេបមេរៀន 95

ចំណោទ 96

ជំពូក១៩៖ ចលនាអង្គធាតុរឹង 110

1. ស៊ីនេម៉ាទិចនៃអង្គធាតុរឹង 110

1.1. ភាពទូទៅ 110

1.2. សញ្ញាណនៃតម្រុយនិងយោង 110

1.3. ចំណោលស្មើនៃដែនល្បឿនរបស់អង្គធាតុ 111

1.4. ផ្ចិតខណៈនៃល្បឿនសូន្យ 112

1.5. ដែនសំទុះ 118

1.6. Torseur ស៊ីនេម៉ាទិច 133

2. ចលនាគ្រឹះពិសេស 134

2.1. ចលនារំកិលសុទ្ធ 134

2.2. ចលនារង្វិលសុទ្ធជុំវិញអ័ក្សនៃអង្គធាតុ 134

3. ស៊ីនេទិច 146

3.1. និយមន័យ 146

3.2. ស៊ីនេទិចសរុប ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច 146

3.3. បរិមាណចលនានៃប្រព័ន្ធចំណុចរូបធាតុ(S) 147

3.4. Torseur ស៊ីនេទិច 147

3.5. កន្សោមស៊ីនេទិចសរុបនៃប្រព័ន្ធរូបធាតុ 147

3.6. លក្ខណៈនៃម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច 148

3.7. ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៃអង្គធាតុ(S)មិនខូចរាង ភ្ជាប់ទៅតម្រុយR'ចលនាធៀបនឹងតម្រុយនឹងR 149

3.8. ទ្រឹស្តី Koenig ចំពោះប្រព័ន្ធរូបធាតុ(S) 150

4. TORSEUR ឌីណាមិច 152

4.1. និយមន័យ 152

4.2. ការគណនាឌីណាមិចសរុប 153

4.3. ទ្រឹស្តី Koenig ទាក់ទងទៅនឹងម៉ូម៉ង់ឌីណាមិច 153

4.4. ទំនាក់ទំនងរវាង Torseur ស៊ីនេទិចនិង Torseur ឌីណាមិច 155

4.5. ករណីពិសេស 155

5. ថាមពលស៊ីនេទិច 156

5.1. និយមន័យ 156

5.2. ទ្រឹស្តី Koenig ទាក់ទងទៅថាមពលស៊ីនេទិច 156

5.3. អង្គធាតុមិនខូចរាងក្នុងចលនាណាមួយ 157

6. ច្បាប់គូឡុំស្តីពីកកិតអង្គធាតុរឹង 179

6.1. អំពើនៃការប៉ះ 180

6.2. ច្បាប់ស្តីពីកកិតអង្គធាតុរឹង 180

7. ចលនានៃ Gyroscope 185

7.1. ស្ថេរភាព Precession នៃ Gyroscope 187

7.2. ចលនានៃអ័ក្សស៊ីមេទ្រីអង្គធាតុក្រោមអំពើគ្មានកម្លាំង 189

សង្ខេបមេរៀន 197

លំហាត់ 198

ជំពូក២០៖ ការឡើងក្រង់ និងហាមីលតុន 224

1. ការឡើងក្រង់ និងសមីការឡាក្រង់ 224

1.1. លំហនៃសណ្ឋានរូប 224

1.2. ការឡើងក្រង់ 225

1.3. សមីការឡាក្រង់ 226

1.4. គោលការណ៍ហាមីលតុន 257

2. ការហាមីលតុន និងសមីការកាណូនិច 257

2.1. លំហផាស 257

2.2. ការហាមីលតុន 258

2.3. សមីការកាណូនិច 259

2.4. ការរក្សាថាមពលនិងម៉ូម៉ង់ធ្លាស់ 261

3. ការឡើងក្រង់ និងហាមីលតុននៃភាគល្អិតផ្ទុកបន្ទុកអគ្គិសនី 269

3.1. ការឡើងក្រង់ 269

3.2. ការហាមីលតុននៃភាគល្អិតផ្ទុកបន្ទុកអគ្គិសនី 270

សង្ខេបមេរៀន 273

ចំណោទ 274

ឯកសារយោង 290

ជំពូក១៧ ទីប្រជុំទម្ងន់ និងសង់ត្រូអ៊ីត

CENTER OF GRAVITY AND CENTROIDE

គោលបំណង

- ពិភាក្សាបញ្ញត្តិនៃទីប្រជុំទម្ងន់ ផ្ចិតម៉ាស និងសង់ត្រូអ៊ីត។
- បង្ហាញរបៀបកំណត់ទីប្រជុំទម្ងន់ និងសង់ត្រូអ៊ីតចំពោះប្រព័ន្ធភាគល្អិតមិនជាប់គ្នា ឬ ទម្រង់ផ្សេងៗទៀត។
- ប្រើទ្រឹស្តីបទ Pappus និង Guldinus ដើម្បីរកផ្ទៃនិងមាឌបរិវត្ត។
- បង្ហាញវិធីសាស្ត្រដើម្បីរកបាយកម្លាំងសរុប។

1. ទីប្រជុំទម្ងន់ ផ្ចិតម៉ាសចំពោះប្រព័ន្ធចំណុចរូបធាតុ

ក. ទីប្រជុំទម្ងន់

ទីប្រជុំទម្ងន់ G ជាចំណុចដែលស្ថិតនៅទីតាំងទម្ងន់សរុបរបស់ប្រព័ន្ធ។ ដើម្បីបង្ហាញរបៀបកំណត់ចំណុចទាំងនេះ យើងពិនិត្យប្រព័ន្ធមាន n ភាគល្អិតនៅនឹងក្នុងតំបន់នៃលំហដូចរូប។ ទម្ងន់នៃចំណុចរូបធាតុមានប្រព័ន្ធកម្លាំងស្របដែលអាចជំនួសដោយកម្លាំងទោល(កម្លាំងសមមូល) ទម្ងន់សរុបដែលបានកំណត់ចំណុច G ជាចំណុចចាប់។ ដើម្បីរក $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ ជាកូអរដោនេនៃ G យើងត្រូវប្រើគោលការណ៍ម៉ូម៉ង់។ នេះត្រូវការទម្ងន់សរុបស្មើនឹងទម្ងន់សរុបនៃ n ចំណុចរូបធាតុគឺ៖ $P=\Sigma P_i$ ។ ផលបូកម៉ូម៉ង់នៃទម្ងន់នៃគ្រប់ចំណុចរូបធាតុធៀបអ័ក្ស x,y,z គឺស្មើនឹង ម៉ូម៉ង់នៃទម្ងន់សរុប ធៀបនឹងអ័ក្សនេះ។ ដូចនេះដើម្បីកំណត់កូអរដោនេនៃG យើងអាចបូកម៉ូម៉ង់ធៀបអ័ក្ស y ៖

$$\bar{x}\cdot P=\tilde{x}_1P_1+\tilde{x}_2P_2+\cdots+\tilde{x}_nP_n$$

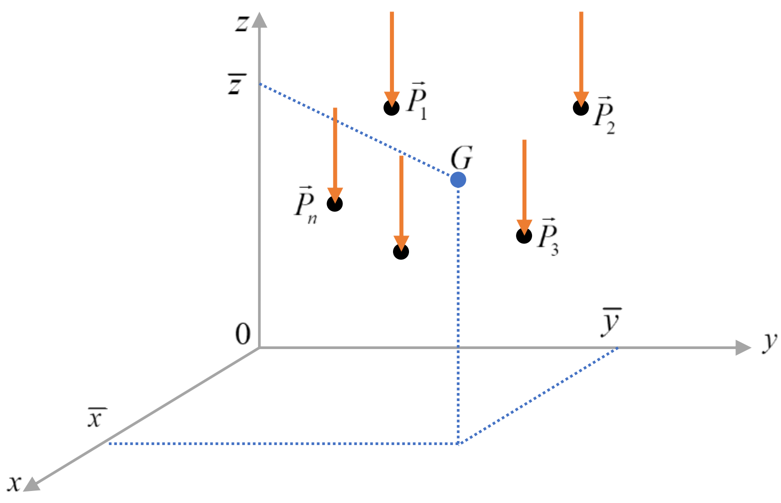
ផលបូកម៉ូម៉ង់ធៀបអ័ក្ស x យើងអាចទទួលបានកូអរដោនេ $\bar{y}$ ៖

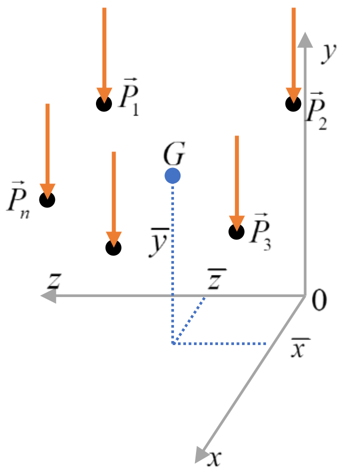
$$\bar{y}\cdot P=\tilde{y}_1P_1+\tilde{y}_2P_2+\cdots+\tilde{y}_nP_n$$

ទោះបីទម្ងន់មិនបង្កើតម៉ូម៉ង់ធៀបអ័ក្ស z យើងអាចទទួលបាន $\bar{z}$ ដោយគិតប្រព័ន្ធកូអរដោនេជាមួយចំណុចរូបធាតុនៅនឹង។ យើងបង្វិល 90^0 ធៀបនឹងអ័ក្ស x ឬ y ។ ផលបូកម៉ូម៉ង់ធៀបនឹងអ័ក្ស x យើងបាន៖

$$\bar{z}\cdot P=\tilde{z}_1P_1+\tilde{z}_2P_2+\cdots+\tilde{z}_nP_n$$

ដូចនេះយើងបាន៖ $\bar{x}=\dfrac{\Sigma\tilde{x}_iP_i}{\Sigma P_i}$, $\bar{y}=\dfrac{\Sigma\tilde{y}_iP_i}{\Sigma P_i}$, $\bar{z}=\dfrac{\Sigma\tilde{z}_iP_i}{\Sigma P_i}$ (កូអរដោនេនៃទីប្រជុំទម្ងន់ប្រព័ន្ធរូបធាតុ)





ខ. ផ្ចិតម៉ាស

សិក្សាចំណោទទាក់ទងទៅនឹងចលនានៃអង្គធាតុក្រោមឥទ្ធិពលកម្លាំងមានន័យថាឌីណាមិច វាសំខាន់ ដើម្បីដាក់ទីតាំងចំណុចហៅថា ផ្ចិតម៉ាស។ ដោយផ្តល់សំទុះដែលបណ្តាលមកពីទំនាញ ចំពោះគ្រប់ភាគល្អិតគឺថេរ ដូចនេះ $P = mg$ ។ ជំនួសក្នុងសមីការខាងលើ យើងបាន៖

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}_i m_i}{\Sigma m_i} \ , \ \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}_i m_i}{\Sigma m_i} \ , \ \bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}_i m_i}{\Sigma m_i}$$

ឧទាហរណ៍១៖ ប្រព័ន្ធចំណុចរូបធាតុនៅក្នុងលំហ បង្ហាញដូចរូប។ ចូរកំណត់ផ្ចិតម៉ាសនៃប្រព័ន្ធ។

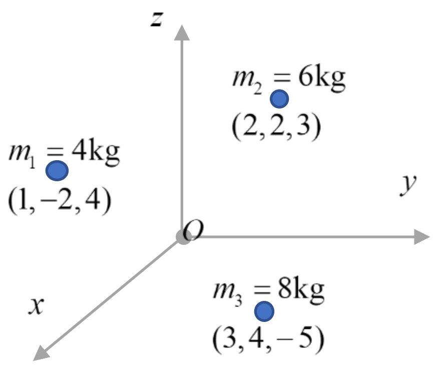
ដំណោះស្រាយ

ផ្ចិតម៉ាសនៃប្រព័ន្ធ $C(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ៖

ដោយ $\bar{x} = \dfrac{m_1\tilde{x}_1 + m_2\tilde{x}_2 + m_3\tilde{x}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \dfrac{4\times1+6\times2+8\times3}{4+6+8} = 2.22\text{m}$

$$\bar{y} = \frac{m_1\tilde{y}_1 + m_2\tilde{y}_2 + m_3\tilde{y}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{4\times(-2)+6\times2+8\times4}{4+6+8} = 2\text{m}$$

$$\bar{z} = \frac{m_1\tilde{z}_1 + m_2\tilde{z}_2 + m_3\tilde{z}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{4\times4+6\times3+8\times(-5)}{4+6+8} = \text{- } 0.33\text{m}$$

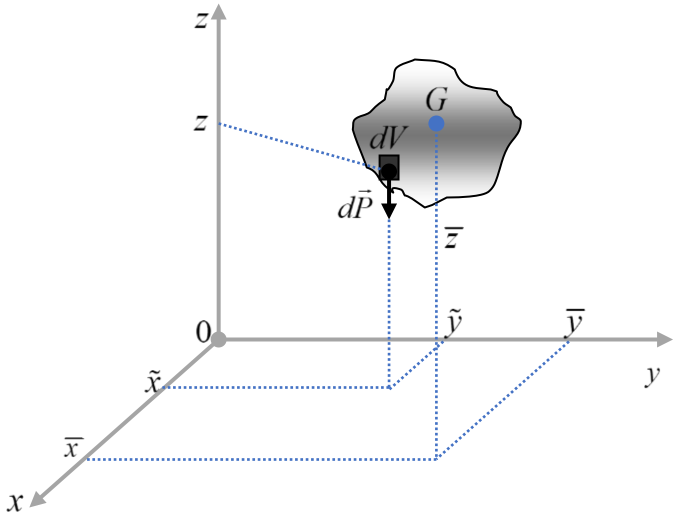


ដូចនេះទីតាំងផ្ចិតម៉ាសនៃប្រព័ន្ធគឺ C(2.22m, 2m , -0.33m) ។

2. ទីប្រជុំទម្ងន់-ផ្ចិតម៉ាស និងសង់ត្រូអ៊ីតចំពោះអង្គធាតុ

ក. ទីប្រជុំទម្ងន់

អង្គធាតុរឹងមានចំណុចរូបធាតុអនន្ត។ ដូចនេះសមីការត្រូវបានជំនួសដោយអាំងតេក្រាល(ព្រោះចំណុចរូបធាតុនៅជាប់ៗគ្នា)។ យើងបាន៖



$$\bar{x}=\frac{\int \tilde{x}dP}{\int dP}\ ,\ \bar{y}=\frac{\int \tilde{y}dP}{\int dP}\ ,\ \bar{z}=\frac{\int \tilde{z}dP}{\int dP}$$

បើ γ ជាទម្ងន់មាឌ(ទម្ងន់ក្នុងមួយខ្នាតមាឌ)។

$$\Rightarrow \gamma=\frac{dP}{dV}=\frac{P}{V}$$

$$\bar{x}=\frac{\int_V \tilde{x}\gamma dV}{\int_V \gamma dV}\ ,\ \bar{y}=\frac{\int_V \tilde{y}\gamma dV}{\int_V \gamma dV}\ ,\ \bar{z}=\frac{\int_V \tilde{z}\gamma dV}{\int_V \gamma dV}$$

ខ. ផ្ចិតម៉ាស

ម៉ាសមាឌ ρ (ម៉ាសក្នុងមួយខ្នាតមាឌ)៖

$\rho=\dfrac{dm}{dV}$ ដោយ $\gamma=\dfrac{dP}{dV}=\dfrac{gdm}{dV}$

$\Rightarrow \gamma=\rho g$ ដែល g ជាសំទុះទំនាញដី។

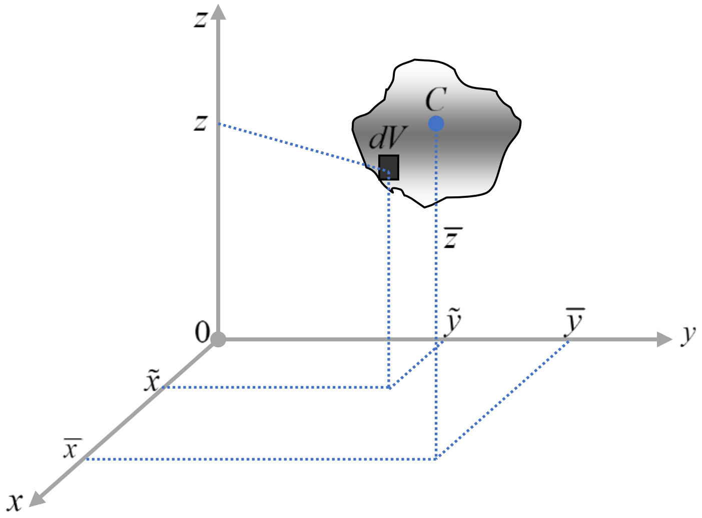
ដូចនេះ៖ $$\bar{x}=\frac{\int_m \tilde{x}\rho gdm}{\int_m \rho gdm}\ ,\ \bar{y}=\frac{\int_m \tilde{y}\rho gdm}{\int_m \rho gdm}\ ,\ \bar{z}=\frac{\int_m \tilde{z}\rho gdm}{\int_m \rho gdm}$$

គ. សង់ត្រូអ៊ីត

សង់ត្រូអ៊ីត C ជាចំណុចដែលកំណត់ផ្ចិតធរណីមាត្រនៃវត្ថុ។ ទីតាំងរបស់វាអាចត្រូវបានកំណត់ពីរូបមន្តស្រដៀងគ្នាទៅនឹងរូបមន្តដែលប្រើដើម្បីកំណត់ទីប្រជុំទម្ងន់ ឬផ្ចិតម៉ាសនៃអង្គធាតុ។

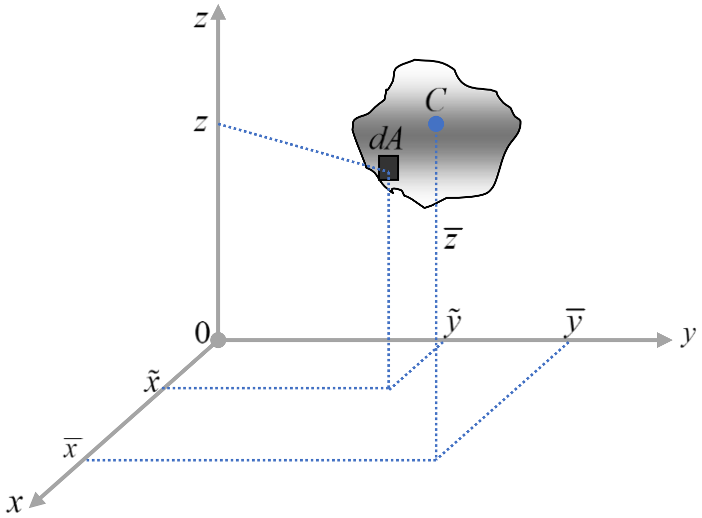
- **មាឌ៖** យើងចែកមាឌជាធាតុមាឌ dV ដូចរូប ទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីត $C(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ ចំពោះមាឌវត្ថុអាចត្រូវបានគណនាដោយគណនាម៉ូម៉ង់នៃធាតុធៀបទៅនឹងអ័ក្សកូអរដោនេនីមួយៗ។

$$\bar{x}=\frac{\int_V \tilde{x}dV}{\int_V dV}\ ,\ \bar{y}=\frac{\int_V \tilde{y}dV}{\int_V dV}\ ,\ \bar{z}=\frac{\int_V \tilde{z}dV}{\int_V dV}$$



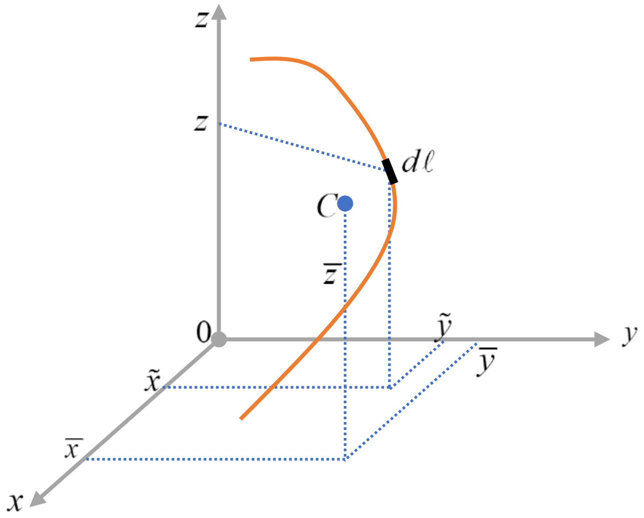
- **ផ្ទៃ៖** លំនាំដូចគ្នា សង់ត្រូអ៊ីតចំពោះផ្ទៃនៃវត្ថុដូចរូប គេត្រូវចែកផ្ទៃជាធាតុផ្ទៃ dA និងគណនាម៉ូម៉ង់នៃធាតុផ្ទៃនេះ ធៀបនឹងអ័ក្សនីមួយៗ៖ $\bar{x}=\frac{\int_A \tilde{x}dA}{\int_A dA}$, $\bar{y}=\frac{\int_A \tilde{y}dA}{\int_A dA}$, $\bar{z}=\frac{\int_A \tilde{z}dA}{\int_A dA}$

ដូចនេះទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃផ្ទៃគឺ $C(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$



- **បន្ទាត់ ឬ ខ្សែ៖** បើរាងធរណីមាត្រនៃវត្ថុ ដូចជាដងធ្នារ ឬខ្សែ ធ្វើឌីផេរ៉ង់ស្យែលប្រវែង $d\ell$ ។ ដូចនេះម៉ូម៉ង់នៃធាតុ $d\ell$ ធៀបនឹងអ័ក្សកូអរដោនេនីមួយៗគឺ $\bar{x}=\frac{\int_\ell \tilde{x}d\ell}{\int_\ell d\ell}$, $\bar{y}=\frac{\int_\ell \tilde{y}d\ell}{\int_\ell d\ell}$, $\bar{z}=\frac{\int_\ell \tilde{z}d\ell}{\int_\ell d\ell}$

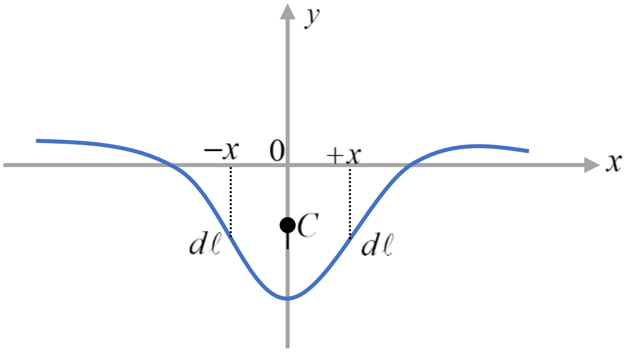
ដូចនេះទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃខ្សែគឺ $C(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$



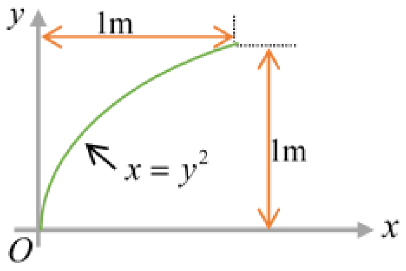
- **ស៊ីមេទ្រី៖** សង់ត្រូអ៊ីតខ្លះអាចត្រូវបានបញ្ជាក់ដោយប្រើលក្ខខណ្ឌស៊ីមេទ្រី មានអ័ក្សស៊ីមេទ្រី សង់ត្រូអ៊ីតនៃវត្ថុ ស្ថិតនៅលើអ័ក្សនោះ។ ម៉ូម៉ង់ធៀបអ័ក្សនោះសូន្យ។ ឧទាហរណ៍ដូចរូប៖

$$\Rightarrow \int \tilde{x}\, d\ell = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$$

ដូចនេះទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃខ្សែគឺ $C(0,\ \bar{y})$ ដែល $\bar{y} = \dfrac{\int \tilde{y} d\ell}{\int d\ell}$



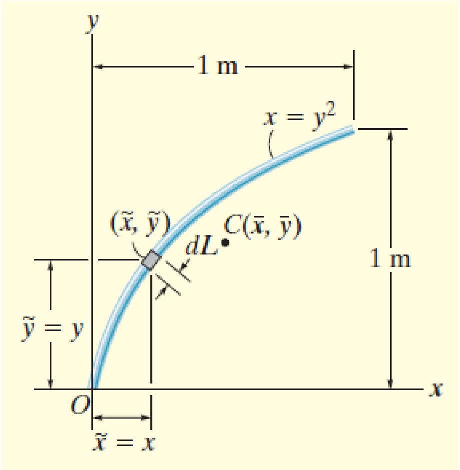
ឧទាហរណ៍១ ចូររកទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃដងកោងមួយមានរាងជាធ្នូប៉ារ៉ាបូលដូចរូប។



ដំណោះស្រាយ

- ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែល: ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រូវបានបង្ហាញនៅលើរូប។ វាត្រូវបានដាក់ទីតាំងនៅលើខ្សែកោងនៅចំណុចណាមួយ (x, y) ។

- ផ្ទៃនិងដៃឃ្នាស់ម៉ូម៉ង់: ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានប្រវែង dL អាចសំដែងជាអនុគមន៍នៃឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖



dx និង dy ដោយប្រើទ្រឹស្តីពីតាគរ។

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy$$

ដោយសារ នោះ ដូចនេះ សំដែងជា

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy$$

ដោយសារ $x = y^2$ នោះ $\frac{dx}{dy} = 2y$ ដូចនេះ $d\ell$ សំដែងជា $d\ell = \sqrt{(2y)^2 + 1}\, dy$

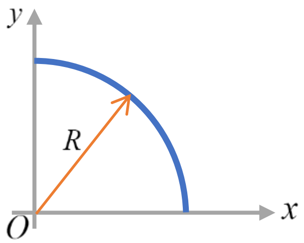
នៅលើរូបសង់ត្រូអ៊ីតនៃធាតុគឺស្ថិតនៅត្រង់ $\tilde{x} = x,\ \tilde{y} = y$

- អាំងតេក្រាល: អនុវត្តន៍សមីការ

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^{1\text{m}} x\sqrt{4y^2+1}\, dy}{\int_0^{1\text{m}} \sqrt{4y^2+1}\, dy} = \frac{0.6063}{1.479} = 0.41\text{m}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^{1\text{m}} y\sqrt{4y^2+1}\, dy}{\int_0^{1\text{m}} \sqrt{4y^2+1}\, dy} = \frac{0.8484}{1.479} = 0.574\text{m}$$

ឧទាហរណ៍២៖ ចូររកទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃធ្នូរង្វង់ជៀបអ័ក្ស x ដូចរូប។



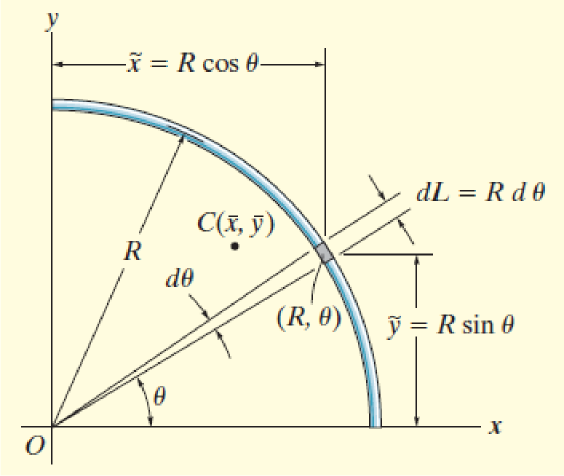
ដំណោះស្រាយ

កូអរដោនេប៉ូលែត្រូវបានប្រើនៅក្នុងចំណោទនេះ ដោយសារធ្នូជារង្វង់។

- ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ ឌីផេរ៉ង់ស្យែលធ្នូរង្វង់ត្រូវបានជ្រើសរើសដូចបង្ហាញលើរូប។

ធាតុកាត់ខ្សែកោងត្រង់ (R,θ) ។

- ប្រវែងនិងដៃឃ្នាស់នៃម៉ូម៉ង់ៈ ប្រវែងនៃធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ $dL = Rd\theta$ និងសង់ត្រូអ៊ីតរបស់វា នៅត្រង់ $\tilde{x} = R\cos\theta$ និង $\tilde{y} = R\sin\theta$ ។

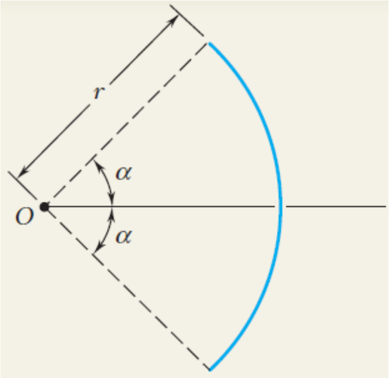


- អាំងតេក្រាលៈ ដោយអនុវត្តសមីការនិងធ្វើអាំងតេក្រាល យើងទទួលបានៈ

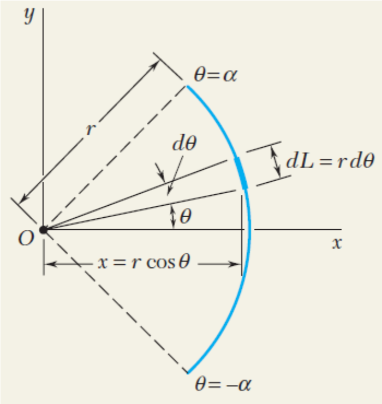
$$\bar{x} = \frac{\int_\ell \tilde{x} d\ell}{\int_\ell d\ell} = \frac{\int_0^{\pi/2} R\cos\theta \times Rd\theta}{\int_0^{\pi/2} Rd\theta} = \frac{2R}{\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_\ell \tilde{y} d\ell}{\int_\ell d\ell} = \frac{\int_0^{\pi/2} R\sin\theta \times Rd\theta}{\int_0^{\pi/2} Rd\theta} = \frac{2R}{\pi}$$

ឧទាហរណ៍៣ ចូរកំណត់ទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃធ្នូរង្វង់ដូចរូប។



ដំណោះស្រាយ



ដោយសារធ្នូមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីធៀបអ័ក្ស x នោះ $\bar{y} = 0$ ។

ពិនិត្យធាតុប្រវែង $dL = rd\theta$ មានកូអរដោនេៈ

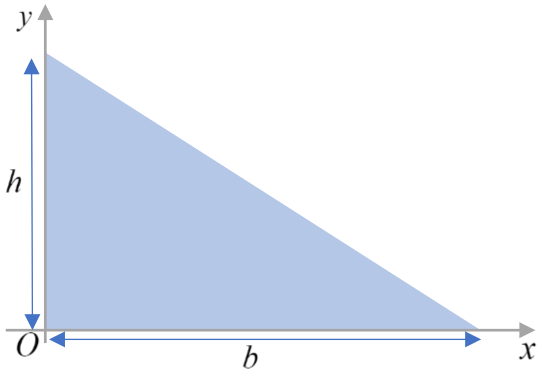
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ។

កូអរដោនេនៃសង់ត្រូអ៊ីតធ្នូមានតែនៅលើអ័ក្ស xៈ

$$\bar{x} = \frac{\int_{(L)} x dL}{\int_{(L)} dL} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos\theta r d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} r d\theta}$$

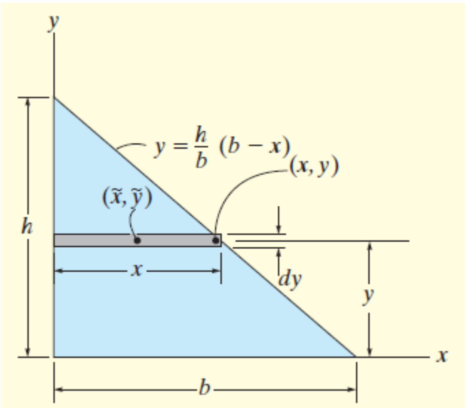
$$\bar{x} = \frac{r\left[-\sin\theta\right]_{-\alpha}^{\alpha}}{\left[\theta\right]_{-\alpha}^{\alpha}} = \frac{2rsi\alpha}{2\alpha} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

ឧទាហរណ៍៤ ចូរកំណត់ទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃផ្ទៃត្រីកោណដូចរូប។



ដំណោះស្រាយ

- ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែល: យើងពិនិត្យធាតុចតុកោណកែងដែលមានកម្រាស់ dy ហើយដាក់នៅក្នុងទីតាំងណាមួយ ដើម្បីឱ្យវាកាត់ព្រំដែនត្រង់ (x, y) ដូចបង្ហាញលើរូប។



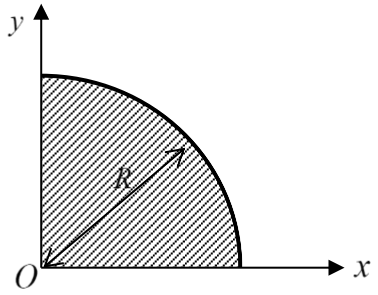
- ផ្ទៃនិងដៃឃ្នាស់ម៉ូម៉ង់:

ផ្ទៃនៃធាតុគឺ $dA = xdy = \frac{b}{h}(h-y)dy$ ហើយសង់ត្រូអ៊ីតវាដាក់នៅទីតាំងចម្ងាយ $\tilde{y} = y$ ពីអ័ក្ស x ។

- អាំងតេក្រាល: អនុវត្តន៍សមីការនិងធ្វើអាំងតេក្រាល នាំឱ្យ៖

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^h y\left[\frac{b}{h}(h-y)dy\right]}{\int_0^h \frac{b}{h}(h-y)dy} = \frac{h}{3}$$

ឧទាហរណ៍៥ ចូរឱ្យទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីត ចំពោះផ្ទៃនៃមួយភាគបួននៃថាសដូចរូប។



ដំណោះស្រាយ

- ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ កូអរដោនេប៉ូលែនឹងត្រូវបានប្រើដោយសាព្រំដែនជារង្វង់។

យើងអាចជ្រើសរើសធាតុជារាង ត្រីកោណដូចរូប។ ធាតុកាត់ខ្សែកោងនៅត្រង់ចំណុច (R,θ)

- ផ្ទៃនិងដៃឃ្នាស់ម៉ូម៉ង់ៈ ផ្ទៃនៃធាតុគឺ

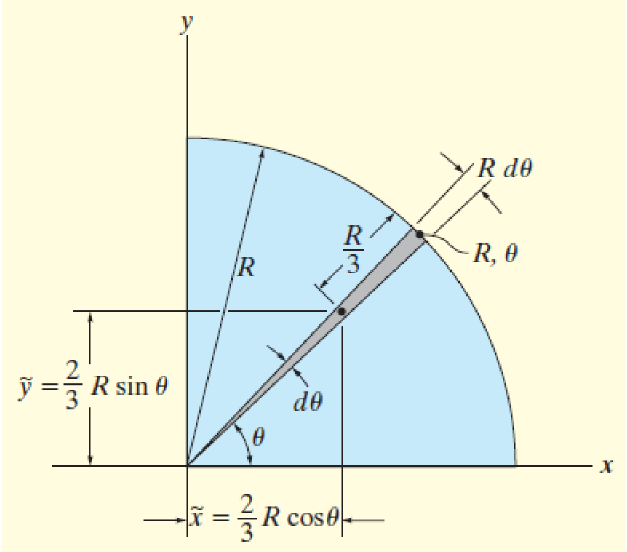
$$dA = \frac{1}{2} R \times R d\theta = \frac{R^2}{2} d\theta$$

ដោយប្រើលទ្ធផលឧទាហរណ៍៣ខាងលើ

$$\tilde{x} = \frac{2}{3} R\cos\theta,\ \ \tilde{y} = \frac{2}{3} R\sin\theta$$

- អាំងតេក្រាលៈ អនុវត្តន៍សមីការ $(9-4)$ និង

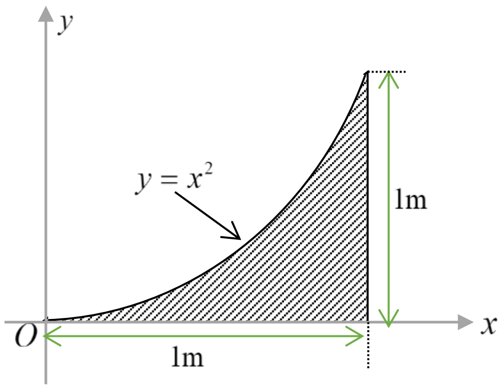
ធ្វើអាំងតេក្រាល



$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{2}{3} R\cos\theta \times \frac{R^2}{2} d\theta}{\int_0^{\pi/2} \frac{R^2}{2} d\theta} = \frac{4R}{3\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{2}{3} R\sin\theta \times \frac{R^2}{2} d\theta}{\int_0^{\pi/2} \frac{R^2}{2} d\theta} = \frac{4R}{3\pi}$$

ឧទាហរណ៍៦ ចូរកទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃផ្ទៃដូចរូប។



ដំណោះស្រាយ

ចំណោទនេះអាចត្រូវបានដោះស្រាយតាមពីររបៀបៈ

របៀបទី១

-ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានកម្រាស់ dx ត្រូវបានបង្ហាញលើរូប។

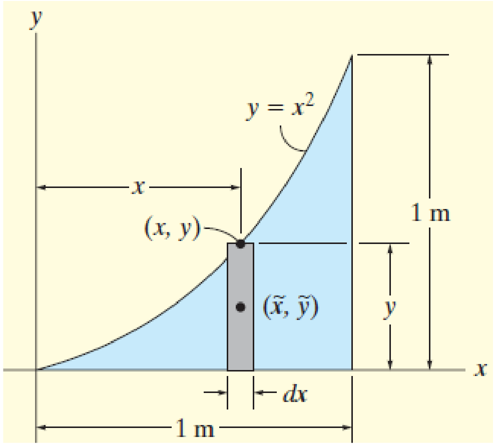
ធាតុកាត់ខ្សែកោងនៅត្រង់ចំណុច (x, y) ណាមួយ និងមានកម្ពស់ y ។

- ផ្ទៃនិងដៃឃ្នាស់ម៉ូម៉ង់ៈ ផ្ទៃនៃធាតុគឺ $dA = ydx$ និងសង់ត្រូអ៊ីតនៅត្រង់ $\tilde{x} = x,\ \tilde{y} = \dfrac{y}{2}$ ។

- អាំងតេក្រាលៈ អនុវត្តន៍សមីការ $(9-4)$ និងធ្វើអាំងតេក្រាលនាំឱ្យ

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{1\text{m}} xydx}{\int_0^{1\text{m}} ydx} = \frac{\int_0^{1\text{m}} x^3dx}{\int_0^{1\text{m}} x^2dx} = 0.75\text{m}$$

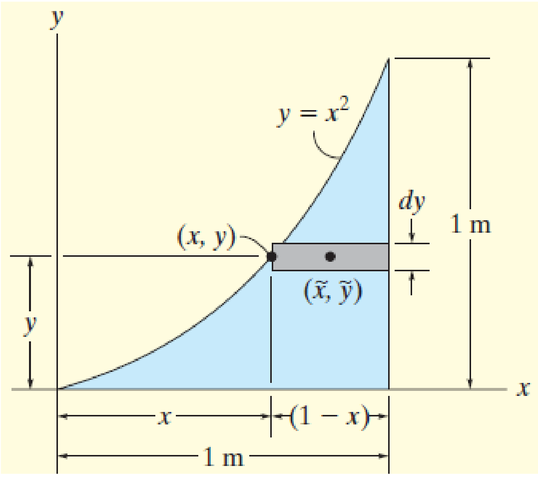
$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{1\text{m}} \frac{y}{2}ydx}{\int_0^{1\text{m}} ydx} = \frac{\int_0^{1\text{m}} \frac{x^2}{2}x^2dx}{\int_0^{1} x^2dx} = 0.3\text{m}$$



របៀបទី២

- ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានកម្រាស់ dy ត្រូវបានបង្ហាញលើរូប។

ធាតុកាត់ខ្សែកោងនៅត្រង់ចំណុចណាមួយ (x, y) និងវាមានប្រវែង $(1-x)$ ។



- ផ្ទៃនិងដៃឃ្នាស់ម៉ូម៉ង់: ផ្ទៃនៃធាតុគឺ $dA=(1-x)dy$ និងសង់ត្រូអ៊ីតវានៅត្រង់

$$\tilde{x}=x+\frac{1-x}{2}=\frac{1+x}{2}\ ,\ \tilde{y}=y$$

- អាំងតេក្រាល: អនុវត្តន៍សមីការនិងធ្វើអាំងតេក្រាល នាំឱ្យ

$$\bar{x}=\frac{\int_A \tilde{x}dA}{\int_A dA}=\frac{\int_0^{1m}\frac{1+x}{2}\times(1-x)dy}{\int_0^{1m}(1-x)dy}=\frac{\frac{1}{2}\int_0^{1m}(1-y)dy}{\int_0^{1m}\left(1-\sqrt{y}\right)dy}=0.75\text{m}$$

$$\bar{y}=\frac{\int_A \tilde{y}dA}{\int_A dA}=\frac{\int_0^{1m}y(1-x)dy}{\int_0^{1m}(1-x)dy}=\frac{\int_0^{1m}(y-y^{\frac{3}{2}})dy}{\int_0^{1m}\left(1-\sqrt{y}\right)dy}=0.3\text{m}$$

ឧទាហរណ៍៧៖ ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃសង់ត្រូអ៊ីតនៃផ្ទៃដែលដេកចន្លោះបន្ទាត់ត្រង់ $x=2y/3$ និងប៉ារ៉ាបូល $x^2=40y$ ដែល x និង y គិតជា mm ។ ចូរប្រើវិធីសាស្ត្រដូចតទៅ៖

ក. អាំងតេក្រាលឌុប។

ខ. អាំងតេក្រាលទោលដោយប្រើធាតុផ្ទៃដេក។

គ. អាំងតេក្រាលទោលដោយប្រើធាតុផ្ទៃឈរ។

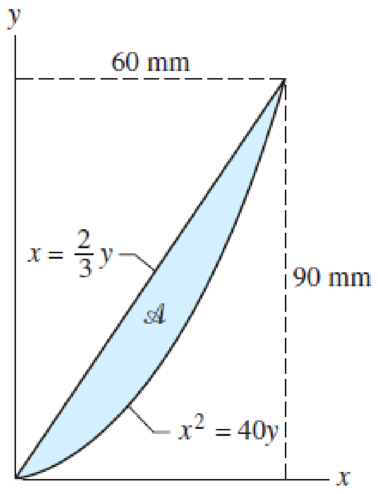
ដំណោះស្រាយ

ក. កូអរដោនេ ដោយប្រើអាំងតេក្រាលឌុប៖

ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រូវបានបង្ហាញដូចរូបគឺ $dA=dxdy$

សម្គាល់ថា អាស្រ័យលើយើងជ្រើសរើសដើម្បីធ្វើអាំងតេក្រាលលើ ឬ មុន។

បើយើងជ្រើសរើសអាំងតេក្រាលើ y មុន នោះយើងបាន៖



$$A = \int_A dA = \int_0^{60}\left(\int_{x^2/40}^{3x/2} dy\right)dx = \int_0^{60}\left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{40}\right)dx$$

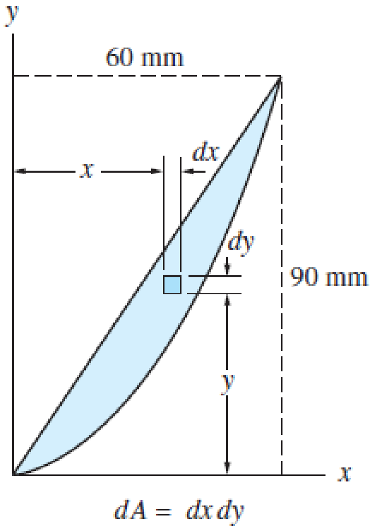
$$A = \left[\frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{120}\right]_0^{60} = 900\text{mm}^2$$

ម៉ូម៉ង់នៃផ្ទៃវិលជុំវិញអ័ក្ស y គឺ

$$M_y = \int_A xdA = \int_0^{60}\left(\int_{x^2/40}^{3x/2} xdy\right)dx = \int_0^{60}\left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{40}\right)xdx$$

$$M_y = \left[\frac{3x^2}{6} - \frac{x^4}{160}\right]_0^{60} = 27000\text{mm}^3$$

ម៉ូម៉ង់នៃផ្ទៃវិលជុំវិញអ័ក្ស x គឺ



$$M_x = \int_A ydA = \int_0^{60}\left(\int_{x^2/40}^{3x/2} ydy\right)dx = \int_0^{60}\frac{1}{2}\left(\frac{9x^2}{4} - \frac{x^4}{1600}\right)dx$$

$$M_x = \frac{1}{2}\left[\frac{9x^3}{12} - \frac{x^5}{8000}\right]_0^{60} = 32400$$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃសង់ត្រូអ៊ីតផ្ទៃគឺ

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{27000}{900} = 30\text{mm} \text{ និង } \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{32400}{900} = 36\text{mm}$$

ចំណាំ បើយើងជ្រើសរើអាំងតេក្រាលលើ x មុន នោះយើងបាន៖

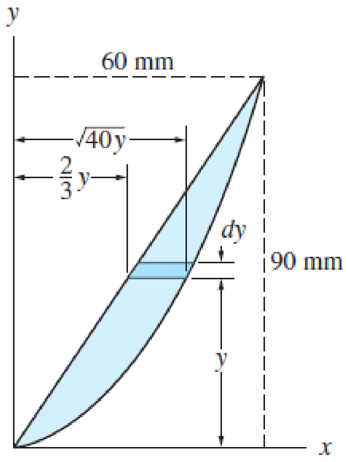
$$A = \int_A dA = \int_0^{90}\left(\int_{2y/3}^{\sqrt{49y}} dx\right)dy$$

$$M_y = \int_A xdA = \int_0^{90}\left(\int_{2y/3}^{\sqrt{40y}} xdx\right)dy \text{ និង } M_x = \int_A ydA = \int_0^{90}\left(\int_{2y/3}^{\sqrt{40y}} ydx\right)dx$$

ខ. កូអរដោនេសង់ត្រូអ៊ីតនៃផ្ទៃ ដោយប្រើអាំងតេក្រាលទោលៈ ជាតុផ្ទៃដេក

$$A = \int_A dA = \int_0^{90}\left(\sqrt{40y} - \frac{2y}{3}\right)dy = \left[\frac{2\sqrt{40}y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{3}\right]_0^{90} = 900\text{mm}^2$$

ម៉ូម៉ង់នៃផ្ទៃវិលជុំវិញអ័ក្ស y គឺ



$$M_y = \int_A x dA = \int_0^{90} \left(20y - \frac{2y^2}{9} \right) dy$$

$$= \left[10y^2 - \frac{2y^3}{27} \right]_0^{90} = 27000\text{mm}^3$$

ម៉ូម៉ង់នៃផ្ទៃវិលជុំវិញអ័ក្ស x គឺ

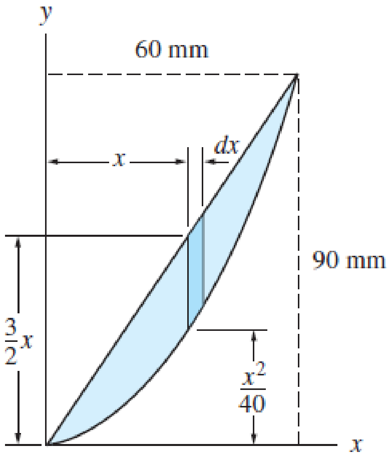
$$M_x = \int_0^{90} \left(\sqrt{40} y^{3/2} - \frac{2y^2}{3} \right) dy$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{40}}{5} y^{5/2} - \frac{2y^3}{9} \right]_0^{90} = 32400\text{mm}^3$$

យើងបាន កូអរដោនសង់ត្រូអ៊ីតនៃផ្ទៃគឺ

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{27000}{900} = 30\text{mm} \text{ និង } \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{32400}{900} = 36\text{mm}$$

គ. កូអរដោនេសង់ត្រូអ៊ីតនៃផ្ទៃ ដោយប្រើអាំងតេក្រាលទោល ជាមួយធាតុផ្ទៃឈរ



$$A = \int_A dA = \int_0^{60} \left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{40} \right) dx$$

$$= \left[\frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{120} \right]_0^{60} = 900\text{mm}^2$$

ម៉ូម៉ង់នៃផ្ទៃវិលជុំវិញអ័ក្ស y គឺ

$$M_y = \int_A x dA = \int_0^{60} \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{40} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{160} \right]_0^{60} = 27000\text{mm}^3$$

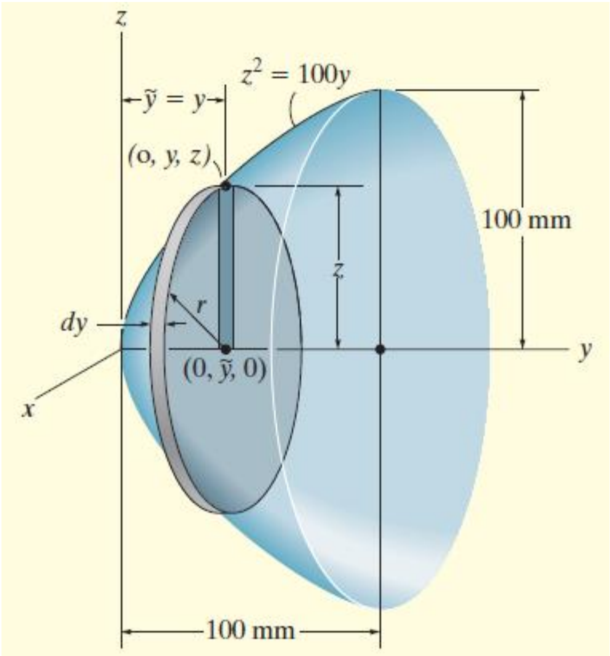
ម៉ូម៉ង់នៃផ្ទៃវិលជុំវិញអ័ក្ស x គឺ

$$M_x = \int_A y dA = \int_0^{60} \frac{1}{2} \left(\frac{9x^2}{4} - \frac{x^4}{1600} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{9x^3}{12} - \frac{x^5}{8000} \right]_0^{60} = 32400\text{mm}^3$$

យើងបាន កូអរដោនសង់ត្រូអ៊ីតនៃផ្ទៃគឺ

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{27000}{900} = 30\text{mm} \text{ និង } \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{32400}{900} = 36\text{mm}$$

ឧទាហរណ៍៨៖ ចូរទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីត $\bar{y}$ ចំពោះប៉ារ៉ាបូលបរិវត្តដូចរូប។



ដំណោះស្រាយ

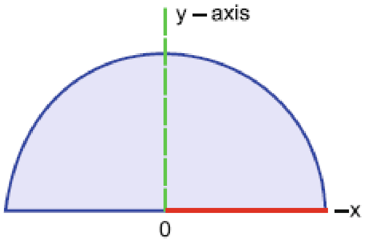
- ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ ធាតុមានរាងថាសស្តើងត្រូវបានជ្រើសរើស។ ធាតុមានកម្រាស់ dy វាកាត់ជនេតខ្សែកោងត្រង់ ចំណុចណាមួយ $(0, y, z)$ និងកាំវា $r = z$ ។

- មាឌនិងដៃឃ្នាស់ម៉ូម៉ង់ៈ មាឌនៃធាតុគឺ $dV = \pi z^2 dy$ និងសង់ត្រូអ៊ីតវានៅត្រង់ $\tilde{y} = y$ ។

- អាំងតេក្រាលៈ អនុវត្តន៍សមីការនិងធ្វើអាំងតេក្រាល

$$\bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y} dV}{\int_V dV} = \frac{\int_0^{100mm} y \times \pi z^2 dy}{\int_0^{100mm} \pi z^2 dy} = \frac{100\pi \int_0^{100mm} y^2 dy}{100\pi \int_0^{100mm} y dy} = 66.7\text{mm}$$

ឧទាហរណ៍៩៖ ពាក់កណ្តាលថាសមានកាំ R មានដង់ស៊ីតេម៉ាសប្រែប្រួល $\sigma = cr^2$ ដែល r ជាចម្ងាយពីផ្ចិតនៃបាត និង c ជាចំនួនថេរ។ ផ្ចិតម៉ាសនឹងស្ថិតនៅតាមអ័ក្ស y ចំពោះហេតុផលស៊ីមេទ្រីដូចរូប។ ចូររកទីតាំងផ្ចិតម៉ាសពី O ផ្ចិតបាត។



ដំណោះស្រាយ

នៅក្នុងកូអរដោនេប៉ូលែ

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$dA = rd\theta\, dr$

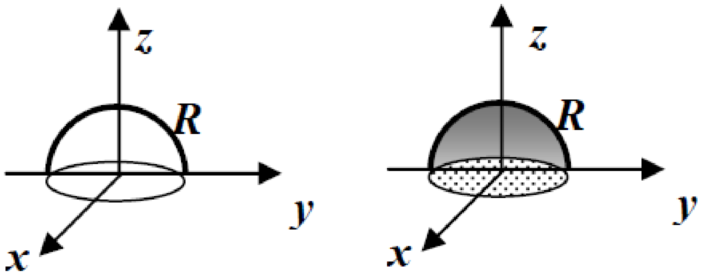
$dm = \sigma dA = \sigma r dr d\theta = cr^3 dr d\theta$

ម៉ាសសរុប $m = \int dm = c\int_0^R r^3 dr \int_0^\pi d\theta = \dfrac{\pi c R^4}{4}$

$$\bar{y} = \frac{\int ydm}{\int dm} = \frac{1}{m}\iint (r\sin\theta) cr^3 dr d\theta \; = \frac{c}{M}\int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{c}{m}\frac{2}{5}R^5 = \frac{8a}{5\pi}$$

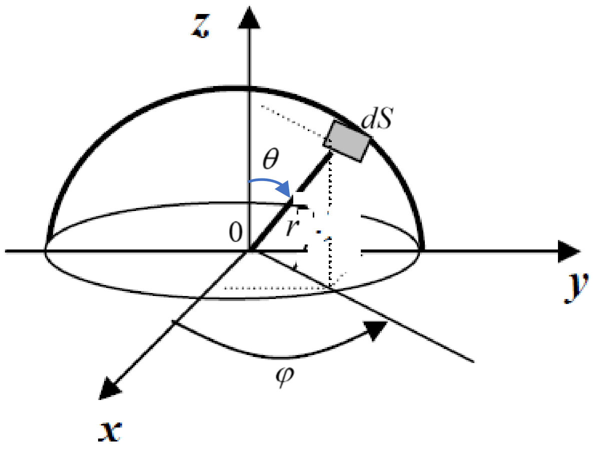
ឧទាហរណ៍១០៖ ចូរកំណត់ផ្ចិតនិចលភាពនៃអង្គធាតុស្មើសាច់៖

ក. កន្លះស្វ៊ែប្រហោងមានកាំR។ ខ. កន្លះស្វ៊ែតាន់មានកាំR។



ដំណោះស្រាយ

ក. ប្លង់(xOz)និង(yOz)ជាប្លង់ស៊ីមេទ្រី ដូចនេះ $x_G = y_G = 0$ ផ្ចិតម៉ាសនៃអង្គធាតុស្ថិតនៅលើអ័ក្សស៊ីមេទ្រី។



យើងបាន៖ $z_G = \dfrac{\int \tilde{z} dm}{m}$

ដោយ $dm = \sigma dS$ នៅក្នុងកូអរដោនេស្វ៊ែ

$dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$

ហើយ $\tilde{z} = z = R\cos\theta$ និង $m = \sigma \times 2\pi R^2$

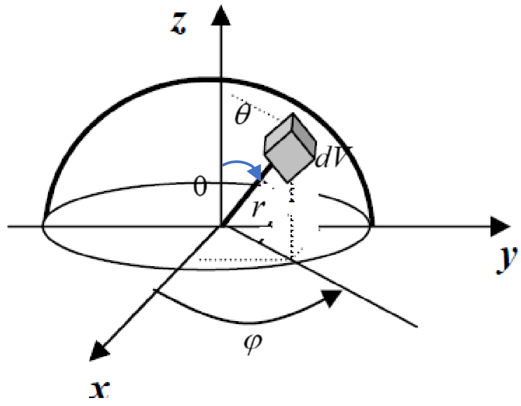
$$\Rightarrow z_G = \frac{\int R\cos\theta \times \sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{\sigma 2\pi R^2} = \frac{R}{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$z_G = \frac{R}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} 2\pi = \frac{R}{2}$$

ដូចនេះកូអរដោនេផ្ចិតម៉ាស $G\left(0,\ 0,\ \frac{R}{2}\right)$

ខ. ប្លង់(xOz)និង(yOz)ជាប្លង់ស៊ីមេទ្រី ដូចនេះ $x_G = y_G = 0$ ផ្ចិតម៉ាសនៃអង្គធាតុស្ថិតនៅលើអ័ក្សស៊ីមេទ្រី។

យើងបាន៖ $z_G = \dfrac{\int \tilde{z} dm}{m}$



ដោយ $dm = \rho dV$ នៅក្នុងកូអរដោនេស្វ៊ែ

$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ ហើយ $\tilde{z} = z = r\cos\theta$

និង $m = \rho \times \frac{2}{3}\pi R^3$ (មាឌពាក់កណ្ដាលស្វ៊ែ)

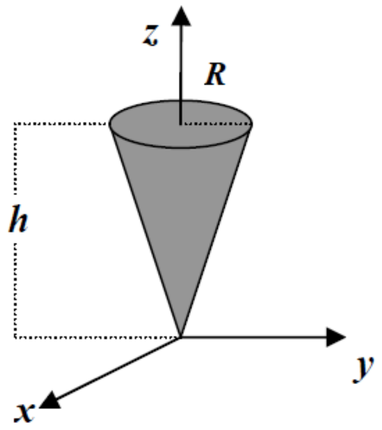
$$\Rightarrow z_G = \frac{\int r\cos\theta \times \rho r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi}{\rho \frac{2}{3}\pi R^3}$$

$$z_G = \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$z_G = \frac{3}{2\pi R^3} \times \frac{R^4}{4}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} 2\pi = \frac{3R}{8}$$

ដូចនេះកូអរដោនេផ្ចិតម៉ាស $G\left(0, 0, \frac{3R}{8}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍១១៖ ចូរកំណត់ផ្ចិតនិចលភាព(សង់ត្រូអ៊ីត)នៃកោនមានកម្ពស់ h និងកាំបាត R ។

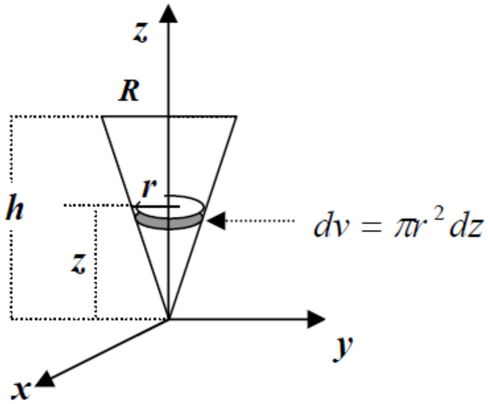


ដំណោះស្រាយ

តាមហេតុផលស៊ីមេទ្រី ផ្ចិតនិចលភាពនៃកោនស្ថិតនៅលើអ័ក្ស 0z។

យើងជ្រើសរើសធាតុមាឌ $dV=\pi r^2 dz$ ស្ថិតនៅកម្ពស់ z ដែល

$$\frac{r}{z}=\frac{R}{h}\Rightarrow r=\frac{R}{h}z$$



ផ្ចិតម៉ាសនៃកោនឱ្យដោយ៖ $z_G=\frac{\int zdm}{m}$

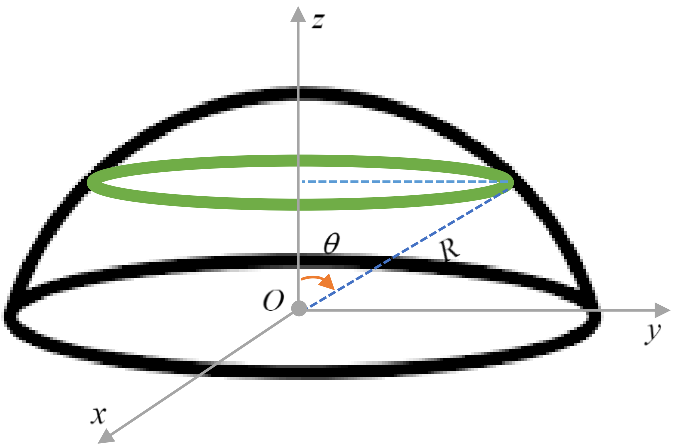
ដោយ $dm=\rho dV$

$$\Rightarrow m=\int\rho dV=\rho\int\pi r^2dz=\rho\pi\int_0^h\frac{R^2}{h^2}z^2dz=\rho\frac{1}{3}\pi R^2h$$

$$\Rightarrow z_G=\frac{\int z\rho\pi r^2dz}{\rho\frac{1}{3}\pi R^2h}=\frac{3}{h^3}\int_0^h z^3dz=\frac{3h}{4}$$

ដូចនេះកូអរដោនេផ្ចិតម៉ាសនៃកោនគឺ $G\left(0,\ 0,\ \frac{3h}{4}\right)$។

ឧទាហរណ៍១២៖ ចូរកំណត់កូអរដោនេសង់ត្រូអ៊ីតនៃស្វ៊ែប្រហោងស្មើសាច់មានកាំ R។



ដំណោះស្រាយ

ដោយកន្លះស្វ៊ែមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី

ហើយអ័ក្ស z ជាអ័ក្សស៊ីមេទ្រី យើងបាន៖

$\bar{x} = \bar{y} = 0$

$\bar{z} = \dfrac{\int_A \tilde{z} dA}{\int_A dA}$ ដោយប្រើព័ន្ធកូអរដោនេស្វ៊ែ

$dA = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$

ឬ $dA = R^2 \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$ ហើយ $\tilde{z} = z = R\cos\theta$

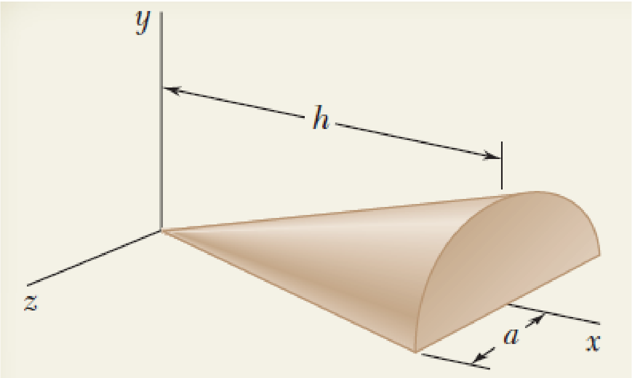
ផ្ទៃកន្លះស្វ៊ែ $A = \int_A dA = \int_0^{\pi/2} 2\pi R^2 \sin\theta d\theta = 2\pi R^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\pi R^2$

គណនា $\int \tilde{z} dA = \int R\cos\theta \times 2\pi R^2 \sin\theta d\theta = 2\pi R^3 \int_0^{\pi/2} \sin\theta d(\sin\theta)$

នោះ $\int \tilde{z} dA = 2\pi R^3 \left[\dfrac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi R^3$

ដូចនេះទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃកន្លះស្វ៊ែគឺ $\bar{z} = \dfrac{\pi R^3}{2\pi R^2} = \dfrac{R}{2}$

ឧទាហរណ៍១៣៖ ចូរកំណត់សង់ត្រូអ៊ីតនៃពាក់កណ្តាលស្មើសាច់ដូចរូប។



ដំណោះស្រាយ

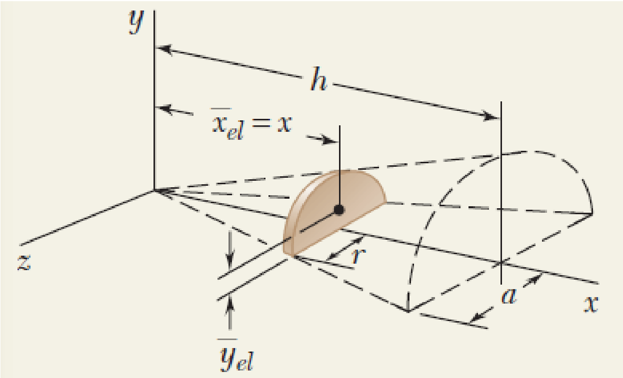
ដោយសារប្លង់(xy)ជាប្លង់ស៊ីមេទ្រី សង់ត្រូអ៊ីតដេកនៅក្នុងប្លង់នេះ ហើយ $\bar{z} = 0$ ។
បន្ទះមានកម្រាស់ dx ត្រូវបានជ្រើសរើសជាធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែល។ មាឌនៃធាតុនេះគឺ

$dV = \dfrac{1}{2}\pi r^2 dx$

កូអរដោនេនៃសង់ត្រូអ៊ីតធាតុមាឌនេះគឺ

$\tilde{x} = x\,,\quad \tilde{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$

តាមទ្រឹស្តីតាលែស $\frac{r}{x}=\frac{a}{h}\Rightarrow r=\frac{a}{h}x$



មាឌនៃអង្គធាតុគឺ

$$V=\int dV=\int_0^h \frac{1}{2}\pi r^2 dx$$

$$=\int_0^h \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{h}x\right)^2 dx=\frac{\pi a^2 h}{6}$$

កូអរដោនេសង់ត្រូអ៊ីតនៃអង្គធាតុគឺ

$$\bar{x}=\frac{\int \tilde{x}dV}{\int dV}=\frac{1}{\frac{\pi a^2 h}{6}}\int_0^h x\left(\frac{1}{2}\pi\right)\left(\frac{a}{h}x\right)^2 dx=\frac{6}{\pi a^2 h}\times\frac{\pi a^2 h^2}{8}=\frac{3}{4}h$$

$$\bar{y}=\frac{\int \tilde{y}dV}{\int dV}=\frac{6}{\pi a^2 h}\int_0^h \frac{4r}{3\pi}\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right)dx=\frac{6}{\pi a^2 h}\times\frac{2}{3}\int_0^h\left(\frac{a}{h}x\right)^2 dx=\frac{6}{\pi a^2 h}\times\frac{a^3 h}{6}=\frac{a}{\pi}$$

3. អង្គធាតុសមាស

អង្គធាតុសមាសទីនេះគឺជាការតភ្ជាប់គ្នានៃរាងងាយនៃអង្គធាតុ។ ត្រូវបានកំណត់ទីតាំងទីប្រជុំទម្ងន់ដូចរបាយចំណុចរូបធាតុដែរ។

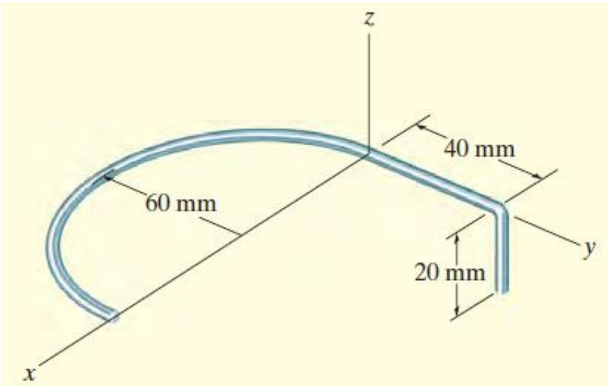
$$\bar{x}=\frac{\Sigma\tilde{x}_i P_i}{\Sigma P_i}\ ,\ \bar{y}=\frac{\Sigma\tilde{y}_i P_i}{\Sigma P_i}\ ,\ \bar{z}=\frac{\Sigma\tilde{z}_i P_i}{\Sigma P_i}$$

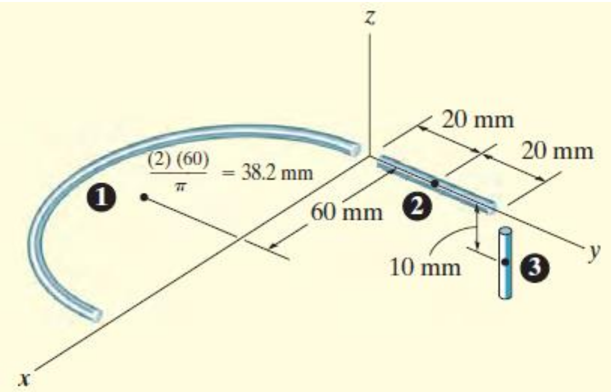
$\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ ជាកូអរដោនេនៃទីប្រជុំទម្ងន់ G នៃសមាសធាតុ។

$\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$ ជាកូអរដោនេនៃទីប្រជុំទម្ងន់នៃធាតុនីមួយៗ។

ΣP ជាផលបូកទំងន់ទាំងអស់របស់អង្គធាតុនីមួយៗ។

ឧទាហរណ៍១៤៖ ចូររកទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃខ្សែដូចរូប។





ដំណោះស្រាយ

- ផ្នែកសមាសៈ ខ្សែត្រូវបានចែកជាបីកំណាត់ដូចបង្ហាញលើរូប។

- ដៃឃ្នាស់ម៉ូម៉ង់ៈ ទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតចំពោះអង្កត់នីមួយៗត្រូវបានកំណត់ និងបង្ហាញនៅលើរូប។ ជាពិសេស សង់ត្រូអ៊ីតត្រូវបានកំណត់ដោយអាំងតេក្រាល។

- ផលបូកៈ ការគណនាត្រូវបានកត់ត្រាដូចតទៅ៖

Segment	L (mm)	$\tilde{x}$ (mm)	$\tilde{y}$ (mm)	$\tilde{z}$ (mm)	$\tilde{x}L$ (mm^2)	$\tilde{y}L$ (mm^2)	$\tilde{z}L$ (mm^2)
1	$\pi(60) = 188.5$	60	−38.2	0	11 310	−7200	0
2	40	0	20	0	0	800	0
3	20	0	40	−10	0	800	−200
	$\Sigma L = 248.5$				$\Sigma \tilde{x}L = 11\,310$	$\Sigma \tilde{y}L = -5600$	$\Sigma \tilde{z}L = -200$

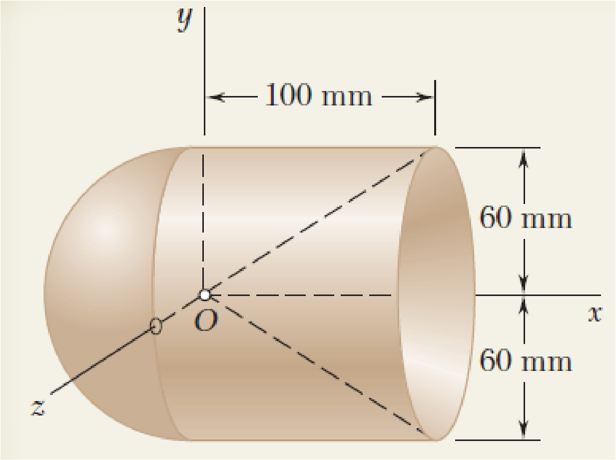
ដូចនេះ

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}\ell}{\Sigma \ell} = \frac{11310}{248.5} = 45.5\text{mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{x}\ell}{\Sigma \ell} = \frac{-5600}{248.5} = -22.5\text{mm}$$

$$\bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}\ell}{\Sigma \ell} = \frac{-200}{248.5} = -0.805\text{mm}$$

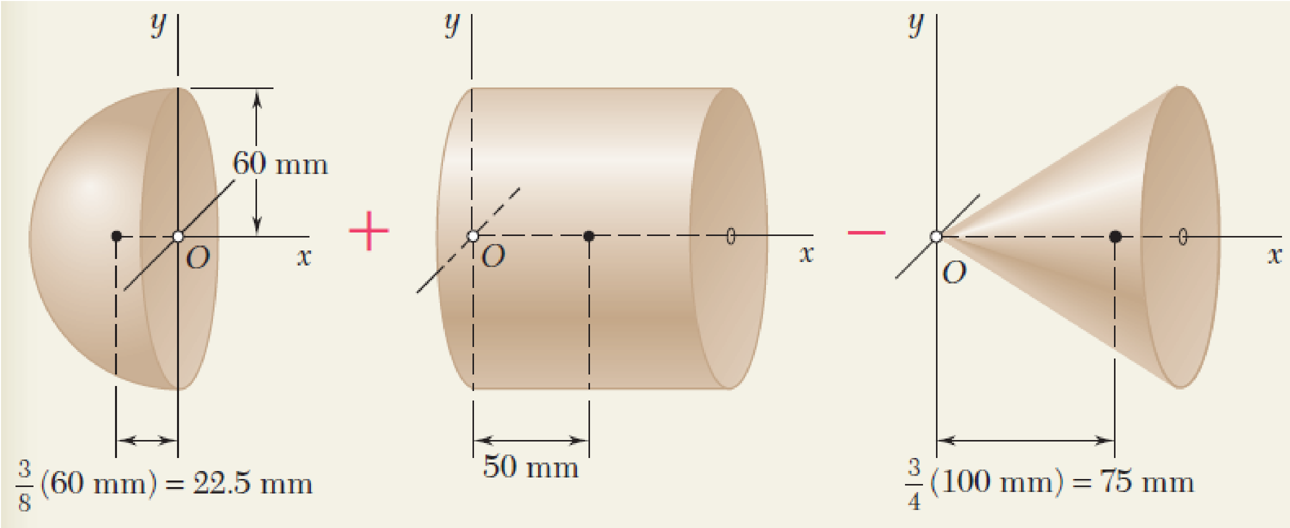
ឧទាហរណ៍១៥៖ ចូរកំណត់ទីតាំងនៃទីប្រជុំទម្ងន់នៃអង្គធាតុបរិវត្តស្មើសាច់ ដែលទទួលបានដោយផ្សារភ្ជាប់កន្លះស្វ៊ែ និងស៊ីឡាំង និងខ្វៀលកោនមួយចេញ។



ដំណោះស្រាយ

ដោយសារស៊ីមេទ្រី ទីប្រជុំទម្ងន់ដេកនៅលើអ័ក្ស x ។ ដូចបង្ហាញលើរូប អង្គធាតុអាចទទួលបានដោយបន្ថែម

កន្លះស្វ៊ែទៅស៊ីឡាំង និងបន្ទាប់ដកកោនចេញ។ មាឌនិងអាប់ស៊ីសនៃសង់ត្រូអ៊ីតនៃធាតុនីមួយៗទទួលបានពីរូបបង្ហាញ។



ទិន្នន័យត្រូវបានគណនាកត់ត្រទុកនៅក្នុងតារា

ធាតុផ្សំ	មាឌ mm^3	$\tilde{x}$(mm)	$\tilde{x}V(mm^4)$
កន្លះស្វ៊ែ	$\frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}(60)^3 = 0.4524\times10^6$	-22.5	-10.18×10^6
ស៊ីឡាំង	$\pi(60)^2 100 = 1.1310\times10^6$	$+50$	$+56.55\times10^6$
កោន	$-\frac{\pi}{3}(60)^2 100 = -0.3770\times10^6$	$+75$	-28.28×10^6
	$\Sigma V = 1.206\times10^6$		$\Sigma\tilde{x}V = +18.09\times10^6$

ដូចនេះ $\bar{x}\Sigma V = \Sigma\tilde{x}V$ ៖ $\Rightarrow \bar{x} = \frac{\Sigma\tilde{x}V}{\Sigma V} = \frac{18.09\times10^6}{1.206\times10^6} = 15mm$

4. ទ្រឹស្តីបទ PAPPUS និង GULDINUS

ទ្រឹស្តីបទពីររបស់ Pappus និង Guldinus ត្រូវបានប្រើដើម្បីរកផ្ទៃនិងមាឌនៃវត្ថុបរិវត្តណាមួយ។ ផ្ទៃបរិវត្តបង្កើតដោយទាក់ទងប្លង់កោងជៀបទៅនឹងអ័ក្សនឹងមិនចាប់អារម្មណ៍នៅក្នុងប្លង់ខ្សែកោង ផ្ទុយមកវិញអ័ក្ស នឹងមិនចាប់អារម្មណ៍នៅក្នុងប្លង់នៃផ្ទៃ។ ឧទាហរណ៍ខ្សែ AB វិលជៀបនឹងអ័ក្សនឹង វាបង្កើតបានជាផ្ទៃកោន។

- **ផ្ទៃ**: ផ្ទៃបរិវត្តស្មើនឹងផលគុណនៃប្រវែងជនេតខ្សែកោង និងចម្ងាយធ្វើដំណើរដោយសង់ត្រូអ៊ីតនៃខ្សែកោង កំឡុងពេល ផ្ទៃត្រូវបានបង្កើត។

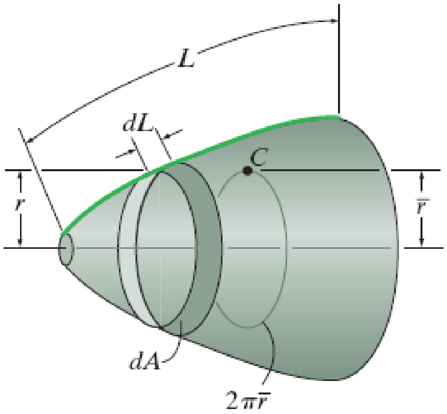
សម្រាយបញ្ជាក់

ធាតុប្រវែង dL នៃខ្សែកោងដូចរូប វិលជៀបអ័ក្សបានចម្ងាយ $2\pi r$ វាបង្កើតបានជាកងដែលមានផ្ទៃ

$dA = 2\pi r dL$ ។ ផ្ទៃដែលបង្កើតដោយខ្សែបរិវត្តគឺ $A = 2\pi\int_L r dL$ ។ សមីការនេះអាចសម្រួលដោយចំណាំថា ទីតាំង r នៃសង់ត្រូអ៊ីត ចំពោះខ្សែមានប្រវែងសរុប L អាចត្រូវបានកំណត់ពីសមីការដែលមានរាងសមីការមុន ដែលឱ្យឈ្មោះ $\int_L r dL = \bar{r}\cdot L$ ដែល $\bar{r}$ ជាទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃខ្សែប្រវែង L ។ ដូចនេះផ្ទៃបរិវត្តសរុបក្លាយជា៖

$A = 2\pi\bar{r}\,L$ និងទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃខ្សែកោង $\bar{r} = \dfrac{A}{2\pi L}$

ជាទូទៅ បើខ្សែមិនធ្វើបានជុំវិញទេគឺ៖ $A = \theta\cdot\bar{r}\cdot L$ ដែល A ជាផ្ទៃបរិវត្ត, θ ជាមុំបរិវត្តគិតជារ៉ាដ្យង់(rad) ដែល $\theta \le 2\pi$, $\bar{r}$ ជាចម្ងាយកែងពីអ័ក្សបរិវត្តទៅនឹងសង់ត្រូអ៊ីតជនេតកោង និង L ជាប្រវែងជនេតកោង។



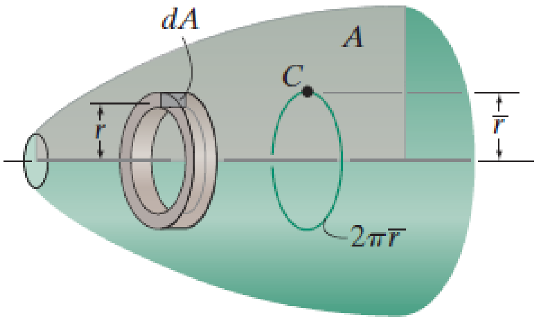
- **មាឌ៖** មាឌនៃអង្គធាតុបរិវត្តស្មើនឹងផលគុណនៃផ្ទៃដែលបង្កើត និងចម្ងាយធ្វើដំណើរដោយសង់ត្រូអ៊ីតផ្ទៃកំឡុងពេលមាឌត្រូវបានបង្កើតឡើង។

សម្រាយបញ្ជាក់

ជាតុផ្ទៃ dA ក្នុងរូបត្រូវបានធ្វើបរិវត្តជុំវិញអ័ក្សតាមចម្ងាយ $2\pi r$ វាបង្កើតកងដែលមានមាឌ $dV = 2\pi r\, dA$ ។ មាឌដែលបង្កើតដោយផ្ទៃបរិវត្ត A ជុំវិញអ័ក្សគឺ៖ $V = 2\pi\int_V rdA$

$\Rightarrow \int_A rdA = \bar{r}A$ ដែល $\bar{r}$ ទីតាំងរបស់សង់ត្រូអ៊ីត C នៃជនេតផ្ទៃ A។ មាឌក្លាយជា $V = 2\pi\bar{r}A$ ។

ជាទូទៅ $V = \theta\bar{r}\cdot A$ ដែល V ជាមាឌបរិវត្ត, θ ជាមុំបរិវត្តគីតជារ៉ាដ្យង់ ដែល $\theta \le 2\pi$, $\bar{r}$ ជាចម្ងាយកែងពីអ័ក្សបរិវត្តទៅនឹងសង់ត្រូអ៊ីតនៃជនេតផ្ទៃ, A ជាជនេតផ្ទៃ។



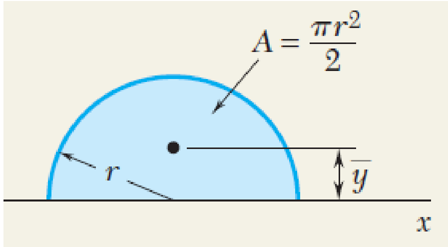
- សមាសរាង: យើងបាន៖

$A = \theta\Sigma(\tilde{r}L)$

$V = \theta\Sigma(\tilde{r}A)$

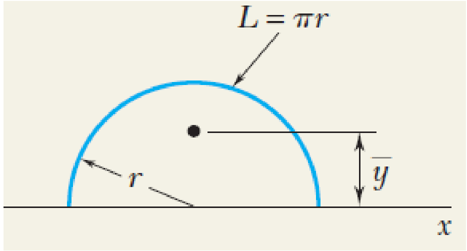
ឧទាហរណ៍១៦ ដោយប្រើទ្រឹស្តី Pappus-Guldinus ចូរកំណត់៖

ក. សង់ត្រូអ៊ីតនៃផ្ទៃកន្លះរង្វង់។ ខ. សង់ត្រូអ៊ីតនៃធ្នូពាក់កណ្ដាលរង្វង់។



ដំណោះស្រាយ

ក. មាឌស្វ៊ែស្មើនឹងផលគុណនៃផ្ទៃកន្លះរង្វង់ និងចម្ងាយធ្វើដំណើរដោយសង់ត្រូអ៊ីតនៃកន្លះរង្វង់នៅក្នុងមួយបរិវត្តជុំវិញអ័ក្ស x។

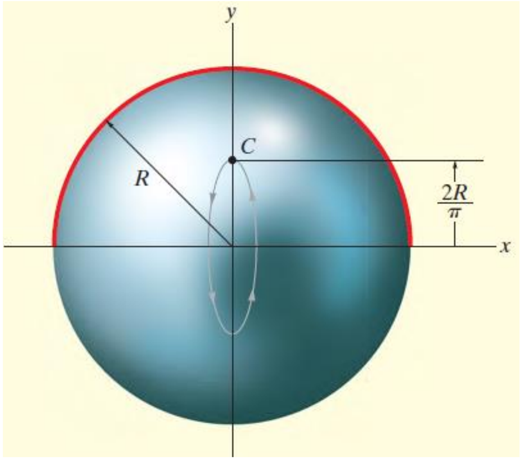


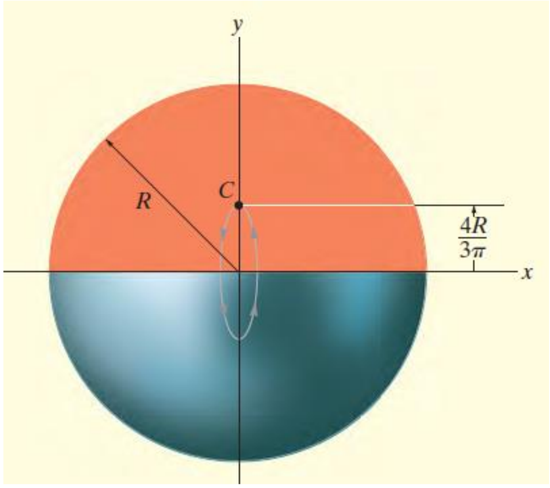
$V = 2\pi \bar{y} A \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi \bar{y}\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) \Rightarrow \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$

ខ. ផ្ទៃស្វ៊ែស្មើនឹងផលគុណនៃប្រវែងកន្លះរង្វង់ដែលបង្កើត និងចម្ងាយធ្វើដំណើរដោយសង់ត្រូអ៊ីតរបស់វាក្នុងមួយបរិវត្ត។

$A = 2\pi \bar{y} L \Rightarrow 4\pi r^2 = 2\pi \bar{y}(\pi r) \Rightarrow \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$

ឧទាហរណ៍១៧៖ ចូរបង្ហាញថាផ្ទៃស្វ៊ែស្មើនឹង $A = 4\pi R^2$ និងមាឌ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ។





ដំណោះស្រាយ

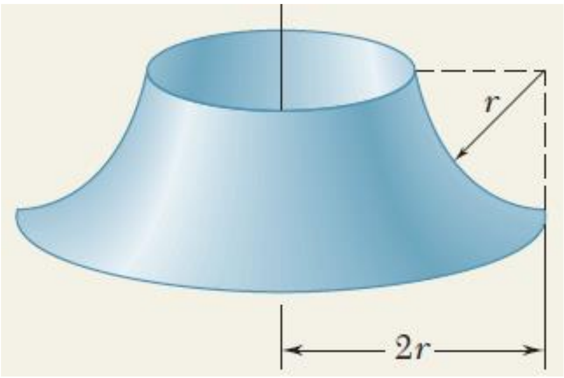
- **ក្រឡាផ្ទៃ៖** ក្រឡាផ្ទៃនៃស្វ៊ែនៅក្នុងរូបខាងឆ្វេងត្រូវបានបង្កើតដោយបរិវត្តកន្លះធ្នូរង្វង់ជុំវិញអ័ក្ស x ។ សង់ត្រូអ៊ីតនៃ ធ្នូនេះស្ថិតនៅចម្ងាយ $\bar{r} = \frac{2R}{\pi}$ ពីអ័ក្សបរិវត្ត(អ័ក្ស x)។ ដោយសារសង់ត្រូអ៊ីតធ្វើចលនាកាត់តាមមុំ $\theta = 2\pi \text{rad}$ ដើម្បីបង្កើតស្វ៊ែ បន្ទាប់អនុវត្តន៍សមីការ យើងបាន៖

$A = \theta \bar{r} L = 2\pi\left(\frac{2R}{\pi}\right)\pi R = 4\pi R^2$

- **មាឌ៖** មាឌនៃស្វ៊ែត្រូវបានបង្កើតឡើងដោយបរិវត្តកន្លះផ្ទៃរង្វង់ក្នុងរូបខាងឆ្វេងធៀបនឹងអ័ក្ស x ។ ទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីត $\bar{r} = \frac{4R}{3\pi}$ និងអនុវត្តន៍សមីការ យើងបាន៖

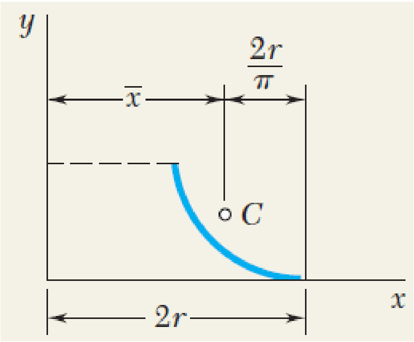
$$V=\theta\bar{r}A=2\pi\left(\frac{4R}{3\pi}\right)\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right)=\frac{4}{3}\pi R^3$$

ឧទាហរណ៍១៨៖ ចូរកកំណត់ក្រឡាផ្ទៃបរិវត្តដូចរូប ដែលទទួលបានដោយរង្វិលមួយភាគបួននៃរង្វង់ជុំវិញអ័ក្សឈរ។



ដំណោះស្រាយ

ទាក់ទងទៅនឹងទ្រឹស្តី Pappus-Guldinus ក្រឡាផ្ទៃដែលបង្កើតស្មើនឹងផលគុណ ប្រវែងធ្នូ និងចម្ងាយទៅសង់ត្រូអ៊ីតរបស់វា។ យើងបាន៖

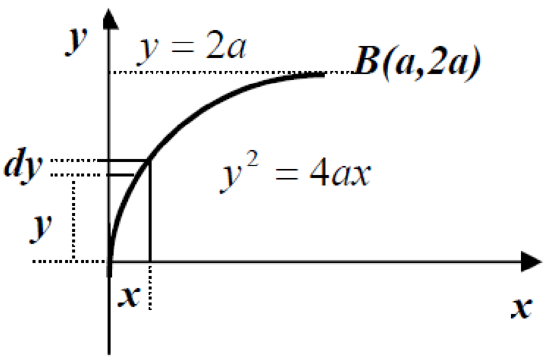


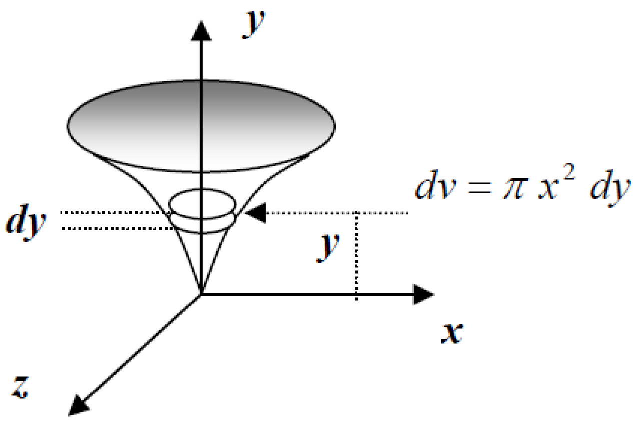
$$x=2r-\frac{2r}{\pi}=2r\left(1-\frac{1}{\pi}\right)$$

$$A=2\pi\bar{x}L=2\pi\left[2r\left(1-\frac{1}{\pi}\right)\right]\left(\frac{\pi r}{2}\right)$$

ឬ $A=2\pi r^2(\pi-1)$

ឧទាហរណ៍១៩៖ ដោយបង្វិលផ្ទៃជុំវិញអ័ក្ស Oy កំណត់ដោយខ្សែកោងប៉ារ៉ាបូលមានសមីការ $y^2=4ax$ និងបន្ទាត់មានសមីការ $y=2a$ យើងទទួលបានមាឌ ។ ចូររកផ្ចិតម៉ាសនៃមាឌនេះ។





ដំណោះស្រាយ

រង្វិលផ្ទៃនេះជៀបទៅនឹងអ័ក្ស y ឱ្យអង្គធាតុបរិវត្ត។ តាមហេតុផលស៊ីមេទ្រី ផ្ចិតម៉ាសនៅលើអ័ក្ស y នោះ $\bar{x}=\bar{z}=0$ ។ ជ្រើសរើសធាតុមាឌ $dV=\pi x^2dy$

មាឌបរិវត្ត $V=\int_0^{2a}\pi x^2dy=\int_0^{2a}\pi\left(\frac{y^4}{16a^2}\right)dy=\frac{\pi}{16a^2}\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^{2a}=\frac{2}{5}\pi a^3$

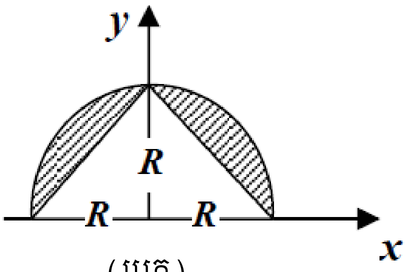
កូអរដោនេនៃផ្ចិតម៉ាសនៃមាឌលើអ័ក្សy ឱ្យដោយៈ

$$\bar{y}=\frac{1}{m}\int ydm=\frac{1}{\rho V}\int y\rho dV=\frac{1}{V}\int_0^{2a}y\pi x^2dy=\frac{1}{V}\int_0^{2a}y\pi\left(\frac{y^2}{4a}\right)^2dy$$

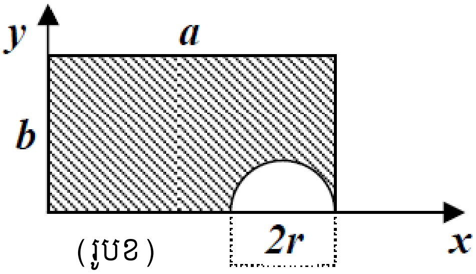
$$\bar{y}=\frac{\pi}{16a^2V}\int_0^{2a}y^5dy=\frac{\pi}{16a^2\cdot\frac{2}{5}\pi a^3}\left[\frac{y^6}{6}\right]_0^{2a}=\frac{5}{3}a$$

ដូចនេះ $G\left(0,\ 0,\ \frac{5a}{3}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍២០៖ ចូរកំណត់កូអរដោនេផ្ចិតនិចលភាព (តាមទ្រឹស្តី Guldin)នៃអង្គធាតុស្មើសាច់ដូចតទៅ៖



(រូបក)



(រូបខ)

ដំណោះស្រាយ

ក. ចំពោះរូបក. អង្គធាតុកើតពីកន្លះថាសក្វៀលត្រីកោណសមបាតចេញដែលមានបាតជាអង្កត់ផ្ចិតនៃថាស និងកម្ពស់ជាកាំនៃថាស។ តាមហេតុផលស៊ីមេទ្រី អង្គធាតុមានផ្ចិតម៉ាសនៅលើអ័ក្ស y នោះ $\bar{x}=0$ និង

$$\bar{y}=\frac{V_{tot}/x}{2\pi S_{tot}}=\frac{V(sphere)-V(2cones)}{2\pi(S_{dis}-S_{tria})}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3-2\cdot\frac{1}{3}\pi R^3}{2\pi\left(\frac{\pi R^2}{2}-R^2\right)}=\frac{2R}{3(\pi-2)}$$

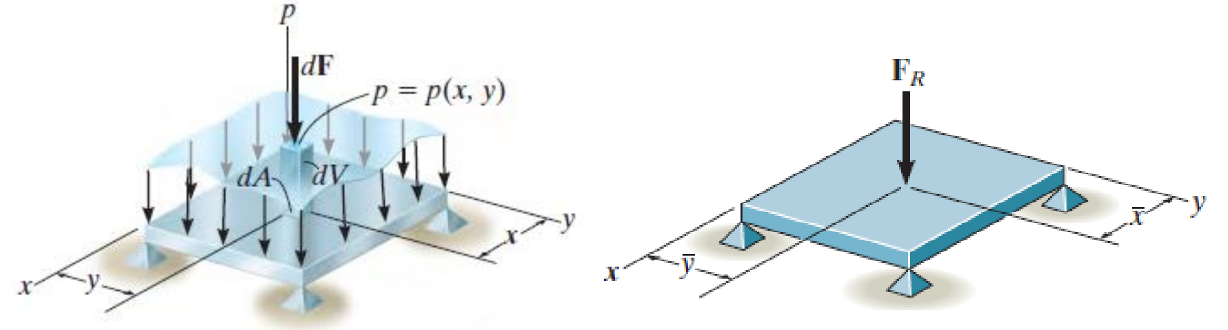
ខ. រូបខ. អង្គធាតុកើតពីបន្ទះចតុកោណកែងក្វៀលកន្លះថាសចេញ

$$\bar{x} = \frac{V_{tot}/y}{2\pi S_{tot}} = \frac{V(cylin) - V(demi-torre)}{2\pi(S_{dis} - S_{tria})} = \frac{\pi a^2 b - \frac{1}{2}\pi r^2 2\pi(a-r)}{2\pi\left(ab - \frac{\pi r^2}{2}\right)} = \frac{a^2 b - \pi r^2(a-r)}{2ab - \pi r^2}$$

$$\bar{y} = \frac{V_{tot}/x}{2\pi S_{tot}} = \frac{V(cylin - V(sphere)}{2\pi(S_{dis} - S_{trian})} = \frac{\pi b^2 a - \frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi\left(ab - \frac{\pi r^2}{2}\right)} = \frac{3ab^2 - 4r^3}{3(2ab - \pi r^2)}$$

5. របាយកម្លាំងសរុប

យើងបានសិក្សារបាយកម្លាំងនៅជំពូកមុនរួចហើយ យើងបានពិភាក្សាវិធីសាស្ត្រដែលត្រូវប្រើដើម្បីសម្រួលរបាយកម្លាំងពីវិមាត្រទៅជាកម្លាំងសរុបទោលដែលមានអំពើលើចំណុចពិសេស។ នៅក្នុងផ្នែកនេះ យើងនឹងធ្វើទូទៅនីយកម្មវិធីសាស្ត្រនេះដើម្បីរួមបញ្ចូលបន្ទះផ្ទៃដែលមានរាងណាមួយនិងត្រូវទទួលរងចំពោះរបាយបន្ទុក។ យើងពិនិត្យបន្ទះរងរបាយបន្ទុកដូចរូប ត្រូវបានឱ្យនិយមន័យដោយ $p = p(x,y)$ Pa ដែល $1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$ ។ ដោយយើងស្គាល់អនុគមន៍នេះ យើងអាចកំណត់កម្លាំងរុប $\vec{F}_R$ ដែលមានលើបន្ទះ និងទីតាំងវា $(\bar{x},\bar{y})$ ។



- **របាយសម្ពាធលើផ្ទៃ:** កម្លាំង $d\vec{F}$ មានអំពើលើឌីផេរ៉ង់ស្យែលផ្ទៃ dA នៃបន្ទះ ទីតាំងស្ថិតនៅត្រង់ចំណុចណាមួយ (x,y) មានទំហំ $dF = p(x,y)dA$ ។

- **ទំហំនៃកម្លាំងសរុប:** ចំណាំថា $p(x,y)dA = dV$ ជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលមាឌ។ ទំហំនៃ F_R ជាផលបូកនៃឌីផេរ៉ង់ស្យែលកម្លាំងមានលើក្រឡាផ្ទៃ A ទាំងមូល។ កម្លាំងទាំងអស់ស្របគ្នាមានទិសដៅដូចគ្នា:

$$F_R = \Sigma F \,, F_R = \int_A p(x,y)\,dA = \int_V dV$$

- **ទីតាំងនៃកម្លាំងសរុប:** ទីតាំង $(\bar{x},\bar{y})$ នៃ $\vec{F}_R$ ត្រូវបានកំណត់ដោយដាក់ម៉ូម៉ង់នៃ $\vec{F}_R$ ស្មើនឹងម៉ូម៉ង់នៃឌីផេរ៉ង់ស្យែលកម្លាំង $d\vec{F}$ ទាំងអស់ធៀបនឹងអ័ក្ស y និង x ។

$$\bar{x} = \frac{\int_A xp(x,y)\,dA}{\int_A p(x,y)\,dA} = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV} \,,\; \bar{y} = \frac{\int_A yp(x,y)\,dA}{\int_A p(x,y)\,dA} = \frac{\int_V y\,dV}{\int_V dV}$$

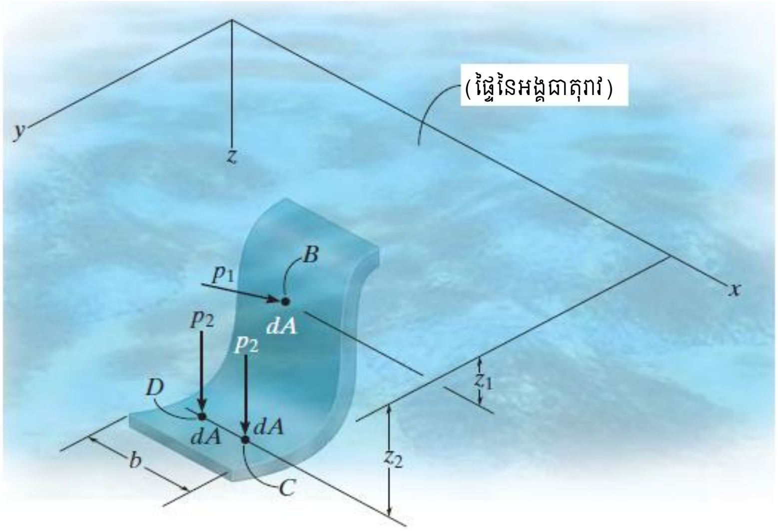
យើងឃើញថាទិសសកម្មនៃកម្លាំងសរុបកាត់តាមសង់ត្រូអ៊ីត។

6. សម្ពាធសន្ទនីយ

ទាក់ទងទៅនឹងច្បាប់ប៉ាស្កាល់ សន្ទនីយនៅនឹងបង្កើតសម្ពាធ p នៅចំណុចដែលដូចគ្នាក្នុងគ្រប់ទិស។ ទំហំនៃ p ត្រូវបានវាស់ដូចជាកម្លាំងក្នុងមួយខ្នាតផ្ទៃអាស្រ័យទៅនឹងទំងន់មាឌ γ ឬម៉ាសមាឌ ρ នៃសន្ទនីយនិងជម្រៅ z នៃចំណុចពីផ្ទៃសន្ទនីយ។ ទំនាក់ទំនងនេះអាចសំដែងជាលក្ខណៈគណិតវិទ្យា:

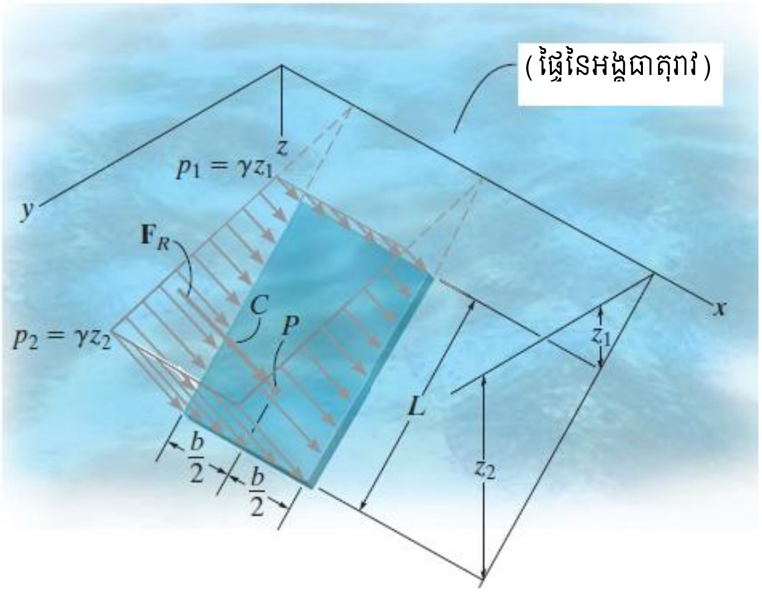
$$p = \gamma z = \rho g z$$

ដែល g ជាសំទុះបណ្ដាលមកពីទំនាញដី។ សមីការមានសុពលភាពតែចំពោះសន្ទនីយដែលត្រូវបាន សន្ទនីយមិនអាចបណ្ណែនបាន ហើយដោយសារម៉ាសមាឌរបស់វាប្តូរជាមួយសម្ពាធនិងសីតុណ្ហភាព។ សមីការ មិនអាចត្រូវបានប្រើ។ ដើម្បីពន្យល់បង្ហាញរបៀបបង្កើតសមីការ ត្រូវបានអនុវត្ត ពិនិត្យបន្ទះជ្រមុជនៅក្នុងសន្ទនីយ ដូចបង្ហាញលើរូប។ ចំណុចបីនៅលើបន្ទះត្រូវបានធ្វើជាចំណុចពិសេស។ ចំណុច B មានជម្រៅ z_1 ពីផ្ទៃសន្ទនីយ សម្ពាធនៅជម្រៅនេះ $p_1 = \gamma z_1$ ចំណែកឯចំណុច C និង D នៅជម្រៅ z_2 មានសម្ពាធ $p_2 = \gamma z_2$។ នៅរាល់ករណីសម្ពាធមានអំពើកែងទៅនឹងផ្ទៃ dA ស្ថិតនៅចំណុចពិសេស។ ដោយប្រើសមីការ អាចកំណត់កម្លាំងសរុប ដែលបណ្ដាល ដោយអង្គធាតុរាវ សង្កត់ជាវេបាយកម្លាំង ហើយបញ្ជាក់ទីតាំងវាលើផ្ទៃនៃបន្ទះលិច។ ទម្រង់បន្ទះបីមានរាងផ្សេងគ្នាយើងនឹងពិនិត្យឥឡូវនេះ។

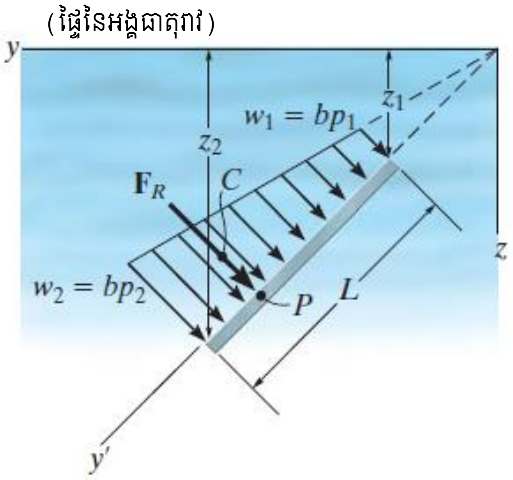


បន្ទះមានទទឹងថេរ

បន្ទះចតុកោណកែងមានទទឹងថេរបានពន្លិចនៅក្នុងអង្គធាតុរាវមានទម្ងន់មាឌ γ ដូចបង្ហាញលើរូប។ ប្លង់នៃបន្ទះផ្គុំបានមុំជាមួយប្លង់ដេក។

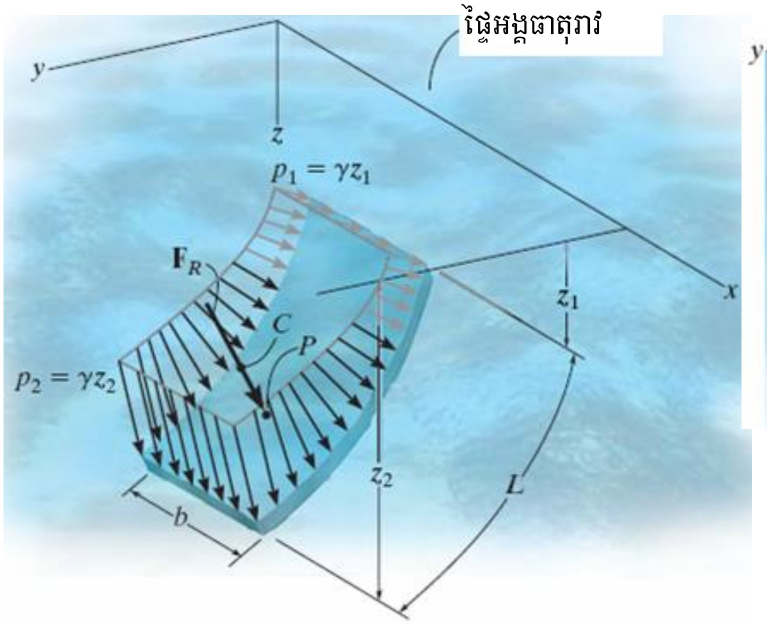


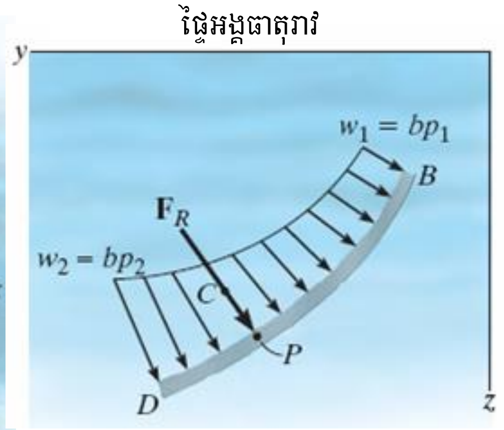
ដោយសារមានរបាយសម្ពាធ យើងអាចកំណត់របាយកម្លាំង រួចគណនាកម្លាំងរុបដែលមានលើបន្ទះ។



បន្ទះកោងមានទទឹងថេរ

នៅពេលពន្លិចបន្ទះកោង កម្លាំងសង្កត់ដែលមានអំពើកែងទៅនឹងផ្ទៃកោងដោយប្តូរទិស។ របាយកម្លាំងដែលមានលើ បន្ទះត្រូវបានបង្ហាញដូចរូប នោះអាចគណនាកម្លាំងសរុបមានលើបន្ទះ។



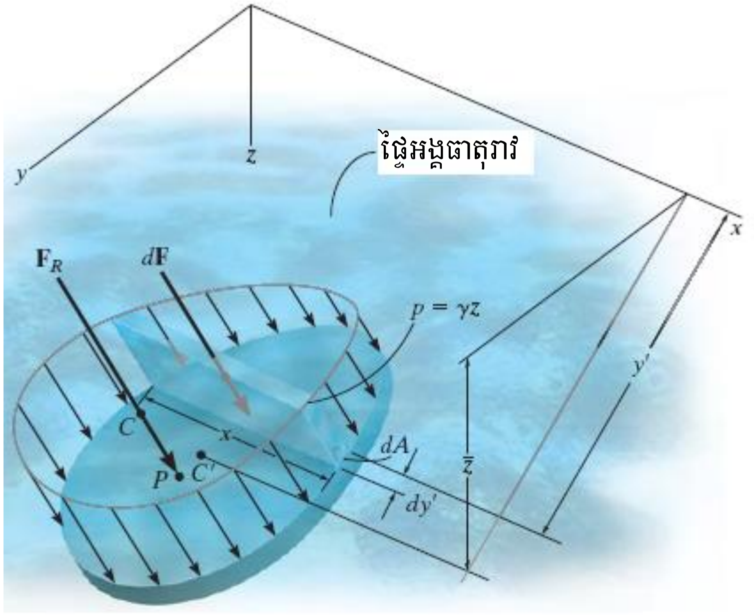


បន្ទះមានទទឹងប្រែប្រួល

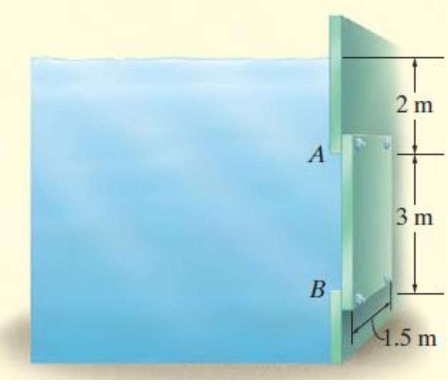
របាយកម្លាំងសង្កត់ដែលមានលើបន្ទះដែលពន្លិចនៅក្នុងអង្គធាតុរាវដូចបង្ហាញ។

កម្លាំងសរុប $F_R = \int_A p dA = \int_V dV = V$

ទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃរបាយកម្លាំង $\bar{x} = \dfrac{\int_V \tilde{x} dV}{\int_V dV}$, $\bar{y} = \dfrac{\int_V \bar{y}' dV}{\int_V dV}$



ឧទាហរណ៍២១៖ ចូរកំណត់ទំហំនិងទីតាំងនៃកម្លាំងអ៊ីដ្រូស្តាទិចសរុបដែលមានអំពើលើបន្ទះចតុកោណកែង AB ពន្លិច ដូចបង្ហាញលើរូប។ ទទឹងបន្ទះ 1.5m និងម៉ាសមាឌទឹក $\rho = 1000\text{kg/m}^3$ ។

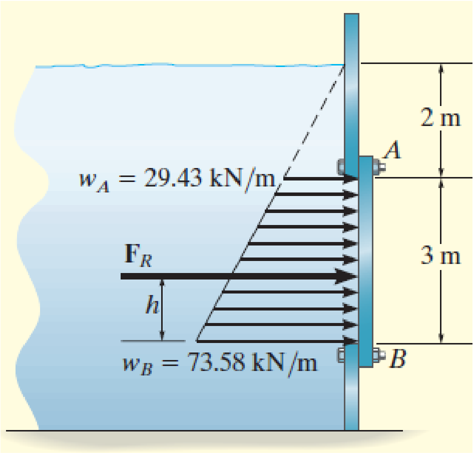


ដំណោះស្រាយ

របៀបដោះស្រាយមានពីររបៀប

- *របៀបដោះស្រាយទី១*

សម្ពាធទឹកនៅជម្រៅ A និង B គឺ



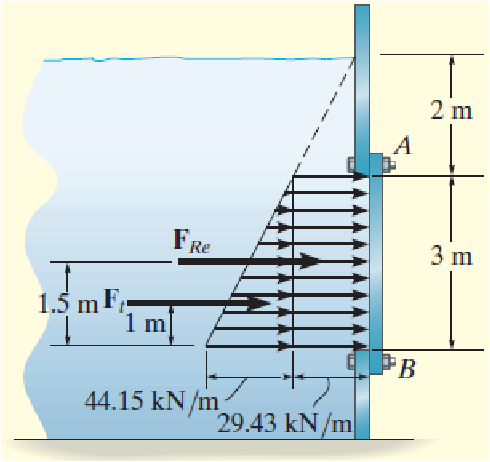
$$p_A = \rho_w g z_A = 1000 \times 9.81 \times 2 = 19.62\text{kPa}$$

$$p_B = \rho_w g z_B = 1000 \times 9.81 \times 5 = 49.05\text{kPa}$$

ដោយសារបន្ទះមានទទឹងថេរ សម្ពាធបន្ទុកអាចត្រូវបាន មើលនៅក្នុងពីរវិមាត្រដូចរូប។ តម្លៃនៃបន្ទុកនៅត្រង់ A និង B គឺ

$$w_A = bp_A = 1.5 \times 19.62 = 29.43\text{kN/m}$$

$$w_B = bw_B = 1.5 \times 49.05 = 73.58\text{kN/m}$$



ទំហំនៃកម្លាំងសរុប F_R បង្កើតដោយរបាយបន្ទុកនេះគឺ

$$F_R = \text{ក្រឡាផ្ទៃចតុកោណព្នាយ} = \frac{3 \times (29.4 + 73.58)}{2}$$

$$= 154.5\text{kN}$$

កម្លាំងនេះមានអំពើកាត់តាមសង់ត្រូអ៊ីតនៃក្រឡាផ្ទៃនេះ

$$h = \frac{1}{3}\left(\frac{2 \times 29.43 + 73.58}{29.43 + 73.58}\right) \times 3 = 1.29\text{m}$$

វាស់ទៅលើចាប់ពីចំណុច B ។

- របៀបដោះស្រាយទី២

លទ្ធផលដូចគ្នាអាចទទួលបានដោយពិនិត្យកុំប៉ូសង់ពីរនៃ $\vec{F}_R$ ឱ្យនិយមន័យដោយត្រីកោណនិងចតុកោណដូចរូប។ កម្លាំងនីមួយៗមានអំពើកាត់បង្គុំសង់ត្រូអ៊ីតនិងមានទំហំៈ

$$F_{Re} = 29.43 \times 3 = 88.3\text{kN}$$

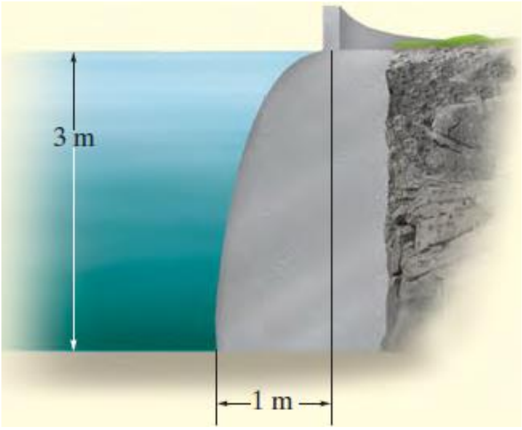
$$F_t = \frac{1}{2} \times 44.15 \times 3 = 66.2\text{kN}$$

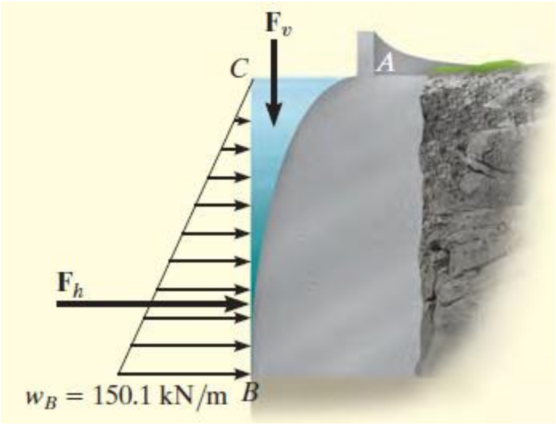
ដូចនេះ $F_R = F_{Re} + F_t = 154.5\text{kN}$

ទីតាំងចំណុចចាប់នៃ $\vec{F}_R$ ត្រូវបានកំណត់ដោយផលបូកម៉ូម៉ង់ធៀប B ៖

$$M_{RB} = \Sigma M_B,\ \ 154.5 \times h = 88.3 \times 1.5 + 66.2 \times 1 \ \Rightarrow h = 1.29\text{m}$$

ឧទាហរណ៍២២ៈ ចូរកំណត់ទំហំនៃកម្លាំងអ៊ីដ្រូស្តាទិចសរុបដែលមានអំពើលើផ្ទៃនៃជញ្ជាំងឆ្នេរសមុទ្រមានរាងប៉ារ៉ាបូល ដូចបង្ហាញលើរូប។ ជញ្ជាំងមានប្រវែង 5m និងម៉ាសមាឌទឹកសមុទ្រ $\rho_w = 1020\text{kg/m}^3$ ។





ដំណោះស្រាយ

កុំប៉ូសង់ដេកនិងឈរនៃកម្លាំងសរុបនឹងត្រូវបានគណនា។ នៅលើរូបខាងឆ្វេង

$$p_B = \rho_w g z_B = 1020 \times 9.81 \times 3 = 30.02\text{kPa}$$

បន្ទាប់ $w_B = bp_B = 5 \times 30.02 = 150.1\text{kN/m}$

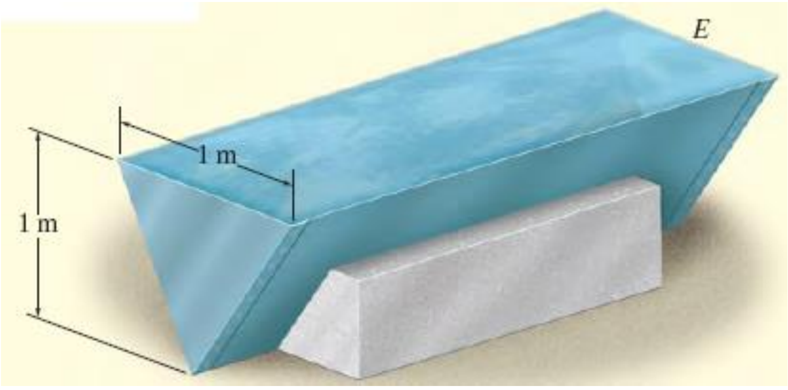
ដូចនេះ $F_h = \frac{1}{2} \times 3 \times 150.1 = 225.1\text{kN}$

ផ្ទៃនៃផ្នែកប៉ារ៉ាបូល ABC អាចត្រូវបានកំណត់។ ដូចនេះទម្ងន់ទឹកនៅក្នុងតំបន់ប្រវែង 5m គឺ

$F_v = \rho_w gb \times$ ក្រឡាផ្ទៃ ABC ឬ $F_v = (1020\times 9.81\times 5)\times\left(\frac{1}{3}\times 1\times 3\right) = 50\text{kN}$

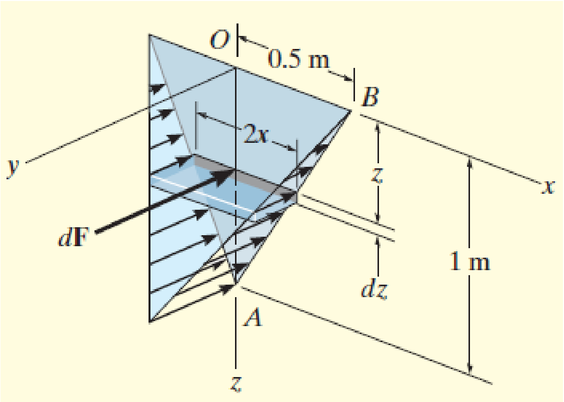
ដូចនេះកម្លាំងសរុបៈ $F_R = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = 231\text{kN}$

ឧទាហរណ៍២៣៖ ស្នូកមួយធ្វើដូចរូបត្រូវបានចាក់ទឹកពេញ។ ចូរកំណត់ទំហំ និងទីតាំងកម្លាំងសរុបដែលមានអំពើលើស្នូក។



ដំណោះស្រាយ

របាយសម្ពាធដែលមានអំពើលើចុងបន្ទះ E ត្រូវបានបង្ហាញលើរូប។ ទំហំនៃកម្លាំងសរុបស្មើនឹងមាឌនៃរបាយបន្ទុកនេះ។ យើងនឹងដោះស្រាយចំណោទដោយធ្វើអាំងតេក្រាល។ ដោយជ្រើសរើសធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលមាឌត្រូវបានបង្ហាញលើរូប យើងបាន៖



$dF = dV = pdA = \rho_w gz\times(2xdz) = 19620zxdz$

សមីការនៃបន្ទាត់ AB គឺ $x = 0.5(1-z)$

ដោយជំនួសនិងធ្វើអាំងក្រោល ដោយកំណត់

$z = 0$ ទៅ $z = 1\text{m}$ នាំឱ្យ

$$F = V = \int_V dV$$

$$= \int_0^{1\text{m}} 19620z\times 0.5(1-z)\,dz = 1.64\text{kN}$$

កម្លាំងសរុបនេះឆ្លងកាត់តាមសង់ត្រូអ៊ីតមាឌ។ ដោយសារមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី $\bar{x} = 0$

ដោយសារ $\tilde{z} = z$ ចំពោះធាតុមាឌ ។

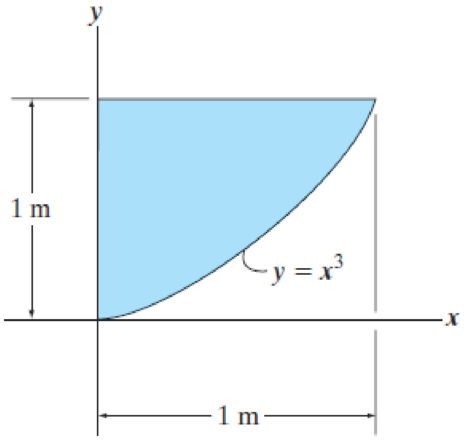
$$\bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}dV}{\int_V dV} = \frac{\int_0^{1\text{m}} z\times 19620z\times 0.5(1-z)\,dz}{1635} = 0.5\text{m}$$

☞ សង្ខេបមេរៀន

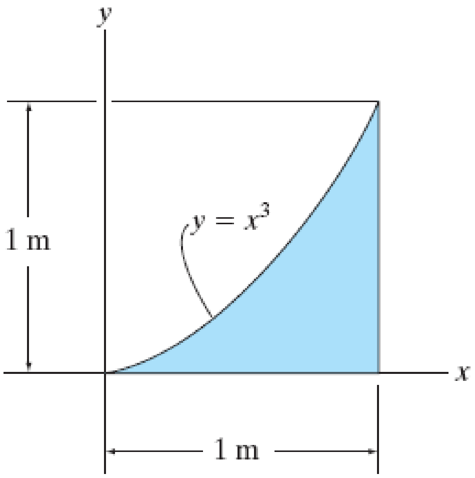
- កូអរដោនេផ្ចិតម៉ាសនៃប្រព័ន្ធចំណុចរូបធាតុ $\bar{x}=\frac{\Sigma\tilde{x}_iP_i}{\Sigma P_i}$, $\bar{y}=\frac{\Sigma\tilde{y}_iP_i}{\Sigma P_i}$, $\bar{z}=\frac{\Sigma\tilde{z}_iP_i}{\Sigma P_i}$
- សង់ត្រូអ៊ីតនៃមាឌ $\bar{x}=\frac{\int_V \tilde{x}dV}{\int_V dV}$, $\bar{y}=\frac{\int_V \tilde{y}dV}{\int_V dV}$, $\bar{z}=\frac{\int_V \tilde{z}dV}{\int_V dV}$
- សង់ត្រូអ៊ីតនៃផ្ទៃ $\bar{x}=\frac{\int_A \tilde{x}dA}{\int_A dA}$, $\bar{y}=\frac{\int_A \tilde{y}dA}{\int_A dA}$, $\bar{z}=\frac{\int_A \tilde{z}dA}{\int_A dA}$
- សង់ត្រូអ៊ីតនៃខ្សែ $\bar{x}=\frac{\int_L \tilde{x}dL}{\int_L dL}$, $\bar{y}=\frac{\int_L \tilde{y}dL}{\int_V dL}$, $\bar{z}=\frac{\int_L \tilde{z}dL}{\int_V dL}$
- ទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃរបាយកម្លាំងសរុប $\bar{x}=\frac{\int_A xp(x,y)\,dA}{\int_A p(x,y)\,dA}=\frac{\int_V x dV}{\int_V dV}$, $\bar{y}=\frac{\int_A yp(x,y)\,dA}{\int_A p(x,y)\,dA}=\frac{\int_V y\,dV}{\int_V dV}$

ចំណោទ

១. ចូរកំណត់ទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃចំណិតផ្ទៃដូចរូប។

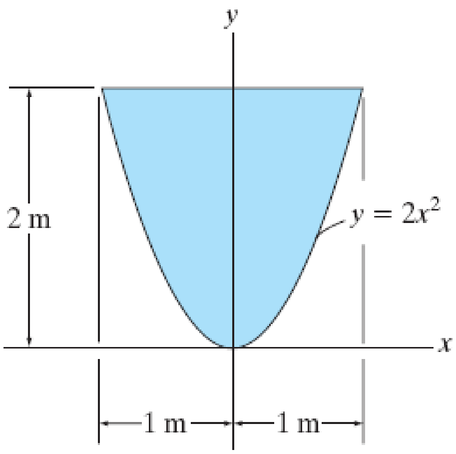


(រូបក)

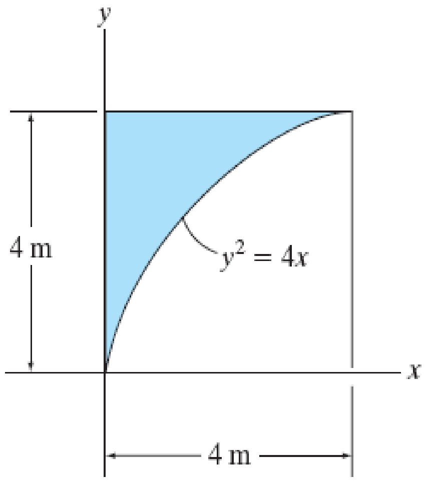


(រូបខ)

២. ចូរកំណត់ទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃចំណិតផ្ទៃដូចរូប។

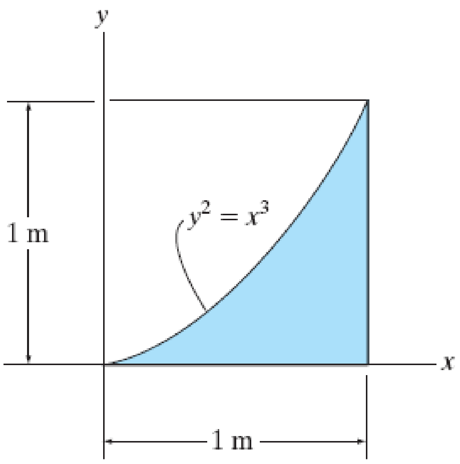


(រូបក)

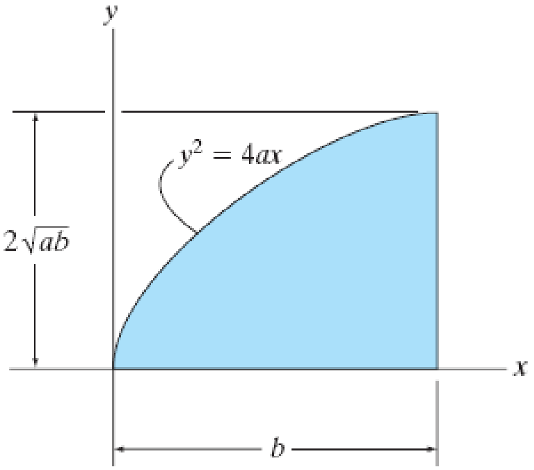


(រូបខ)

៣. ចូរកំណត់ទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃចំណិតផ្ទៃដូចរូប។

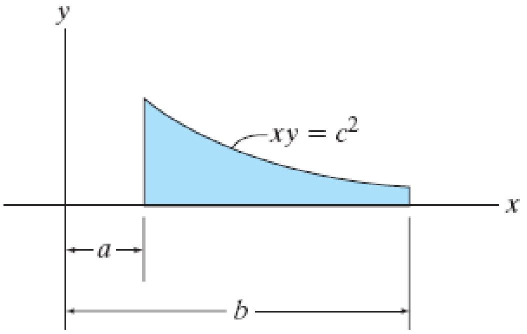


(រូបក)

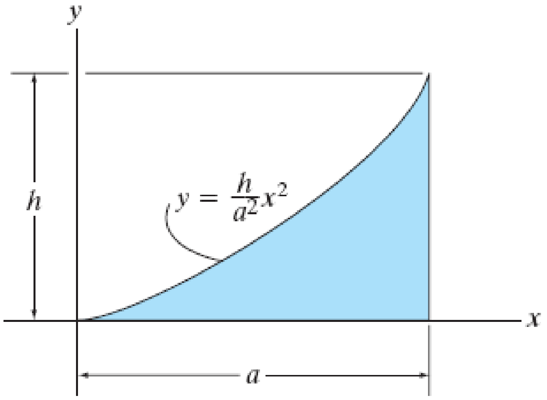


(រូបខ)

៤. ចូរកំណត់ផ្ទៃនិងសង់ត្រូអ៊ីត $(\overline{x}, \overline{y})$ នៃផ្ទៃ។

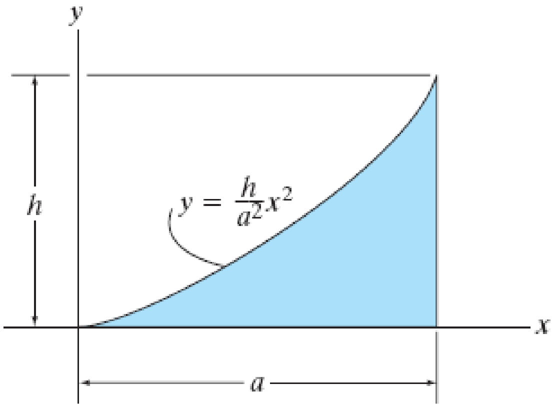


(រូបក)

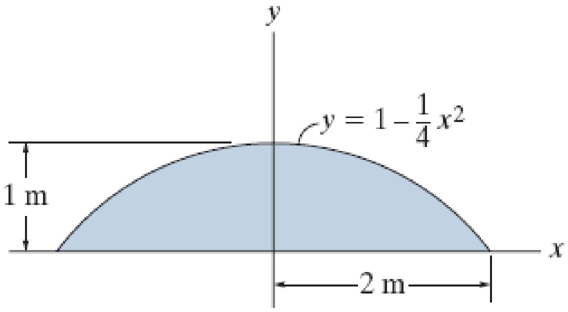


(រូបខ)

៥. ចូរកំណត់ផ្ទៃនិងសង់ត្រូអ៊ីត $(\overline{x}, \overline{y})$ នៃផ្ទៃ។

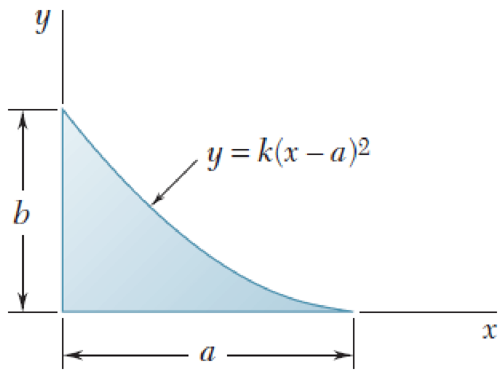


(រូបក)

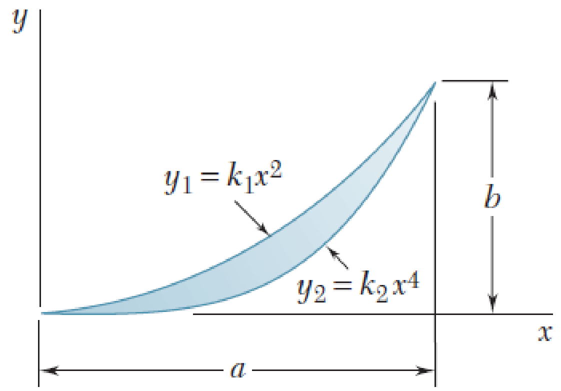


(រូបខ)

៦. ចូរកំណត់ទីតាមងសង់ត្រូអ៊ីតនៃក្រឡាផ្ទៃដូចរូប (សំដែលចម្លើយជាអនុគមន៍នៃ aនិងb)។

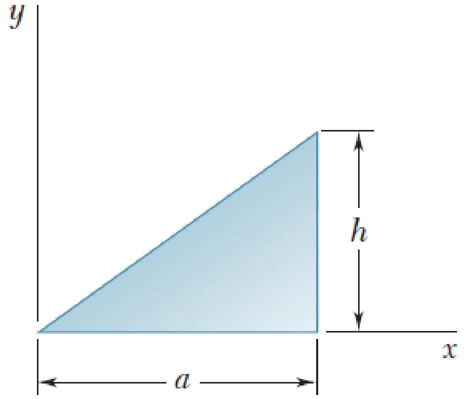


(រូបក)

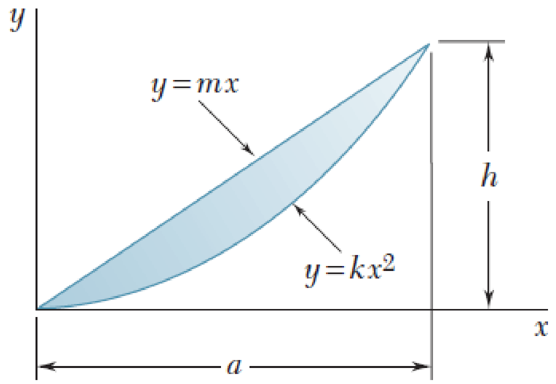


(រូបខ)

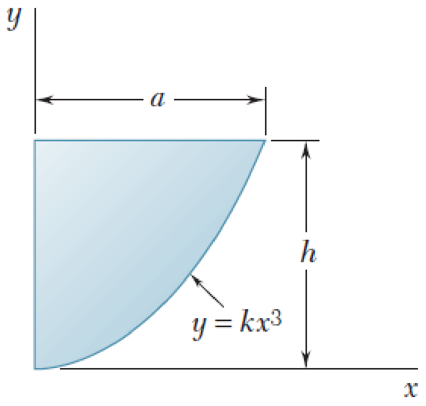
៧. ចូរកំណត់ទីតាមងសង់ត្រូអ៊ីតនៃក្រឡាផ្ទៃដូចរូប (សំដែងចម្លើយជាអនុគមន៍នៃa និងh)។



(រូបក)

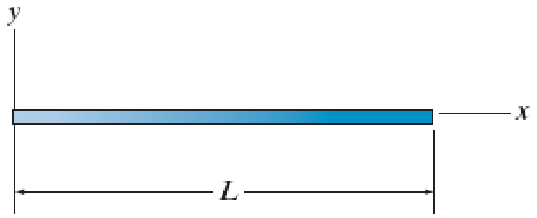


(រូបខ)

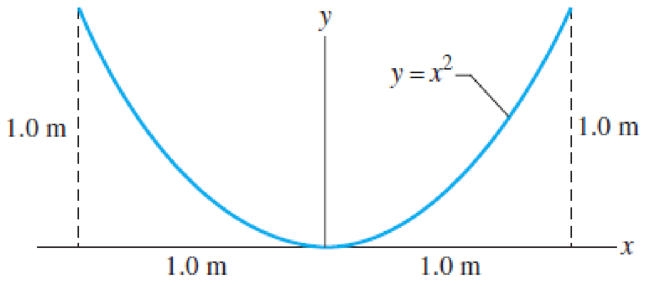


(រូបគ)

៨. ចូររកទីតាំងផ្ចិតម៉ាសនៃដងត្រង់បើម៉ាសវាក្នុងមួយខ្នាតប្រវែងឱ្យដោយ $m = m_0\left(1+\frac{x^2}{L^2}\right)$ ។



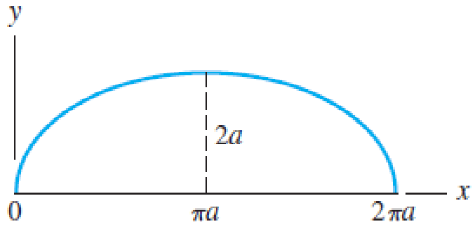
(លំហាត់៨)



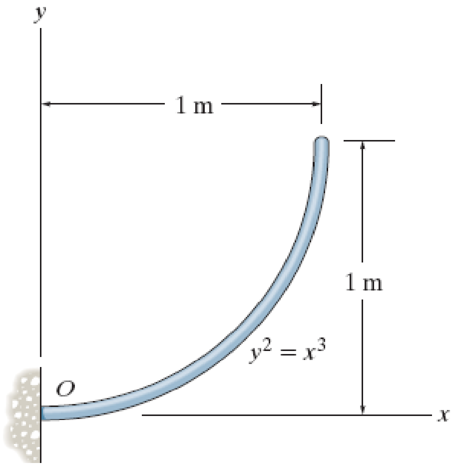
(លំហាត់៩)

៩. ចូររកទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃប៉ារ៉ាបូលដោយធ្វើអាំងតេក្រាល។

១០. សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃប្លង់កោងត្រូវបានស្គាល់ជាស៊ីក្លូអ៊ីតគឺ $x = a(\theta - \sin\theta)$ និង $y = a(1-\cos\theta)$ ។ ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដើម្បីរកកូអរដោនេនៃសង់ត្រូអ៊ីតនៃស៊ីក្លូអ៊ីតដែលទទួលបានដោយបម្រែបម្រួល θ ពី 0 ទៅ 2πrad ។



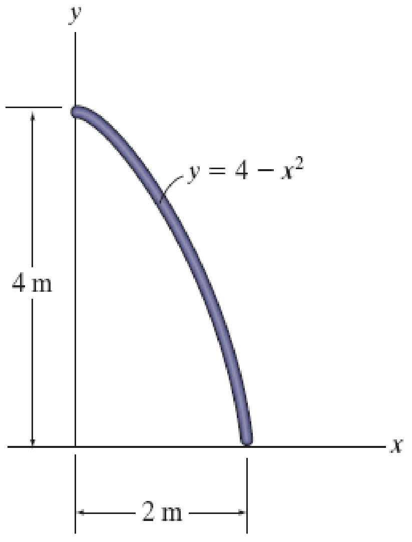
(លំហាត់១០)



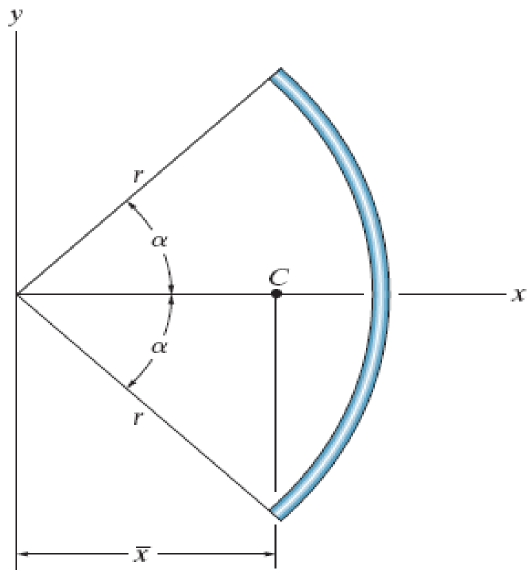
(លំហាត់១១)

១១. ចូរកំណត់ចម្ងាយ $\bar{x}$ នៃផ្ចិតម៉ាសរបស់ដងស្មើសាច់ដែលបត់ជារាងដូចបង្ហាញលើរូប។ បើដងមានម៉ាសក្នុងមួយខ្នាតប្រវែង 0.5kg/m ។ ចូរកំណត់ប្រតិកម្មនៅត្រង់ទម្រនឹង O ។

១២. ចូរកំណត់ម៉ាសនិងទីតាំងផ្ចិតម៉ាស $(\bar{x}, \bar{y})$ នៃដងស្មើសាច់។ ម៉ាសក្នុងមួយខ្នាតប្រវែងនៃដងគឺ 3kg/m ។



(លំហាត់១២)



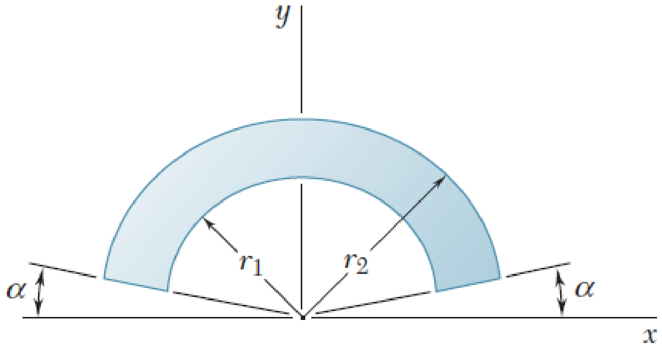
(លំហាត់១៣)

១៣. ចូរកំណត់ទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីត $\overline{x}$ នៃដងរាងរង្វង់ជាអនុគមន៍នៃកាំ r និងមុំ α ។

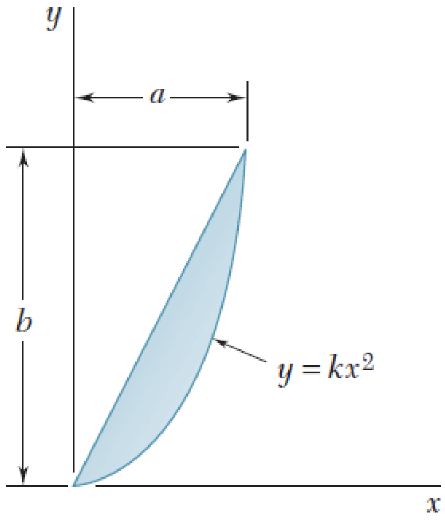
១៤. គេឱ្យផ្ទៃដូចរូប។

ក. ចូរកំណត់ទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតនៃផ្ទៃផាត់ជាអនុគមន៍នៃ r_1, r_2 និង α ។

ខ. ចូរបង្ហាញថា នៅពេល r_1 ខិតជិត r_2 នូវទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីតទៅក្បែរសង់ត្រូអ៊ីតសម្រាប់ធ្នូរង្វង់មានកាំ $(r_1 + r_2)/2$ ។



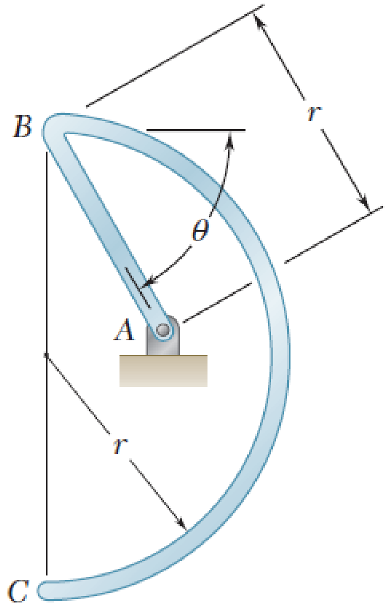
(លំហាត់១៤)



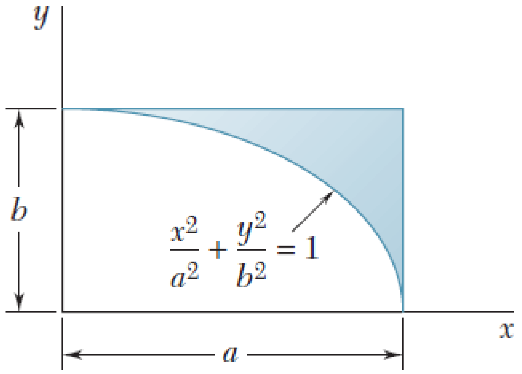
(លំហាត់១៥)

១៥. ចំពោះក្រឡាផ្ទៃដូចបង្ហាញ ចូរកំណត់ផលធៀប a/b ដែល $\overline{x} = \overline{y}$ ។

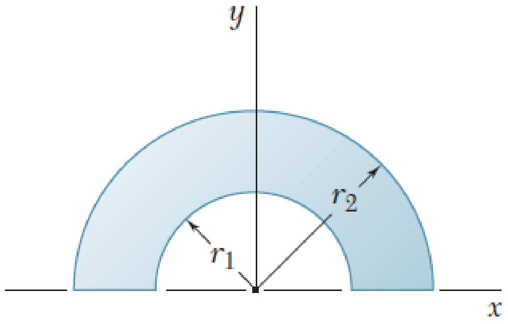
១៦. ខ្សែស្មើសាច់ ABC ត្រូវបានបត់ទៅជាកន្លះផ្លូវង្វង់ និងត្រូវបានចងភ្ជាប់នៅត្រង់ A ។ ចូរកំណត់មុំ θ ដែលខ្សែនៅក្នុងភាពលំនឹងនៅទីតាំងដូចរូប។



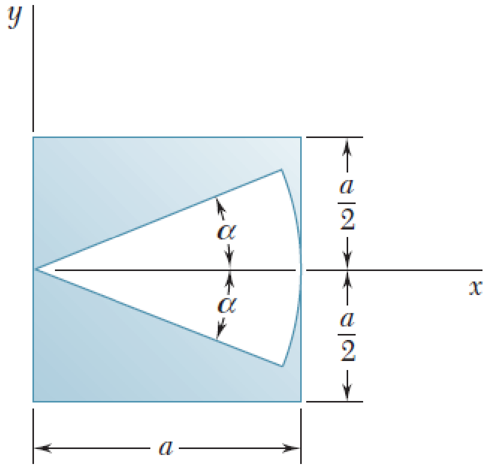
១៧. ចូរកំណត់សង់ត្រូអ៊ីតនៃក្រឡាផ្ទៃដូចរូប។



(រូបក)

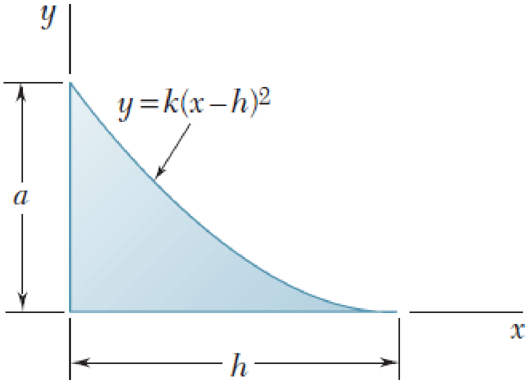


(រូបខ)

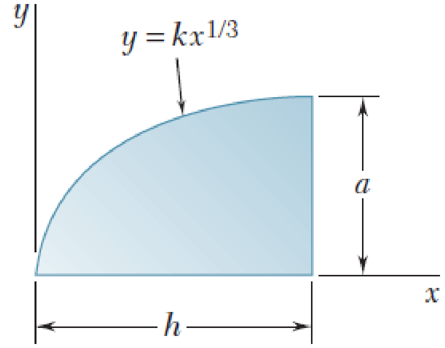


(រូបគ)

១៨. ចូរកំណត់ទីតាមងសង់ត្រូអ៊ីតនៃមាឌដែលទទួលបានដោយរង្វិលក្រឡាផ្ទៃជុំវិញអ័ក្ស x ។

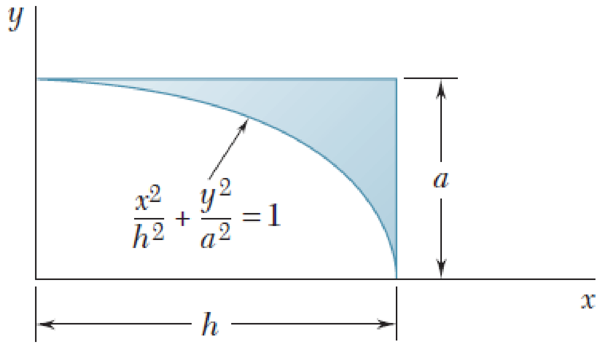


(រូបក)

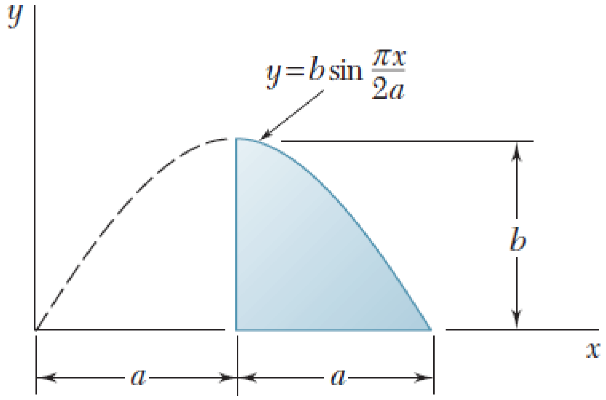


(រូបខ)

១៩. ចូរកំណត់ទីតាមងសង់ត្រូអ៊ីតនៃមាឌដែលទទួលបានដោយរង្វិលក្រឡាផ្ទៃជុំវិញបន្ទាត់ $x = h$ ។

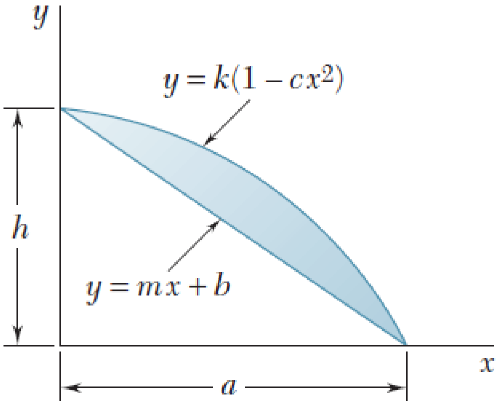


(រូបក)

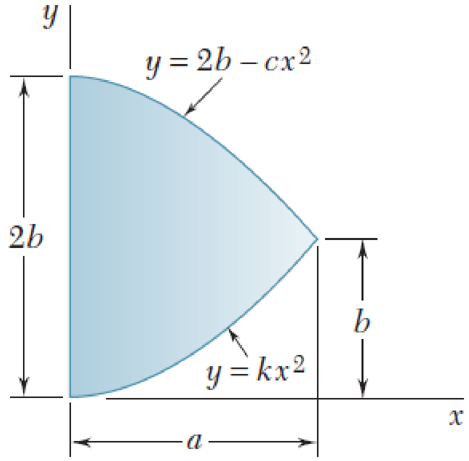


(រូបខ)

២០. ចូរកំណត់ទីតាមងសង់ត្រូអ៊ីតនៃក្រឡាផ្ទៃដូចរូប(ជាអនុគមន៍នៃ aនិងh)។



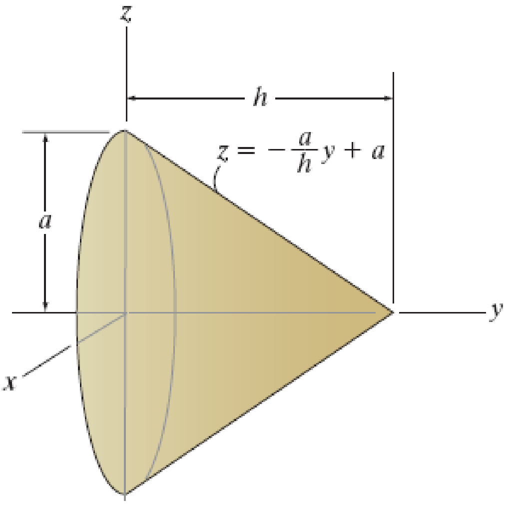
(លំហាត់២០)



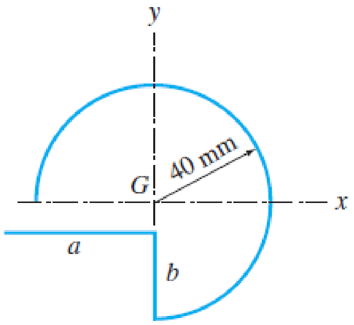
(លំហាត់២១)

២១. ចូរកំណត់ទីតាមងសង់ត្រូអ៊ីតនៃក្រឡាផ្ទៃដូចរូប(ជាអនុគមន៍នៃ aនិងb)។

២២. ចូរកំណត់ទីតាំងផ្ចិតម៉ាស $\bar{y}$ នៃរង្វង់កោនបង្កើតដោយផ្ទៃបរិវត្តជុំវិញអ័ក្ស y ។ ម៉ាសមាឌនៅចំណុចផ្សេងៗ នៅក្នុងកោនត្រូវកំណត់ដោយ $\rho = \frac{\rho_0}{h} y$ ដែល ρ_0 ថេរ។



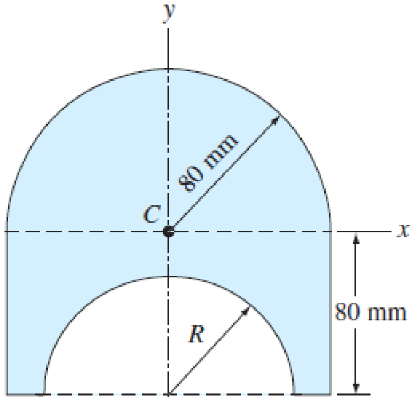
(លំហាត់២២)



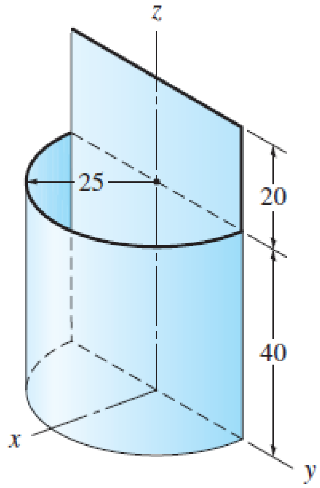
(លំហាត់២៣)

២៣. ទីប្រជុំទម្ងន់នៃប្លង់ខ្សែដូចរូបគឺនៅត្រង់ G។ ចូរកំណត់ប្រវែង aនិងb។

២៤. សង់ត្រូអ៊ីតនៃតំបន់ប្លង់ដូចបង្ហាញគឺនៅត្រង់ C។ ចូរប្រើវិធីបន្សំផ្ទៃ ដើម្បីកំណត់កាំ R នៃកន្លះរង្វង់ដែលកាត់ចេញ។



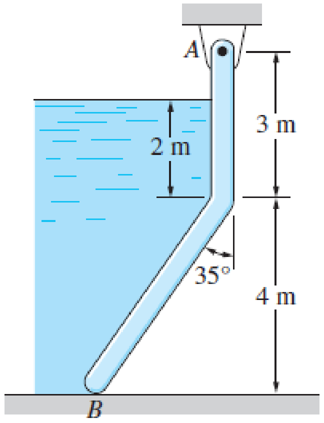
(លំហាត់២៤)



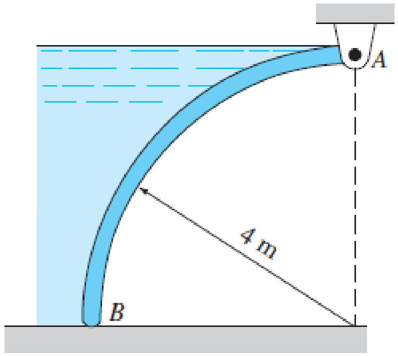
(លំហាត់២៥)

២៥. ធុងចំហខាងលើ និងបិតបាតក្រោម ផលិតពីបន្ទះលោហៈកម្រាស់ស្មើ។ ចូររកទីប្រជុំទម្ងន់របស់វា។

២៦. ទ្វារទឹកមានទទឹង 10m នៅជម្រៅ 6m ។ ចូរគណនាកម្លាំងប្រតិកម្មត្រង់A និងកម្លាំងប៉ះរវាងទ្វារនិងផ្ទៃរលោងនៅត្រង់ B។ មិនគិតទម្ងន់នៃទ្វារទឹក



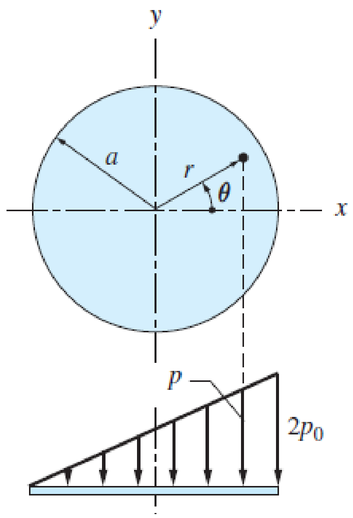
(លំហាត់២៦)



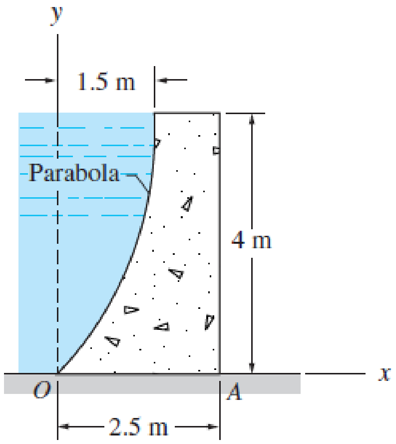
(លំហាត់២៧)

២៧. ទ្វារទឹករាងកន្លះរង្វង់មានទទឹង 5m ត្រូវដាក់ឱ្យវិលត្រង់A ។ ចូរកំណត់កម្លាំងប៉ះរវាងទ្វារ និងក្បែរលោងត្រង់ B បណ្ដាលឱ្យសម្ពាធមានលើទ្វារទឹក។ ម៉ាសមាឌទឹក 1000kg/m^3 ។

២៨. សម្ពាធដែលមានអំពើលើបន្ទះរាងរង្វង់មានកាំ a ប្រែប្រួលជា $p = p_0\left[1+(r/a)\cos\theta\right]$ ដែល p_0 ជាថេរ។ ចូរប្រើអាំងតេក្រាល ដើម្បីរកកម្លាំងសរុប និងរកទីតាំងទិសសកម្មរបស់វា។



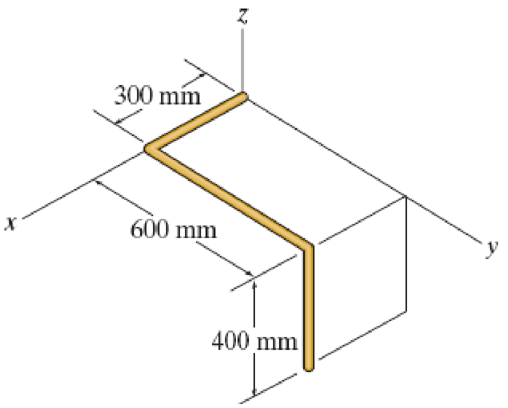
(លំហាត់២៨)

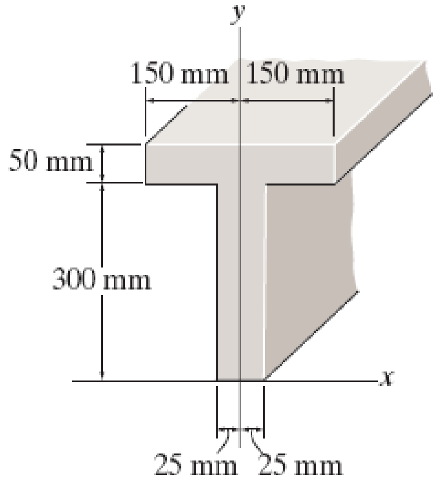


(លំហាត់២៩)

២៩. របាំងទប់ទឹកសមុទ្រ។ តើរបាំងសុវត្ថិភាពទប់ជាប់ឬទេ? ម៉ាសមាឌជញ្ជាំង 2400kg/m^3 និងទឹកសមុទ្រ 1030kg/m^3 ។

៣០. ចូររកទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីត $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ នៃខ្សែបត់ជាទម្រង់ដូចបង្ហាញ។

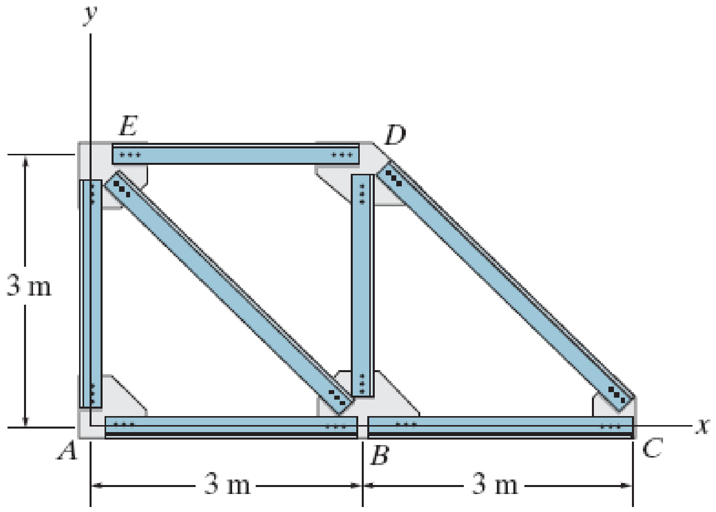




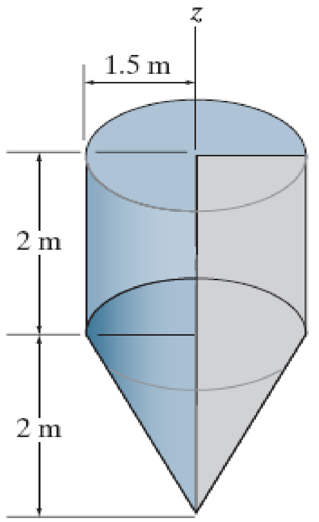
(លំហាត់៣០) (លំហាត់៣១)

៣១. ចូរកំណត់ទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីត $\bar{y}$ នៃមុខកាត់ដូចរូប។

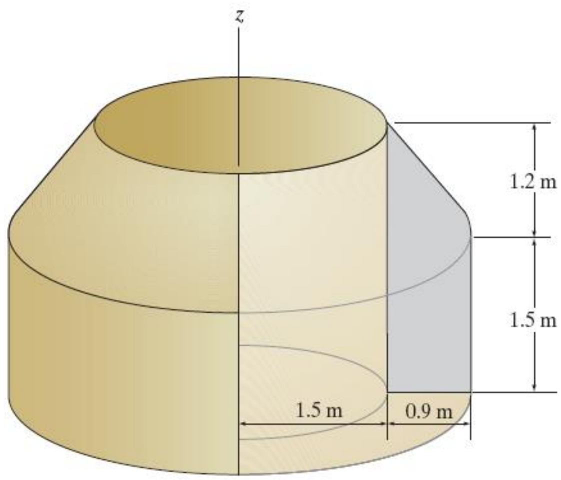
៣២. ចន្ទល់ខ្វែងមួយមាន៧របារ។ របារនីមួយៗមានម៉ាសក្នុងមួយខ្នាតប្រវែង 6kg/m ។ ចូរកំណត់ទីតាំងផ្ចិតម៉ាស។ មិនគិតម៉ាសបន្ទះតំណ។



៣៣. ចូរកំណត់ផ្ទៃនិងមាឌនៃអង្គធាតុដោយបរិវត្តផ្ទៃ 360^0 ជុំវិញអ័ក្ស z ។



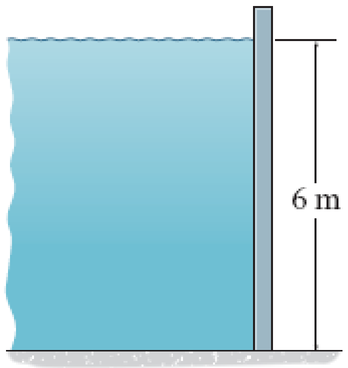
(លំហាត់៣២)



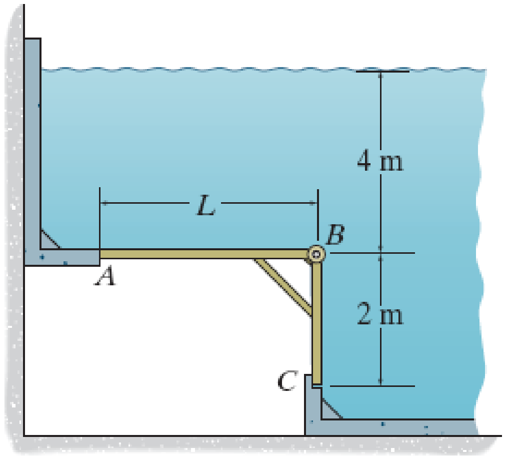
(លំហាត់៣៣)

៣៣. ចូរកំណត់ផ្ទៃនិងមាឌនៃអង្គធាតុដោយបរិវត្តផ្ទៃ 360^0 ជុំវិញអ័ក្ស z ។

៣៤.ចូរកំណត់ទំហំកម្លាំងអ៊ីដ្រូស្តាទិចក្នុងមួយម៉ែត ប្រវែងនៃជញ្ជាំង។ ទឹកមានម៉ាសមាឌ $\rho = 10^3 \text{kg/m}^3$ ។



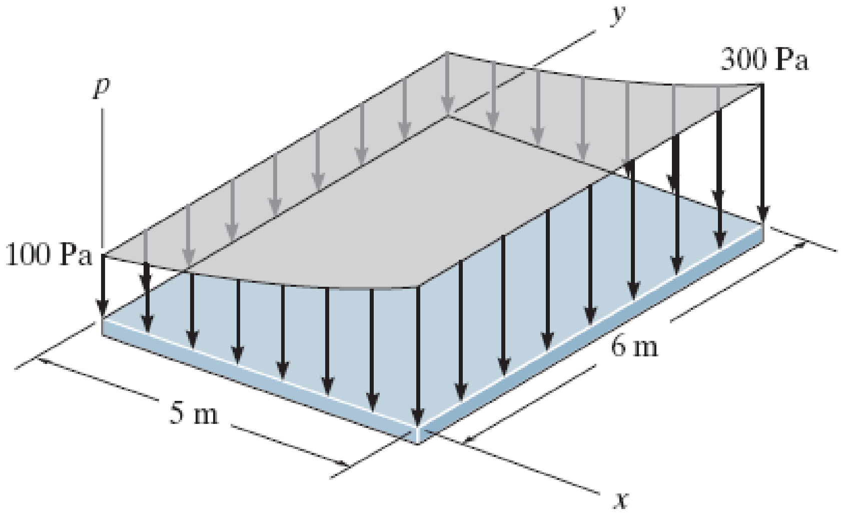
(លំហាត់៣៤)



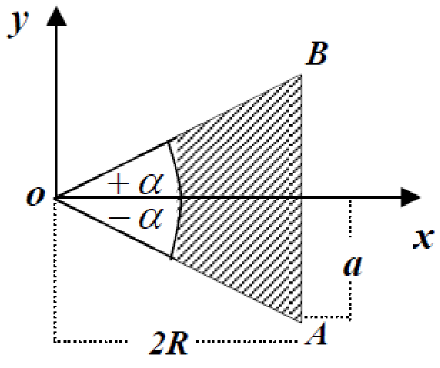
(លំហាត់៣៥)

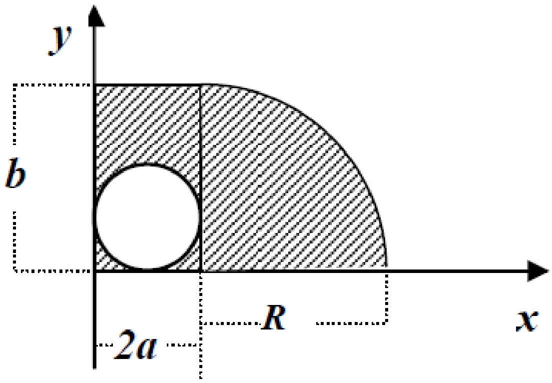
៣៥. បើ $L = 2\text{m}$ ចូរកំណត់កម្លាំងរបាំង ABC មានលើចន្ទល់រលោងត្រង់ C ។ ម៉ាសមាឌទឹក $\rho_w = 10^3 \text{kg/m}^3$ ។

៣៦. សម្ពាធបន្ទុកលើបន្ទះពណ៌នាដោយអនុគមន៍ $p=\left\{-\frac{240}{x+1}+340\right\}Pa$ ។ ចូរកំណត់ទំហំនៃកម្លាំងសរុប និងកូអរដោនេនៃចំណុចដែលទិសសកម្មនៃកម្លាំងកាត់បន្ទះ។



៣៧. ចូរកំណត់(តាមអាំងតេក្រាលនិងទ្រឹស្តី Guldin) កូអរដោនេនៃផ្ចិតម៉ាសនៃបន្ទះអង្គធាតុស្មើសាច់។





ជំពូក១៨ ម៉ូម៉ង់និចលភាព

INERTIAL MOMENTS

គោលបំណង

- បង្ហាញរបៀបរកម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃអង្គធាតុរឹងវិលជុំវិញអ័ក្សមេ។
- យល់ពីរបៀបគណនាម៉ូម៉ង់និចលភាព ផ្ទៃ មាឌ និងម៉ាស។
- ចេះគណនាផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាព និងសរសេរម៉ាទ្រីសម៉ូម៉ង់និចលភាព ព្រមទាំងការអនុវត្តម៉ូម៉ង់និចលភាពក្នុងចលនានៃអង្គធាតុរឹង។

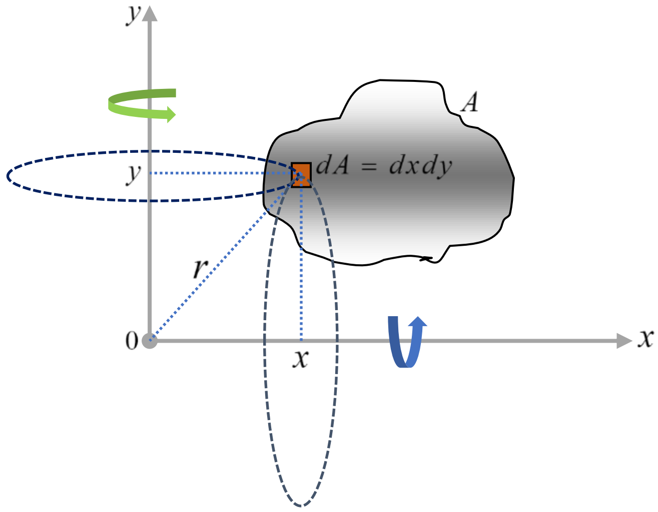
1. និយមន័យម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃ

ជំពូកចុងក្រោយ យើងបានកំណត់សង់ត្រូអ៊ីតចំពោះផ្ទៃដោយពិនិត្យម៉ូម៉ង់ទី១នៃផ្ទៃធៀបអ័ក្សមួយ។ ដើម្បីគណនាយើងត្រូវឱ្យតម្លៃអាំងតេក្រាលនៃទម្រង់ $\int x dA$។ អាំងតេក្រាលនៃម៉ូម៉ង់ទី២នៃផ្ទៃដូចជា $\int x^2 dA$ គឺសំដៅទៅម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃ។

- **ម៉ូម៉ង់និចលភាព៖** យើងពិនិត្យផ្ទៃ A ដូចរូបដែលដេកនៅក្នុងប្លង់ (xy)។ តាមនិយមន័យម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះធាតុផ្ទៃ dA ធៀបនឹងអ័ក្ស x និង y គឺ៖ $dI_x = y^2 dA$ និង $dI_y = x^2 dA$ រៀងគ្នា។ ចំពោះម៉ូម៉ង់និចលភាពផ្ទៃកំណត់ដោយអាំងតេក្រាល៖

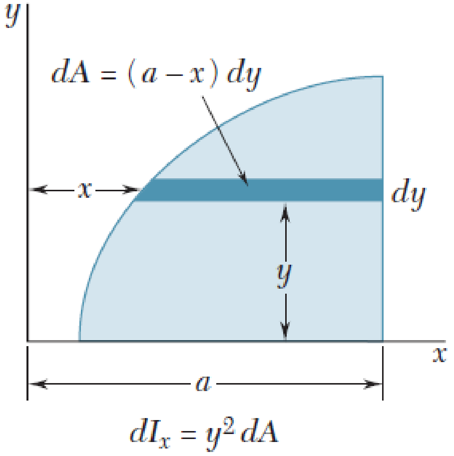
$$I_x = \int_A y^2 dA$$

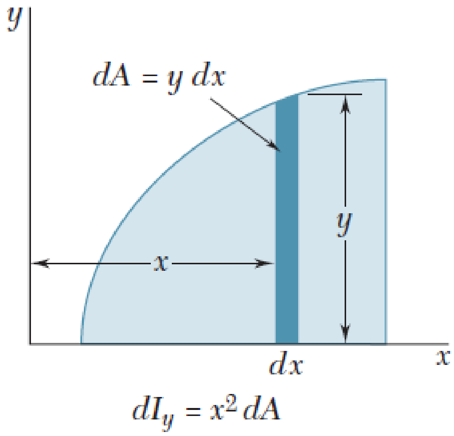
$$I_y = \int_A x^2 dA$$



ករណីជ្រើសរើសធាតុផ្ទៃស្របនឹងអ័ក្ស x

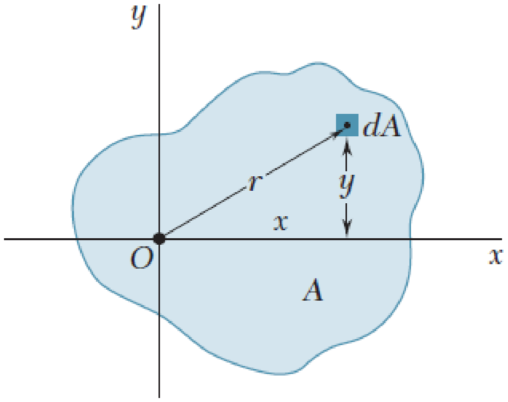
ករណីជ្រើសរើសធាតុផ្ទៃនឹងអ័ក្ស y



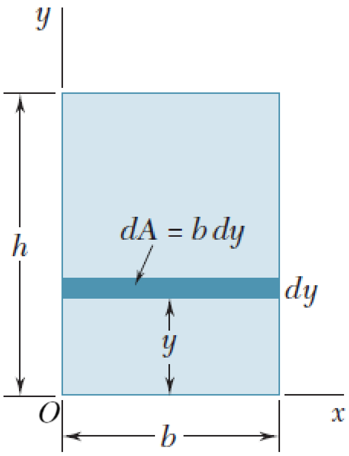


ដូចនេះយើងបង្កើតរូបមន្តម៉ូម៉ង់ទី២នៃ dA ជុំវិញ(ប៉ូល) O ឬអ័ក្ស z ។ នេះសំដៅទៅម៉ូម៉ង់និចលភាពប៉ូល។ វាប្រើដើម្បីកំណត់រម្ងិលអង្កត់លើផ្ចឹម។ វាត្រូវបានឱ្យនិយមន័យ $dJ_0 = r^2 dA$ ដែល r ជាចម្ងាយកែងពីប៉ូល (អ័ក្ស z) ទៅធាតុផ្ទៃ dA ។ ចំពោះផ្ទៃ ម៉ូម៉ង់ប៉ូលនិចលភាពគឺ៖

$$J_0 = \int_A r^2 dA = I_x + I_y \quad \text{ដែល} \quad r^2 = x^2 + y^2$$



ឧទាហរណ៍១៖ ចូររកម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃចតុកោណកែង។



ដំណោះស្រាយ

គូសធាតុផ្ទៃស្របនឹងអ័ក្ស x យើងទទួលបាន៖

$$dI_x = y^2 dA\,,\quad dA = bdy$$

នោះ $$dI_x = y^2 bdy \;\Rightarrow\; I_x = \int_0^h by^2 dy = \frac{1}{3}bh^3$$

ម៉ូម៉ង់និចភាពផ្ទៃធៀបអ័ក្ស y ៖

សម្រាយដូចគ្នាដែរ ដោយគូសធាតុផ្ទៃស្របនឹងអ័ក្ស y

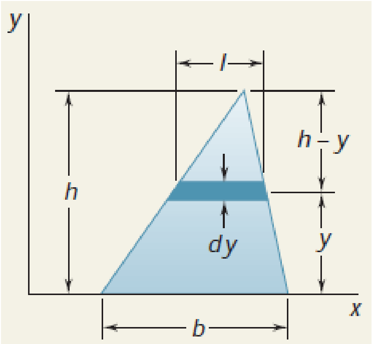
$$dI_y = x^2 dA\,,\quad dA = hdx$$

$$dI_y = x^2 hdx \;\Rightarrow\; I_y = \int_0^b hx^2 dx = \frac{1}{3}hb^3$$

ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀប O គឺ

$$J_0 = \int r^2 dA = I_x + I_y \;\Rightarrow\; J_0 = \frac{1}{3}bh^3 + \frac{1}{3}hb^3 = \frac{bh}{3}\left(b^2 + h^2\right)$$

ឧទាហរណ៍២ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃត្រីកោណធៀបបាតរបស់វា។



ដំណោះស្រាយ

ត្រីកោណមានកម្ពស់ h និងបាត b ដោយជ្រើសរើសអ័ក្ស x ត្រួតជាមួយបាត។

ធាតុផ្ទៃដេក dA នៅចម្ងាយ y ពីអ័ក្ស x នោះម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃធាតុផ្ទៃវិលជុំវិញអ័ក្ស x គឺ

$$dI_x = y^2 dA\,,\; dA = ldy$$

តាមទ្រឹស្តីតាលែស $\frac{l}{b} = \frac{h-y}{h} \;\Rightarrow\; l = b\frac{h-y}{h}$

ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃត្រីកោណគឺ $I_x = \int y^2 dA = \int y^2 l dy$

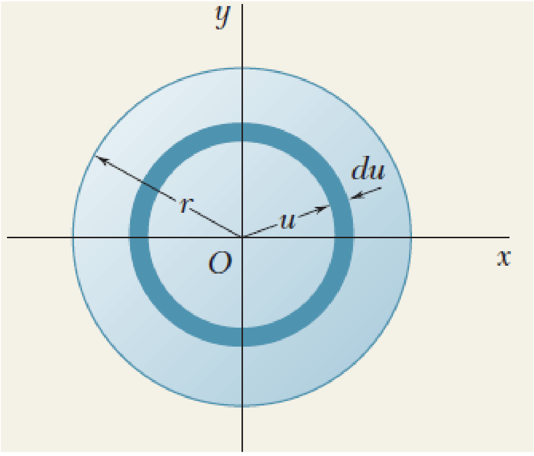
$$I_x = \int_0^h y^2 b \frac{h-y}{h} dy = \frac{b}{h}\int_0^h \left(hy^2 - y^3\right) dy$$

$$I_x = \frac{b}{h}\left[h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{1}{12}bh^3$$

ឧទាហរណ៍៣៖

ក. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃរង្វង់ដោយអាំងតេក្រាលផ្ទាល់។

ខ. ដោយប្រើលទ្ធផលសំណួរក ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃរង្វង់ធៀបអង្កត់ផ្ចិត។



ដំណោះស្រាយ

ក. ពិនិត្យឌីផេរ៉ង់ស្យែលផ្ទៃ dA នៃកង៖

ដោយសារគ្រប់កំណាត់នៃឌីផេរ៉ង់ស្យែលផ្ទៃនៅចម្ងាយស្មើគ្នាពីគល់តម្រុយ យើងបាន៖

$$dJ_0 = u^2 dA \;,\quad dA = 2\pi u du$$

$$\Rightarrow \quad J_O = \int dJ_0 = \int_0^r u^2 (2\pi u du) = 2\pi \int_0^r u^3 du$$

ដូចនេះ: $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$

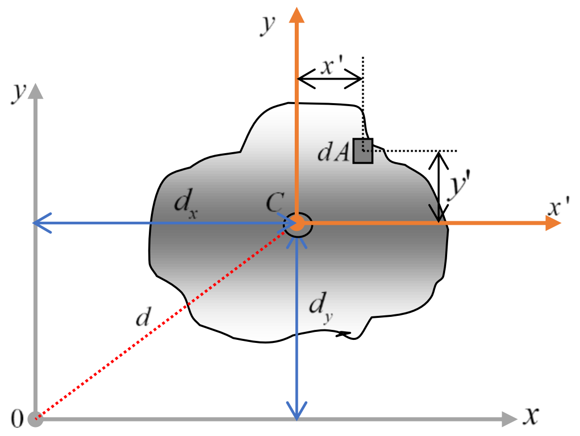
ខ. ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបទៅនឹងអង្កត់ផ្ចិត៖

ដោយសារផ្ទៃរង្វង់ស៊ីមេទ្រី យើងបាន $I_x = I_y$

$$J_O = I_x + I_y = 2I_x \quad \Rightarrow \quad I_x = \frac{J_0}{2} = \frac{1}{4}\pi r^4$$

2. ទ្រឹស្តីបទអ័ក្សស្របចំពោះផ្ទៃ

បើម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃត្រូវបានស្គាល់ធៀបនឹងអ័ក្សមួយកាត់តាមសង់ត្រូអ៊ីត ដែលជាករណីវាផ្ទៀងផ្ទាត់ ដើម្បីកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃធៀបនឹងអ័ក្សស្របដោយប្រើទ្រឹស្តីបទអ័ក្សស្រប។



នៅក្នុងករណីនេះធាតុផ្ទៃ dA ស្ថិតនៅកន្លែងណាមួយចម្ងាយ y' ពីអ័ក្ស x' សង់ត្រូអ៊ីត ផ្ទុយទៅវិញចម្ងាយថេររវាងអ័ក្សស្រប x និង x' ត្រូវបានកំណត់ d_y។ ដោយសារម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃ dA ធៀបនឹងអ័ក្ស x គឺ៖

$$dI_x = \left(y' + d_y\right)^2 dA$$

ដូចនេះចំពោះផ្ទៃទាំងមូលគឺ៖

$$I_x = \int_A \left(y' + d_y\right)^2 dA = \int_A y'^2\, dA + 2d_y \int_A y'\, dA + d_y^2 \int_A dA$$

អាំងតេក្រាលទី១ តាងម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃធៀបទៅនឹងអ័ក្សសង់ត្រូអ៊ីត $\bar{I}_x$។ អាំងតេក្រាលទីសូន្យ ដោយសារអ័ក្ស x' ដោយសារកាត់តាមសង់ត្រូអ៊ីតផ្ទៃ C មានន័យថា $\int y' dA = \bar{y}' \int dA = 0$ ដោយ $\bar{y}' = 0$ ។

យើងបាន៖ $I_x = \bar{I}_{x'} + A \cdot d_y^2$

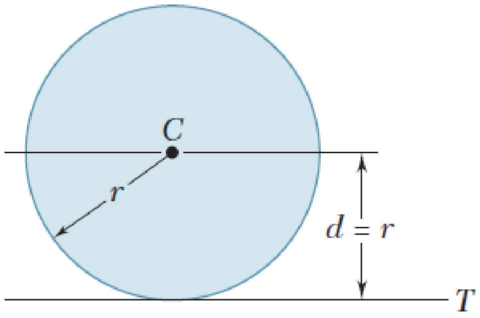
កន្សោមស្រដៀងគ្នា អាចសរសេរចំពោះ I_y មានន័យថា៖

$$I_y = \bar{I}_{y'} + A \cdot d_x^2$$

ជាបញ្ចប់ចំពោះម៉ូម៉ង់និចលភាពប៉ូលធៀបនឹងអ័ក្សកែងទៅនឹងប្លង់ (xy) និងកាត់តាមប៉ូល O (អ័ក្ស z) ដូចរូប។

$$J_0 = \bar{J}_C + A \cdot d^2$$

ឧទាហរណ៍៤៖ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃរង្វង់ធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងរង្វង់។



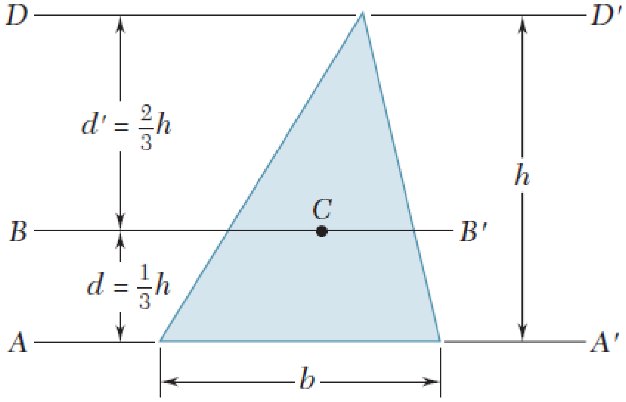
ដំណោះស្រាយ

$$J_T = \bar{J}_C + Ad^2$$

ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃរង្វង់ធៀបអ័ក្សសង់ត្រូអ៊ីតគឺ $\bar{J}_C = \frac{1}{4}\pi r^4$

យើងបាន៖ $J_T = \frac{1}{4}\pi r^2 + (\pi r^2)r^2 = \frac{5}{4}\pi r^4$

ឧទាហរណ៍៥៖ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពសង់ត្រូអ៊ីតផ្ទៃ និងម៉ូម៉ងភាពនៃផ្ទៃធៀបនឹងបន្ទាត់កាត់តាមកំពូលត្រីកោណស្របបាត។ ដោយដឹងថា ម៉ូម៉ង់និចលភាពផ្ទៃធៀបបាតគឺ $I_{AA'} = \frac{1}{12}bh^3$ (មានសម្រាយនៅឧទាហរណ៍ក្រោយ)។



ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្ដីបន្ទាត់ស្របៈ

$$I_{AA'} = \bar{I}_{BB'} + Ad^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{I}_{BB'} = I_{AA'} - Ad^2 = \frac{1}{12}bh^3 - \frac{1}{2}bh\left(\frac{1}{3}h\right)^2 = \frac{1}{36}bh^3$$

ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃធៀបបន្ទាត់ DD' ៖

$$I_{DD'} = \bar{I}_{BB'} + Ad'^2 = \frac{1}{36}bh^3 + \frac{1}{2}bh\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{1}{4}bh^3$$

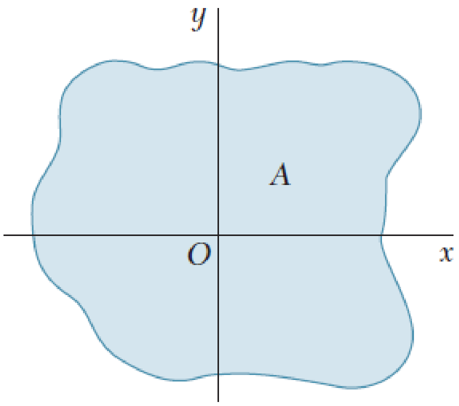
3. កាំនៃ GYRATION របស់ផ្ទៃ

កាំរបស់ Gyration នៃប្លង់ផ្ទៃមានខ្នាតប្រវែង និងជាបរិមាណដែលប្រើសម្រាប់ប្លង់គម្រូនៃសសរនៅក្នុងសំណង់មេកានិច។ ដោយផ្តល់ផ្ទៃនិងម៉ូម៉ង់និចលភាពត្រូវបានស្គាល់កាំនៃ Gyration ត្រូវបានកំណត់ពីរូបមន្ត៖

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \ , \ k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \ , \ k_0 = \sqrt{\frac{I_0}{A}}$$

ទម្រង់នៃសមីការទាំងនេះងាយស្រួលរំឭក ដោយសារវាស្រដៀងគ្នាទៅនឹងការរកម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះឌីផេរ៉ង់ស្យែលផ្ទៃធៀបនឹងអ័ក្ស។

យើងពិនិត្យផ្ទៃ A ដែលមានម៉ូម៉ង់និចលភាព I_x ធៀបទៅនឹងអ័ក្ស x។ យើងស្រមៃថា យើងប្រមូលផ្តុំផ្ទៃនេះទៅជាចង្អៀតស្តើងស្របទៅនឹងអ័ក្ស x។ បើផ្ទៃ A បានប្រមូលផ្តុំត្រូវតែមានម៉ូម៉ង់និចលភាពដូចគ្នាធៀបទៅនឹងអ័ក្ស x ចង្អៀតត្រូវបានដាក់នៅចម្ងាយ k_x ពីអ័ក្ស x ដែល k_x ត្រូវបានឱ្យនិយមន័យដោយទំនាក់ទំនង៖

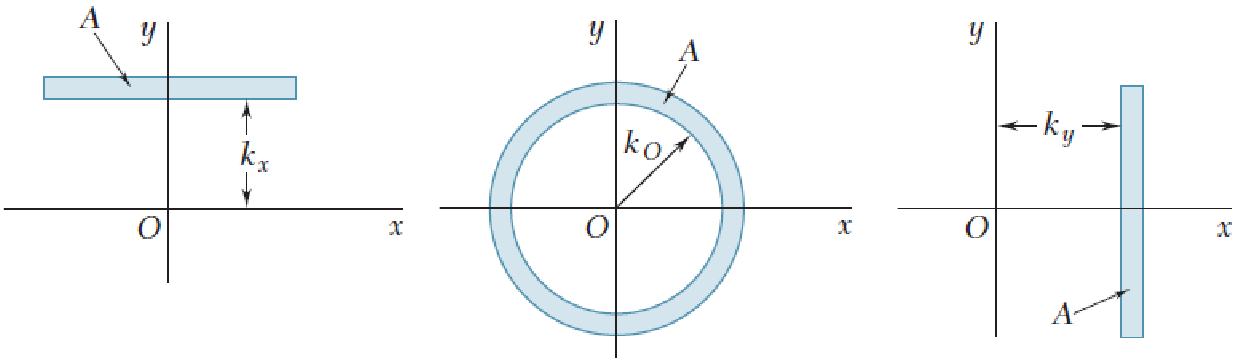


$$I_x = k_x^2 A \quad \Rightarrow \quad k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

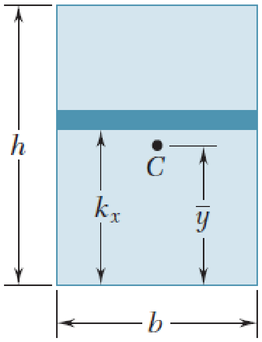
ចម្ងាយ k_x សំដៅទៅកាំ gyration នៃផ្ទៃធៀបទៅនឹងអ័ក្ស x។

ក្នុងវិធីដូចគ្នាដែរ យើងអាចឱ្យនិយមន័យកាំ gyration, k_y និង k_0 យើងសរសេរ៖

$$I_y = k_y^2 A \quad \Rightarrow \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \ , \quad I_O = k_O^2 A \quad \Rightarrow \quad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$$ ដោយ $k_O^2 = k_x^2 + k_y^2$



ឧទាហរណ៍៦ ចំពោះផ្ទៃចតុកោណកែងដូចរូប។ ចូរគណនា កាំ gyration k_x ធៀបទៅនឹងបាតរបស់វា។



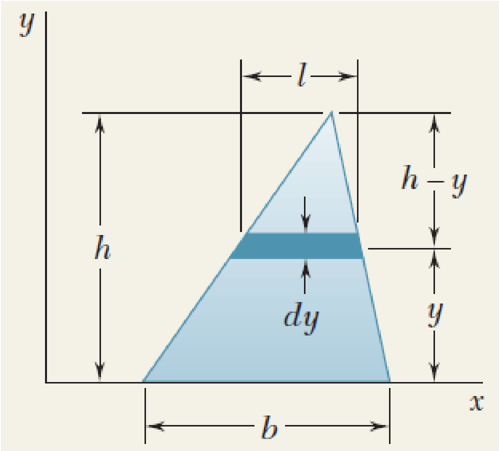
ដំណោះស្រាយ

យើងបាន៖ $k_x^2 = \frac{I_x}{A}$ ដោយ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$, $A = bh$

នោះ៖ $k_x^2 = \frac{\frac{1}{3}bh^3}{bh} = \frac{h^2}{3} \Rightarrow k_x = \frac{h}{\sqrt{3}}$

កាំ gyration k_x នៃផ្ទៃចតុកោណកែង។ វាមិនគួរច្រឡំជាមួយកូអរដោនេ $\bar{y} = \frac{h}{2}$ នៃសង់ត្រូអ៊ីតផ្ទៃ។ k_x អាស្រ័យម៉ូម៉ង់និចលភាពផ្ទៃ ចំណែកឯកូអរដោនេ $\bar{y}$ ទាក់ទងទៅនឹងម៉ូម៉ង់ផ្ទៃ។

ឧទាហរណ៍៧៖ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាព និងកាំ gyration នៃត្រីកោណធៀបទៅនឹងបាតរបស់វា។



ដំណោះស្រាយ

ត្រីកោណមានបាត b និងកម្ពស់ h ដូចរូប ។

ជ្រើសរើសអ័ក្ស x ត្រួតជាមួយបាត។

ឌីផេរ៉ង់ស្យែលផ្ទៃស្របទៅនឹងអ័ក្ស x គឺ dA ។

ដោយសារឌីផេរ៉ង់ស្យែលផ្ទៃនៅចម្ងាយដូចគ្នាពីអ័ក្ស x យើងបាន៖ $dI_x = y^2 dA$, $dA = l dy$

តាមទ្រឹស្តីតាលែស យើងបាន៖

$$\frac{l}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow l = b\frac{h-y}{h} \Rightarrow dA = b\frac{h-y}{h}dy$$

ដូចនេះ ម៉ូម៉ង់និចលភាព៖

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b \frac{h-y}{h} dy$$

$$= \frac{b}{h}\int_0^h \left(hy^2 - y^3\right) dy = \frac{b}{h}\left[h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h$$

ដូចនេះ $I_x = \dfrac{bh^3}{12}$

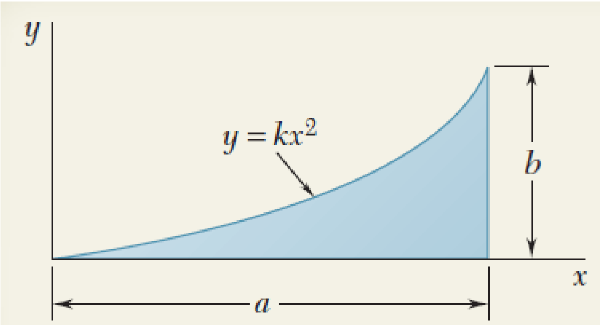
កាំ gyration k_x ៖ $k_x = \sqrt{\dfrac{I_x}{A}}$ ដោយ $A = \dfrac{b}{h}\int_0^h (h-y)dy = \dfrac{1}{2}bh$

$$\Rightarrow k_x = \sqrt{\frac{bh^3/12}{bh/2}} = \frac{h}{\sqrt{6}}$$

ឧទាហរណ៍៨៖

ក. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃដូចរូបធៀបទៅនឹងអ័ក្សកូអរដោនេ។

ខ. ដោយប្រើលទ្ធផលសំណួរ-ក ចូរកំណត់កាំ gyration នៃផ្ទៃធៀបទៅនឹងអ័ក្សកូអរដោនេនីមួយៗ។

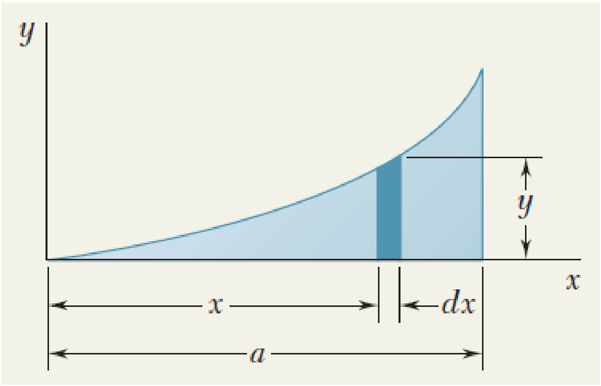


ដំណោះស្រាយ

ក. ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបទៅនឹងអ័ក្សនីមួយៗ៖

សមីការខ្សែកោង $y = \dfrac{b}{a^2}x^2$

និងនៅខាងក្រោមខ្សែកោង



$$A = \frac{1}{3}ab$$

ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្ស x ។

ជាតុផ្ទៃឈរ dA ត្រូវបានជ្រើសរើស។

ដោយសារគ្រប់កំណាត់ផ្ទៃនៃជាតុនេះមិនមានចម្ងាយស្មើគ្នាពីអ័ក្ស x យើងត្រូវតែធ្វើឱ្យជាតុនេះជាចតុកោណកែងតូច។ ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃជាតុធៀបទៅនឹងអ័ក្ស x គឺ៖

$$dI_x = \frac{1}{3}y^3dx = \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^3 dx = \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^6}x^6dx$$

$$\Rightarrow \quad I_x = \int dI_x = \int_0^a \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^6}x^6dx = \left[\frac{1}{3}\frac{b^3}{a^6}\frac{x^7}{7}\right]_0^a = \frac{1}{21}ab^3$$

ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបអ័ក្ស y ៖

ជាតុផ្ទៃឈរដដែលត្រូវយកមកប្រើដោយសារ គ្រប់កំណាត់នៃជាតុផ្ទៃមានចម្ងាយស្មើគ្នាពីអ័ក្ស y យើងបាន៖

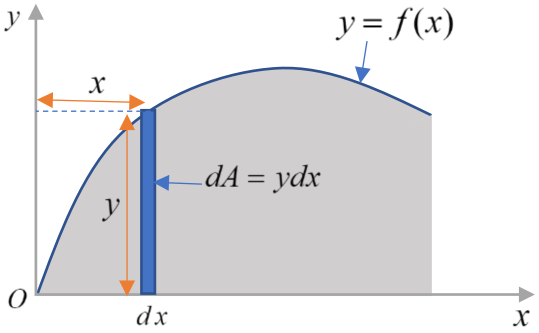
$$dI_y = x^2dA = x^2(ydx) = x^2\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)dx = \frac{b}{a^2}x^4dx \quad \Rightarrow \quad I_y = \int dI_y = \int_0^a \frac{b}{a^2}x^4dx = \frac{1}{5}a^3b$$

កាំ gyration k_x និង k_y យើងបាន តាមនិយមន័យ៖

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{ab^3/21}{ab/3}} = \frac{b}{\sqrt{7}} \quad \text{និង} \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{ab^3/5}{ab/3}} = a\sqrt{\frac{3}{5}}$$

4. ម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃដោយអាំងតេក្រាល

នៅពេលព្រំដែនចំពោះផ្ទៃប្លង់ត្រូវបានសំដែងដោយអនុគមន៍គណិតវិទ្យា សមីការអាចធ្វើអាំងតេក្រាល ដើម្បីកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃ។

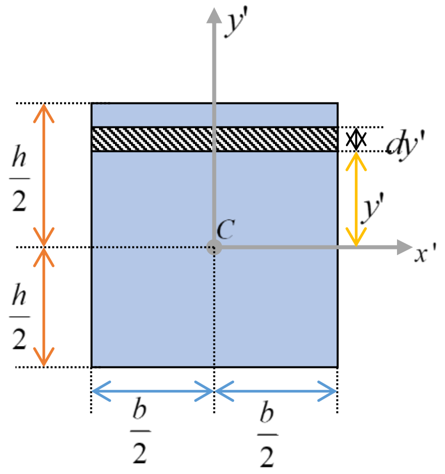


ឧទាហរណ៍៩៖ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃចតុកោណកែងដូចរូប ដោយធៀបនឹង៖

ក. អ័ក្សសង់ត្រូអ៊ីត x' ។

ខ. អ័ក្ស x_b កាត់តាមបាតនៃចតុកោណកែង។

គ. ប៉ូលឬអ័ក្ស z' កែងទៅនឹងប្លង់ $(x'y')$ កាត់តាមសង់ត្រូអ៊ីត C ។



ដំណោះស្រាយ

ផ្នែកទី១ ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលដូចរូបត្រូវបានជ្រើសរើសចំពោះអាំងតេក្រាល។

ដោយសារទីតាំងរបស់វា និងទិសដៅធាតុទាំងមូលគឺនៅចម្ងាយ y' ពីអ័ក្ស x' ។

វាសំខាន់ដើម្បីធ្វើអាំងតេក្រាលពី $y'=-\frac{h}{2}$ ទៅ $y'=\frac{h}{2}$ ។ ដោយសារ $dA=b.dy'$ ដូចនេះ៖

$$\bar{I}_{x'}=\int_A y'^2\,dA=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y'(b.dy')=b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y'dy'=\frac{1}{12}bh^3$$

ផ្នែកទី២ ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបអ័ក្សកាត់តាមបាតនៃចតុកោណកែងអាចត្រូវបានទទួលបានដោយប្រើលទ្ធផលផ្នែកទី១ ហើយអនុវត្តទ្រឹស្តីបទអ័ក្សស្រប៖

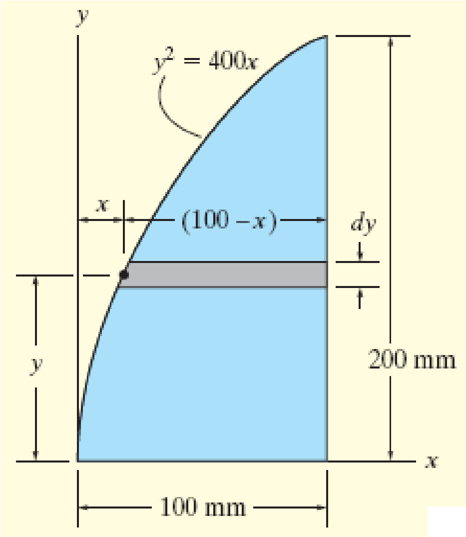
$$I_{xb}=\bar{I}_{x'}+Ad_y^2=\frac{1}{2}bh^3+bh\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{1}{3}bh^3$$

ផ្នែកទី៣ ដើម្បីទទួលបានម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀប C ដំបូងយើងទទួលបាន $\bar{I}_{y'}$ ដែលអាចត្រូវរកឃើញដោយមិនប្តូរវិមាត្រ b និង h នៅក្នុងលទ្ធផលផ្នែកទី១គឺ៖

$$\bar{I}_{y'}=\frac{1}{12}hb^3$$

ដូចនេះម៉ូម៉ង់និចលភាពប្លង់ធៀប C គឺ៖ $\bar{J}_C=\bar{I}_{x'}+\bar{I}_{y'}=\frac{1}{12}bh\left(h^2+b^2\right)$

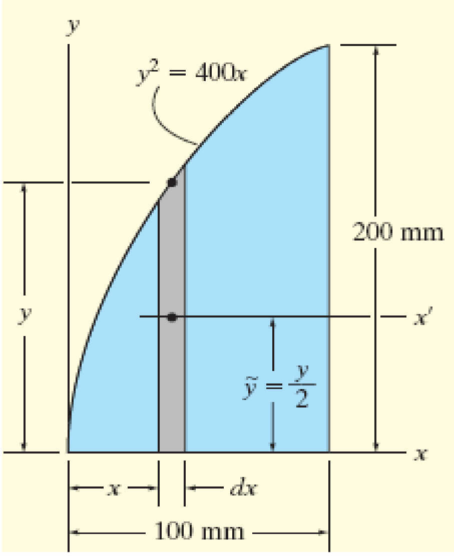
ឧទាហរណ៍១០៖ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃមានរាងដូចរូបធៀបនឹងអ័ក្ស x ។



ដំណោះស្រាយ

ចម្លើយអាចដោះស្រាយតាមពីររបៀប៖

- របៀបទី១ ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃផ្ទៃដែលស្របនឹងអ័ក្ស x បង្ហាញលើរូប ត្រូវបានជ្រើសរើសដើម្បីធ្វើអាំងតេក្រាល។ ដោយសារធាតុនេះមានកម្រាស់ dy និងកាត់ខ្សែកោងនៅចំណុចណាមួយ (x, y) ក្រឡាផ្ទៃវាគឺ



$$dA = (100 - x)\,dy \text{ ។}$$

លើសពីនេះ ធាតុដេកនៅចម្ងាយដូចគ្នា y ពីអ័ក្ស x ។

ដោយធ្វើអាំងតេក្រាលយក $y = 0$ ទៅ $y = 200\text{mm}$ នាំឱ្យ៖

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^{200mm} y^2 (100 - x)\,dy$$

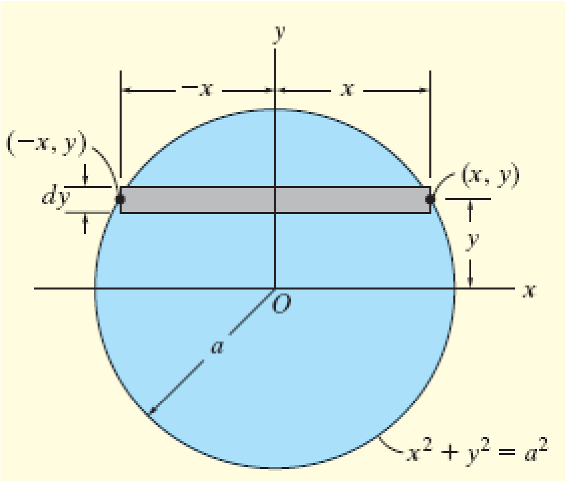
$$I_x = \int_0^{200mm} y^2 \left(100 - \frac{y^2}{400}\right) dy = 107 \times 10^6\,\text{mm}^4 \text{ ។}$$

របៀបទី២ ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលផ្ទៃស្របទៅនឹងអ័ក្ស y ដូចបង្ហាញលើរូបត្រូវបានជ្រើសរើស ដើម្បីធ្វើអាំងតេក្រាល។ វាកាត់ខ្សែកោងនៅត្រង់ចំណុចណាមួយ (x, y) ។ នៅក្នុងករណីនេះ គ្រប់ចំណុចនៃធាតុមិនដេកនៅចម្ងាយដូចគ្នាទេពីអ័ក្ស x និងទ្រឹស្តីបទអ័ក្សស្របត្រូវបានប្រើដើម្បីកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃធាតុធៀបទៅនឹងអ័ក្សនេះ។ សម្រាប់ចតុកោណកែងមានបាត b និងកម្ពស់ h ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្សសង់ត្រូអ៊ីត

របស់វាដែលបានកំណត់នៅផ្នែកទី១នៅឧទាហរណ៍១ខាងលើ។ នៅទីនោះបានរកឃើញថា $I_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ ។ ចំពោះធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រូវបានរកឃើញនៅលើរូបដែលបង្ហាញ $b = dx$ និង $h = y$ និង $dI_{x'} = \frac{1}{12}dx\, y^3$ ។ ដោយសារសង់ត្រូអ៊ីតនៃធាតុគឺ $\tilde{y} = \frac{y}{2}$ ពីអ័ក្ស x ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្សនេះគឺ

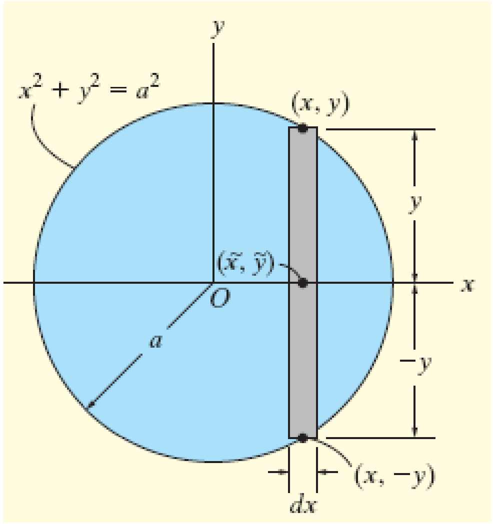
$$dI_x = \int dI_x = \int_0^{100mm} \frac{1}{3}y^3 dx = \int_0^{100mm} \frac{1}{3}(400x)^{\frac{3}{2}} dx = 107\times10^6 \text{ mm}^4$$

ឧទាហរណ៍១១៖ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាព ចំពោះផ្ទៃមានរាងរង្វង់ធៀបនឹងអ័ក្ស x ។



ដំណោះស្រាយ

- របៀបទី១៖ ដោយប្រើធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលបង្ហាញក្នុងរូប៖



$dA = 2xdy$ យើងបាន៖

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A y^2 \times 2xdy$$

$$I_x = \int_{-a}^{a} y^2\left(2\sqrt{a^2 - y^2}\right)dy = \frac{\pi a^4}{4}$$

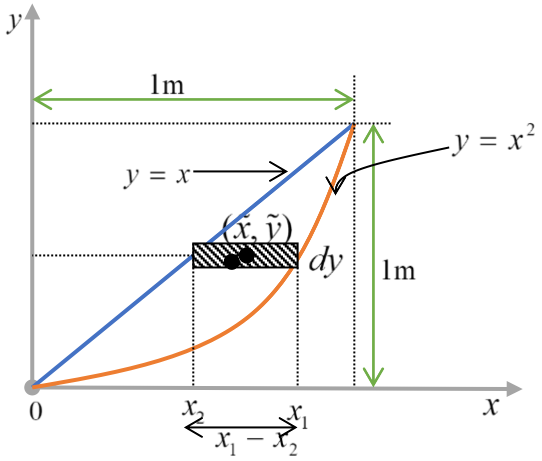
- របៀបទី២៖ នៅពេលធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលបង្ហាញលើរូបត្រូវបានជ្រើសរើសសង់ត្រូអ៊ីតសម្រាប់ធាតុដែលកើតឡើងដេកលើអ័ក្ស និង ចំពោះចតុកោណកែង យើងបាន៖

ធ្វើអាំងតេក្រាលនៅពេលធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលបង្ហាញលើរូបត្រូវបានជ្រើសរើសសង់ត្រូអ៊ីតសម្រាប់ធាតុដែលកើតឡើងដេកលើអ័ក្ស x និង $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ ។

ចំពោះចតុកោណកែង យើងបាន៖ $dI_x = \frac{1}{12}dx(2y)^2 = \frac{2}{3}y^3dx$

ធ្វើអាំងតេក្រាល $I_x = \int_{-a}^{a} \frac{2}{3}\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{\pi a^4}{4}$

ឧទាហរណ៍១២៖ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាព ចំពោះផ្ទៃមានរាងដូចរូបធៀបនឹងអ័ក្ស x ។



ដំណោះស្រាយ

ករណីទី១ ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលស្របនឹងអ័ក្ស x ត្រូវបានជ្រើសរើសចំពោះអាំងតេក្រាលដូចរូប។

ធាតុកាត់ខ្សែកោងនៅចំណុចណាមួយ (x_2, y) និង (x_1, y) ។ ជាវិបាកផ្ទៃរបស់វាគឺ $dA = (x_1 - x_2)dy$ ។

ដោយសារគ្រប់ផ្នែកនៃធាតុដេកនៅចម្ងាយដូចគ្នា y ពីអ័ក្ស x យើងបាន៖

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^1 y^2 (x_1 - x_2) dy = \int_0^1 y^2 \left(\sqrt{y} - y\right) dy = 0.0357 \text{ m}^4$$

ករណីទី២ ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលអ័ក្សស្រប y ដូចរូប។

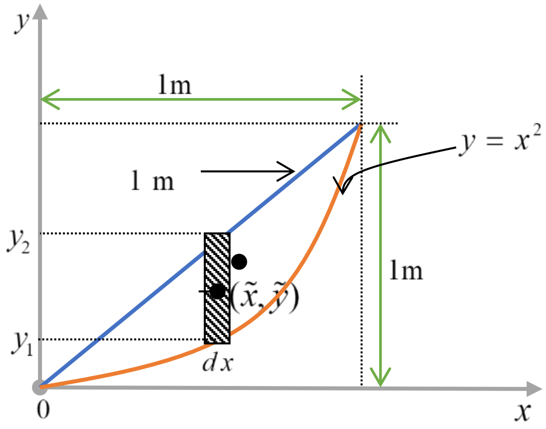
វាកាត់ខ្សែកោងត្រង់ចំណុចណាមួយ (x, y_2) និង (x, y_1) ។

ដោយសារគ្រប់ផ្នែកនៃធាតុទាំងមូលមិនដេកនៅចម្ងាយដូចគ្នាពីអ័ក្ស x ដំបូងយើងប្រើទ្រឹស្តីបទអ័ក្សស្រប ដើម្បីរកធាតុម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបអ័ក្ស x ដោយប្រើ $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ ។ ដូចនេះធ្វើអាំងតេក្រាលលទ្ធផលនេះ ដើម្បីកំណត់ I_x ។

ដូចនេះ $dI_x = dI_{x'} + \tilde{y}^2 dA = \frac{1}{12}(y_2 - y_1)^3 dx + (y_2 - y_1)dx\left(y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2}\right)^2$

$$= \frac{1}{3}\left(y_2^3 - y_1^3\right)dx = \frac{1}{3}\left(x^3 - x^6\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad I_x = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x^3 - x^6\right)dx = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{21}x^7\Big|_0^1 = 0.0357\text{m}^4$$



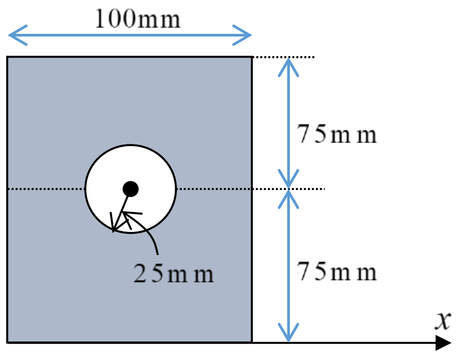
5. ម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃសមាស

ផ្ទៃសមាសមានផ្ទៃច្រើនភ្ជាប់គ្នាដោយរាងផ្សេងៗ។ វាផ្តល់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្នែកនីមួយៗត្រូវបានស្គាល់ ឬគណនាធៀបនឹងអ័ក្សរួម។ ដូចនេះម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃសមាសស្មើនឹងផលបូកពីជគណិតនៃម៉ូម៉ង់និចលភាពគ្រប់ផ្នែក។

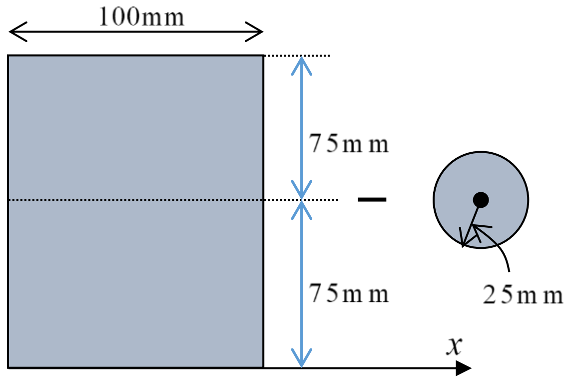
លំនាំ៖

- ផ្នែកសមាស៖ ប្រើរូបចែកផ្ទៃទៅជាផ្នែកទាំងនេះ និងចង្អុលបង្ហាញចម្ងាយកែងពីសង់ត្រូអ៊ីតនៃផ្នែកនីមួយៗចំពោះអ័ក្សយោង។
- ទ្រឹស្តីបទអ័ក្សស្រប៖ ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្នែកនីមួយៗអាចត្រូវកំណត់ធៀបអ័ក្សសង់ត្រូអ៊ីតរបស់វាដែលស្របនឹងអ័ក្សយោង។
- បើអ័ក្សសង់ត្រូអ៊ីតមិនត្រួតជាមួយអ័ក្សយោង ទ្រឹស្តីបទអ័ក្សស្រប $I = \bar{I} + Ad^2$ ត្រូវបានប្រើដើម្បីកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្នែកធៀបអ័ក្សយោង។
- បើផ្នែកសមាសមាន(រន្ធ)ម៉ូម៉ង់និចលភាពរបស់វាត្រូវបានរកឃើញដោយ(ដក)ម៉ូម៉ង់និចលភាព ចំពោះរន្ធពីម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្នែកទាំងមូលរួមទាំងរន្ធ។

ឧទាហរណ៍១៣៖ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃសមាសដូចរូបធៀបអ័ក្ស x ។



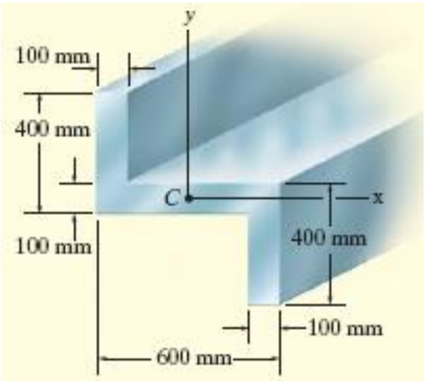
ដំណោះស្រាយ

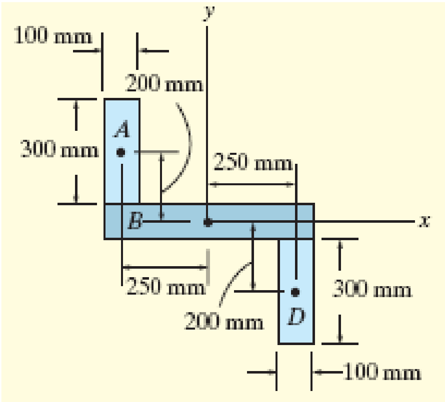


- ផ្នែកសមាសៈ ផ្ទៃសមាសទទួលបានដោយដកវង្វង់ពីចតុកោណកែងដូចរូប។ សង់ត្រូអ៊ីតនៃផ្ទៃនីមួយៗត្រូវស្ថិតនៅ ក្នុងរូប។
- ទ្រឹស្តីបទអ័ក្សស្របៈ ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបអ័ក្ស x ត្រូវបានកំណត់ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទអ័ក្សស្រប និងទិន្នន័យក្នុងតារាង។
- វង្វង់ៈ $I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 = \frac{1}{4}\pi(25)^2 + \pi\, 25^2 \times 75^2 = 11.4\times10^6\,\mathrm{m}^4$
- ចតុកោណកែងៈ $I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 = \frac{1}{12}\times100\times150^2 + 100\times150\times75^2 = 112.5\times10^6\,\mathrm{mm}^4$
- ផលបូកៈ ម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃសមាសគឺៈ

$$I_x = -11.4\times10^6 + 112.5\times10^6 = 101\times10^6\,\mathrm{mm}^4$$

ឧទាហរណ៍១៤ៈ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃមុខកាត់របារដូចបង្ហាញដូចរូបធៀបនឹងអ័ក្សសង់ត្រូអ៊ីត x និង y។





ដំណោះស្រាយ

- ផ្នែកសមាសៈ មុខកាត់អាចចែកជាចតុកោណកែងបី A, B, D ត្រូវបានបង្ហាញដូចរូប។ ចំពោះការគណនាសង់ត្រូអ៊ីតនីមួយៗនៃចតុកោណទាំងនេះត្រូវបានដាក់ទីតាំងដូចរូប។
- ទ្រឹស្តីអ័ក្សស្របៈ ដោយប្រើទ្រឹស្តីអ័ក្សស្របចំពោះចតុកោណកែង A និង D ការគណនាដូចតទៅៈ ចតុកោណកែង A និង D ៈ

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 = \frac{1}{12}100\times(300)^2 + 100\times300\times(200)^2 = 1.4255\times10^9\,\mathrm{mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 = \frac{1}{12}300\times(100)^2 + 100\times300\times(250)^2 = 1.9\times10^9\,\text{mm}^4$$

ចតុកោណកែង៖ $I_x = \frac{1}{12}600\times(100)^3 = 0.05\times10^9\,\text{mm}^4$

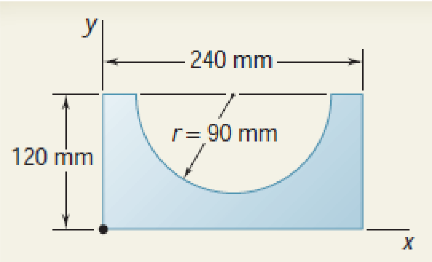
$$I_y = \frac{1}{12}100\times(600)^3 = 1.8\times10^9\,\text{mm}^4$$

- ផលបូក៖ ម៉ូម៉ង់និចលភាព ចំពោះផ្ទៃមុខកាត់ទាំងមូល

$$I_x = 2\times\left(1,425\times10^6\right) + 0.05\times10^9 = 2.9\times10^9\,\text{mm}^4$$

$$I_y = 2\left(1.9\times10^9\right) + 1.8\times10^9 = 5.6\times10^9\,\text{mm}^4$$

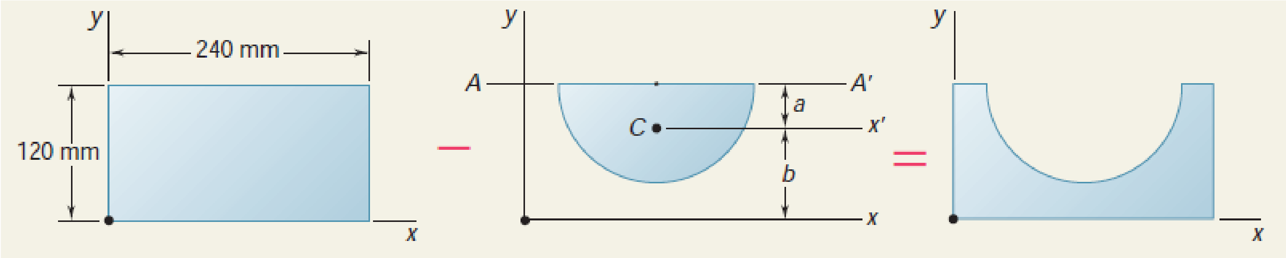
ឧទាហរណ៍១៥៖ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃធៀបអ័ក្ស x ។



ដំណោះស្រាយ

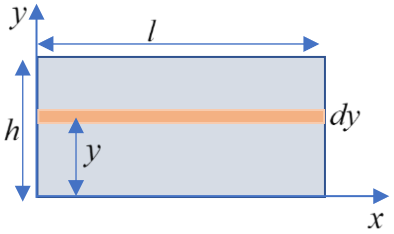
ផ្ទៃដែលឱ្យបានមកពីការដកផ្ទៃកន្លះរង្វង់ចេញពីចតុកោណកែង។

យើងនឹងគណនាម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃចតុកោណកែង និងកន្លះរង្វង់៖



ចំពោះចតុកោណកែង៖

$$I_{1x} = \int y^2 dA = \int y^2 l dy = l\int_0^h y^2 dy = \frac{1}{3}l\,h^3$$



$$I_{1x} = \frac{1}{3}\times240\times(120)^3 = 138.2\times10^6\,\text{mm}^4$$

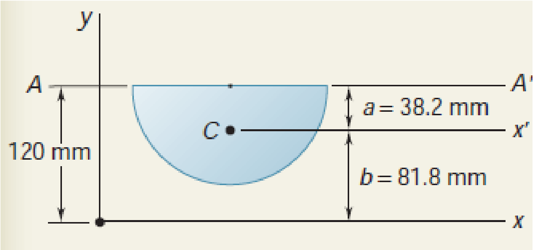
ចំពោះកន្លះរង្វង់ យើងកំណត់ទីតាំងសង់ត្រូអ៊ីត C នៃកន្លះរង្វង់ធៀបអង្កត់ផ្ចិត AA′ ៖

$$a = \frac{4r}{3\pi} = 38.2\text{mm} \quad , \quad b = 120\text{mm} - a = 81.8\text{mm}$$

ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃកន្លះរង្វង់ធៀបនឹងអង្កត់ផ្ចិត AA′ គឺ $I_{AA'} = \frac{1}{8}\pi r^4 = \frac{1}{8}\pi(90)^2 = 25.76\times10^4\text{mm}^4$

និងផ្ទៃកន្លះរង្វង់ $A = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(90)^2 = 12.72\times10^3\text{mm}^2$

ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទនាត់ស្រប យើងទទួលបាន៖



$$I_{AA'} = \bar{I}_{x'} + Aa^2$$

$$\Rightarrow \bar{I}_{x'} = I_{AA'} - Aa^2$$
$$= 25.76\times10^6 - 12.72\times10^3\times(38.2)^2$$
$$= 7.20\times10^6\text{mm}^4$$

ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទនាត់ស្របម្តងទៀត យើងទទួលបាន៖

$$I_{2x} = \bar{I}_{x'} + Ab^2 = 7.20\times10^6 + 12.72\times10^3\times(81.8)^2 = 92.3\times10^6\text{mm}^4$$

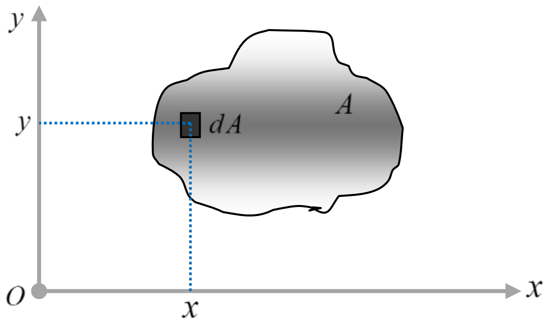
ដូចនេះម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃដែលឱ្យគឺ

$$I_x = I_{2x} - I_{1x} = 138.3\times10^6 - 92.3\times10^6 = 45.9\times10^6\text{mm}^4$$

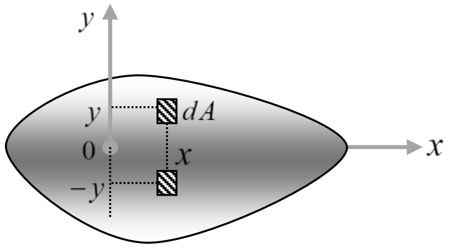
6. ផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃ

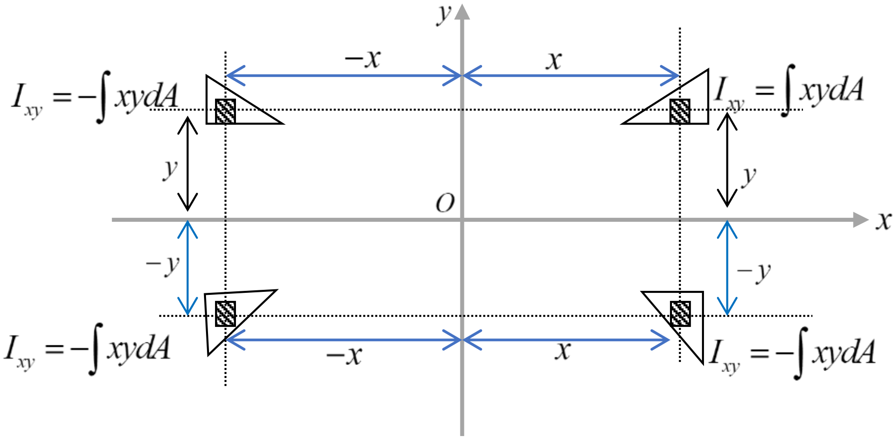
ជាទូទៅចំពោះម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃគឺផ្សេង ចំពោះរាល់អ័ក្សដែលគណនាធៀប។ នៅក្នុងការអនុវត្ត រចនាសម្ព័ន្ធឬគំរូតាងមេកានិច វាមានសារៈសំខាន់ដើម្បីស្គាល់ទិសដៅនៃអ័ក្សទាំងនោះ ដែលឱ្យម៉ូម៉ង់និចលភាពអតិបរមា និងអប្បបរមាចំពោះផ្ទៃ។ ផលគុណនិចលភាពចំពោះធាតុផ្ទៃ dA ស្ថិតនៅចំណុច (x, y) ដូចរូបមូល A ផលគុណនិចលភាពគឺ៖

$$I_{xy} = \int_A xy\, dA$$



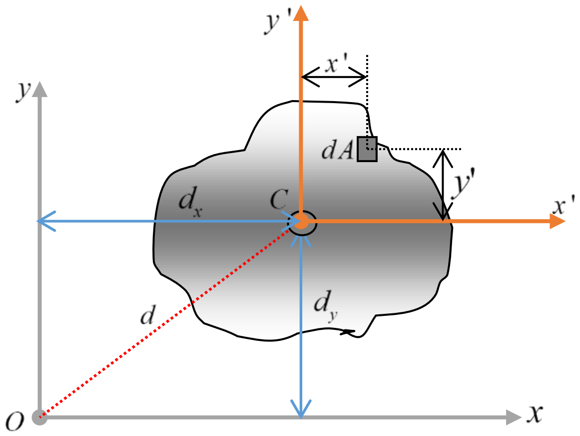
ផលគុណនិចលភាព I_{xy} សូន្យ បើអ័ក្ស x ឬ y ជាអ័ក្សស៊ីមេទ្រីចំពោះផ្ទៃ។ យើងពិនិត្យជាតុផ្ទៃ dA នៅត្រង់ (x,y) និង $(x,-y)$ ។ ដោយសារផលគុណនិចលភាពចំពោះជាតុនោះគឺ $xydA$ និង $-xydA$ ។ ផលបូកវាគឺសូន្យ។





ទ្រឹស្តីអ័ក្សស្រប

យើងពិនិត្យផ្ទៃមួយដូចរូបដែល x' និង y' តាងសំណុំនៃអ័ក្សកាត់តាមសង់ត្រូអ៊ីតនៃផ្ទៃ ហើយ x និង y តាងសំណុំអ័ក្សស្រប។ ដោយសារផលគុណនិចលភាពនៃ dA ធៀបនឹងអ័ក្ស x និង y គឺ៖



$$dI_{xy} = (x'+d_x)(y'+d_y)dA$$

ដូចនេះផ្ទៃទាំងមូល៖

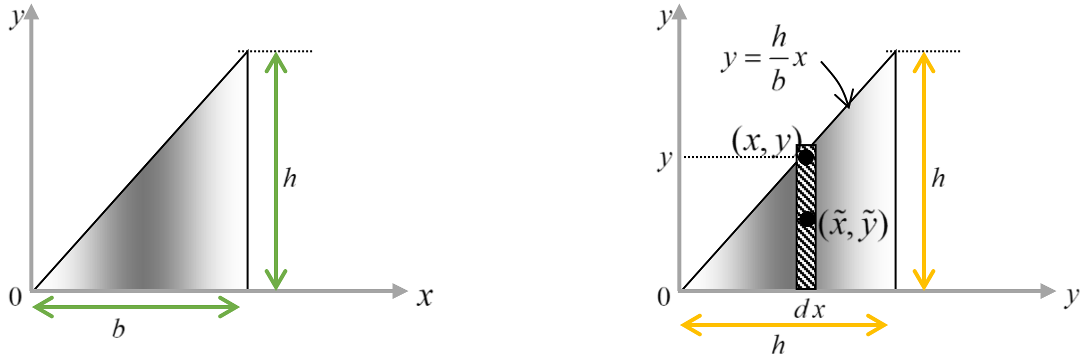
$$I_{xy} = \int_A (x'+d_x)(y'+d_y)dA$$
$$= \int_A x'y'dA + d_x\int_A y'dA + d_y\int_A x'dA + d_xd_y\int_A dA$$

ផលគុណម៉ូម៉ង់និចភាពចំពោះផ្ទៃធៀបអ័ក្សសង់ត្រូអ៊ីត $\bar{I}_{x'y'}$ ហើយ $\int_A y'dA = \int_A x'dA = 0$ ។

ដោយសារម៉ូម៉ង់ផ្ទៃយកធៀបអ័ក្សសង់ត្រូអ៊ីត។ យើងបាន៖

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + Ad_xd_y$$

ឧទាហរណ៍១៦៖ ចូរកំណត់ផលគុណនិចលភាព I_{xy} ចំពោះត្រីកោណដូចរូប។



ដំណោះស្រាយ

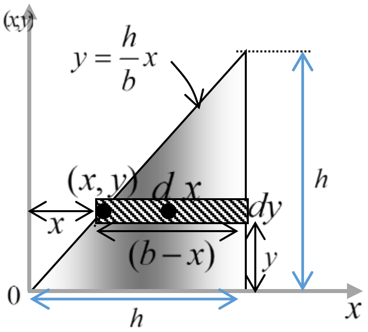
- វិធីទី១ ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានកម្រាស់ dx មានផ្ទៃ $dA=ydx$ ។

ផលគុណនិចលភាពនៃធាតុធៀបអ័ក្ស x,y ត្រូវបានកំណត់ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទអ័ក្សស្រប។

$$dI_{xy}=d\bar{I}_{x'y'}+dA\,\tilde{x}\,\tilde{y}$$

ដែល $(\tilde{x},\tilde{y})$ ស្ថិតនៅត្រង់សង់ត្រូអ៊ីតនៃធាតុ ឬ គល់នៃអ័ក្ស $(\tilde{x},\tilde{y})$ ។ ដោយសារ $d\bar{I}_{x'y'}=0$

បណ្ដាលមកពីស៊ីមេទ្រីនិង $\tilde{x}=x,\tilde{y}=\frac{y}{2}$ ដូចនេះ



$$dI_{xy}=0+(y\,dx)x\left(\frac{y}{2}\right)=\left(\frac{h}{b}x\,dx\right)x\left(\frac{h}{2b}x\right)=\frac{h^2}{2b^2}x^3dx$$

ដោយធ្វើអាំងតេក្រាល x ពី $x=0$ ទៅ $x=b$

$$I_{xy}=\frac{h^2}{2b^2}\int_0^b x^3dx=\frac{b^2h^2}{8}$$

- វិធីទី២៖ ធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានកម្រាស់ dy និងផ្ទៃ $dA=(b-x)dy$ ។ សង់ត្រូអ៊ីតស្ថិតនៅត្រង់៖

$$\tilde{x}=x+\left(\frac{b-x}{2}\right)=\frac{b+x}{2},\tilde{y}=y$$

ដូចនេះផលគុណនិចលភាពនៃធាតុក្លាយជា៖

$$dI_{xy}=d\bar{I}_{x'y'}+dA\,\tilde{x}\,\tilde{y}=0+(b-x)dy\left(\frac{b+x}{2}\right)y$$

$$dI_{xy} = \left(b - \frac{b}{h}y\right)dy\left[\frac{b + \left(\frac{b}{h}\right)y}{2}\right]y = \frac{1}{2}y\left(b^2 - \frac{b^2}{h^2}y^2\right)dy$$

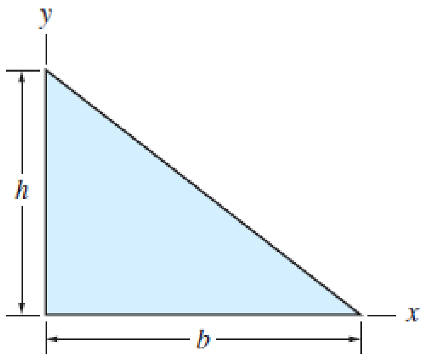
ដោយធ្វើអាំងតេក្រាលធៀបនឹង y ពី $y=0$ ទៅ $y=h$ នាំឱ្យ

$$I_{xy} = \frac{1}{2}\int_0^h y\left(b^2 - \frac{b^2}{h^2}y^2\right)dy = \frac{b^2h^2}{8}$$

ឧទាហរណ៍១៧៖

ក. ចូរគណនាផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃត្រីកោណដូចបង្ហាញលើរូបវិលជុំអ័ក្ស x និងវិលជុំវិញអ័ក្ស x ដោយប្រើវិធីពីរគឺ អាំងតេក្រាលទោល និងប្រើអាំងតេក្រាលពីរជាន់។

ខ. គណនាផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាព $\bar{I}_{xy}$ នៃត្រីកោណធៀបនឹងអ័ក្សសង់ត្រូអ៊ីតស្របទៅនឹងអ័ក្ស x និង y ។



ដំណោះស្រាយ

ផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃ៖

ផ្នែកទី១ ប្រើអាំងតេក្រាលទោល។

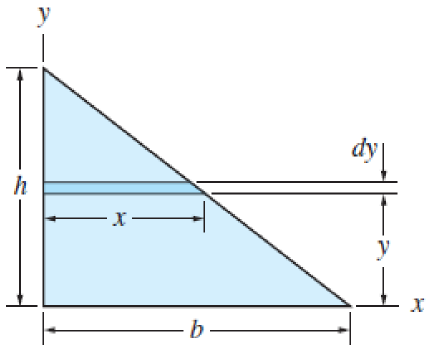
តាមនិយមន័យ $I_{xy} = \int xydA$ ដែល x និង y

ជាកូអរដោនេនៃធាតុផ្ទៃ $dA = dxdy$ ។

ប៉ុន្តែរូបមន្តនេះមិនអាចអនុវត្តអាំងតេក្រាលទោលទេ ដែលយើងត្រូវតែធ្វើអាំងតេក្រាល dI_{xy} ផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃធាតុផ្ទៃ។ ដើម្បីរក dI_{xy} ទ្រឹស្តីបទ្ទាត់ស្របសម្រាប់ផលគុណនិចលភាព $I_{xy} = \bar{I}_{xy} + A\bar{x}\,\bar{y}$ ត្រូវតែបកស្រាយជា $dI_{xy} = d\bar{I}_{xy} + dA\tilde{x}\tilde{y}$ ដែល $d\bar{I}_{xy}$ ជាផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាពផ្ទៃ dA វិលជុំវិញអ័ក្សសង់ត្រូអ៊ីត និង $\tilde{x}, \tilde{y}$ ជាកូអរដោនេសង់ត្រូអ៊ីតនៃធាតុផ្ទៃ។

ករណីជាតុផ្ទៃដេក $dA = xdy$, $\tilde{x} = \frac{x}{y}$, $\tilde{y} = y$

$d\bar{I}_{xy} = 0$ (តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី)



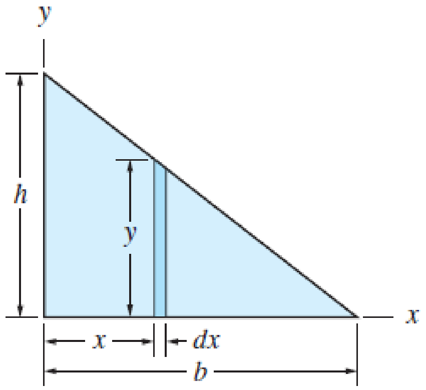
$dI_{xy} = dA\,\tilde{x}\,\tilde{y} = (xdy)\left(\frac{x}{2}\right)y = \frac{1}{2}x^2 ydy$

ដោយជំនួស $x = \frac{b}{h}(h-y)$ រួចធ្វើអាំងតេក្រាល

$$I_{xy} = \frac{b^2}{2h^2}\int_0^h (h-y)^2 ydy = \frac{1}{24}b^2h^2$$

ករណីជាតុផ្ទៃឈរ $dA = ydx$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = \frac{y}{2}$

$d\bar{I}_{xy} = 0$ (តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី)



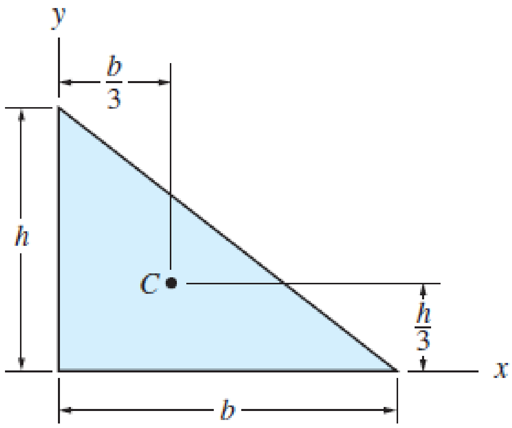
$dI_{xy} = dA\,\tilde{x}\,\tilde{y} = (ydx)y\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}xy^2dx$

ដោយជំនួស $y = \frac{h}{b}(b-x)$ រួចធ្វើអាំងតេក្រាល

$$I_{xy} = \frac{h^2}{2b^2}\int_0^b x(b-x)^2 dx = \frac{1}{24}b^2h^2$$

ផ្នែកទី២ ដោយប្រើអាំងតេក្រាលពីរជាន់ជាមួយ $dA = dxdy$ យើងប្រើ $I_{xy} = \int xydA$ ដោយជ្រើសរើសអាំងតេក្រាល y មុន យើងបាន៖

$I_{xy} = \int_0^b \left(\int_0^{\frac{h}{b}(b-x)} xydy\right)dx$ បើធ្វើអាំងតេក្រាល x មុន នោះ $I_{xy} = \int_0^h \left(\int_0^{\frac{b}{h}(h-y)} xydx\right)dy$



យើងបាន $I_{xy} = \int_0^b x\frac{1}{2}\left[\frac{h}{b}(b-x)\right]^2 dx = \frac{1}{24}b^2h^2$

ខ. ផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាព $\bar{I}_{xy}$ នៃត្រីកោណធៀបនឹងអ័ក្សសង់ត្រូអ៊ីតស្របទៅនឹងអ័ក្ស x និង y យើងមាន៖

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + A\tilde{x}\tilde{y}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{I}_{xy} = I_{xy} - A\tilde{x}\tilde{y} = \frac{1}{24}b^2h^2 - \frac{bh}{2}\left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{h}{3}\right)$$

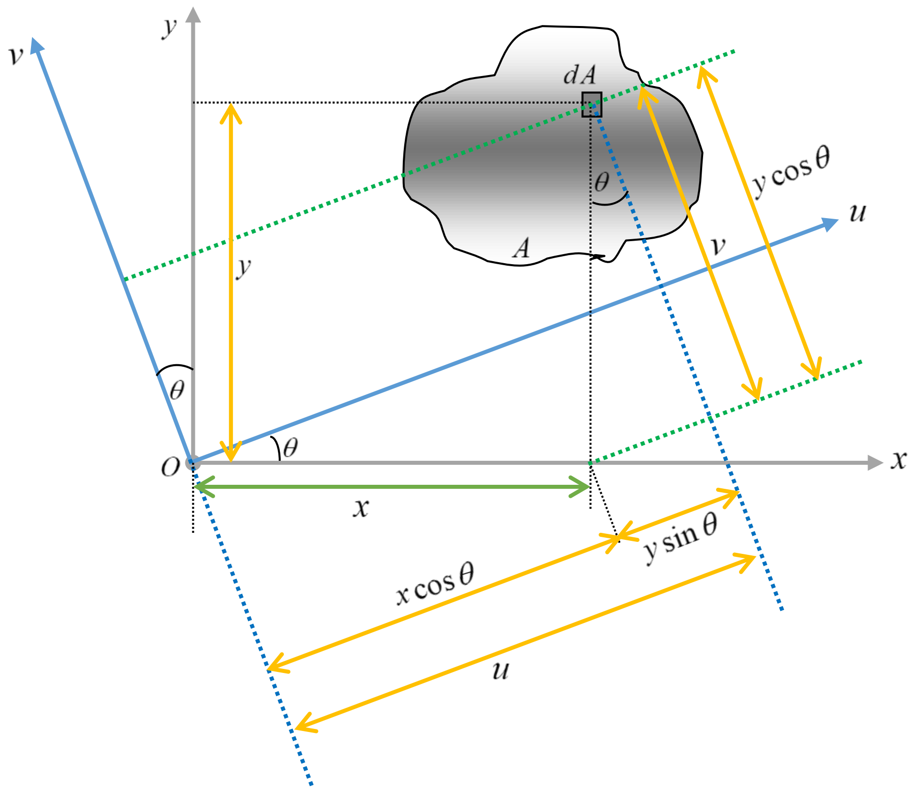
$$\Rightarrow \quad \bar{I}_{xy} = -\frac{1}{72}b^2h^2$$

7. ម៉ូម៉ង់និចលភាពចំពោះផ្ទៃធៀបនឹងអ័ក្សទេរ

នៅក្នុងរចនាសម្ព័ន្ធគំរូនិងមេកានិច វាចាំបាច់គណនាផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាព I_u, I_v និង I_{uv} ចំពោះផ្ទៃធៀបទៅនឹងសំណុំអ័ក្សទេរ u និង v ពេលតម្លៃ θ, I_x, I_y និង I_{xy} ត្រូវបានស្គាល់។ ដើម្បីធ្វើនេះ យើងប្រើសមីការបម្លែងដែលទាក់ទងទៅនឹង x,y និង u,v ។

ក្នុងរូបនេះ យើងបាន៖

$$u = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$v = -x\sin\theta + y\cos\theta$$



ដោយប្រើសមីការទាំងនេះ ម៉ូម៉ង់និងផលគុណនិចលភាពនៃ dA ធៀបនឹងអ័ក្ស u និង v ក្លាយជា៖

$$dI_u = v^2 dA = (-x\sin\theta + y\cos\theta)^2 \, dA$$
$$dI_v = u^2 dA = (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 \, dA$$
$$dI_{uv} = uv dA = (x\cos\theta + y\sin\theta)(-x\sin\theta + y\cos\theta) dA$$

ដោយពន្លាតកន្សោមនីមួយៗរួចធ្វើអាំងតេក្រាលៈ

$I_x = \int y^2 dA$, $I_y = \int x^2 dA$ និង $I_{xy} = \int xy dA$ យើងទទួលបានៈ

$$I_u = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta$$
$$I_v = I_x \sin^2\theta + I_y \cos^2\theta + 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta$$
$$I_{uv} = I_x \sin\theta\cos\theta - I_y \sin\theta\cos\theta + I_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

សមីការទាំងនេះអាចត្រូវសម្រួលដោយប្រើឯកលក្ខណៈភាពត្រីកោណមាត្រ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ និង $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ ដែលៈ

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$
$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$
$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

បើសមីការទី១និងទី២បូកបញ្ចូលគ្នា យើងអាចបង្ហាញថាម៉ូម៉ង់ប៉ូលនិចលភាពធៀបអ័ក្សកាត់តាមចំណុច O គឺមិនអាស្រ័យអ័ក្សរង្វិលនៃអ័ក្ស u និង v មានន័យថាៈ $J_0 = I_u + I_v = I_x + I_y$

- គោលការណ៍ម៉ូម៉ង់និចលភាពៈ

សមីការបង្ហាញថា I_u, I_v និង I_{uv} អាស្រ័យមុំ θ។ ឥឡូវយើងកំណត់ទិសដៅនៃអ័ក្សទាំងនេះដែលម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបចំពោះផ្ទៃ I_u និង I_v គឺអតិបរមានិងអប្បបរមា។ សំណុំអ័ក្សពិសេសទាំងនេះត្រូវបានហៅថា អ័ក្សមេនៃផ្ទៃ និងទាក់ទងទៅនឹងម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបទៅនឹងអ័ក្សទាំងនេះហៅថា គោលការណ៍ម៉ូម៉ង់និចលភាព។ ជាទូទៅមានសំណុំអ័ក្សមេ ចំពោះការជ្រើសរើសគល់ O។ ចំពោះការធ្វើគទម្រង់រចនាសម្ព័ន្ធនិងមេកានិច គល់ O ត្រូវបានដាក់ទីតាំងមុខកាត់ផ្ទៃសង់ត្រូអ៊ីត។

មុំ $\theta = \theta_p$ ដែលឱ្យនិយមន័យទិសដៅនៃអ័ក្សមេ ចំពោះផ្ទៃអាចត្រូវបានរកឃើញដោយធ្វើឌីផេរ៉ង់ស្យែលសមីការទី១ (9) ធៀបនឹង θ និងដាក់លទ្ធផលឱ្យស្មើសូន្យ។ ដូចនេះ

$$\frac{dI_u}{d\theta} = -2\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

នៅ $\theta = \theta_p \quad \Rightarrow \quad \tan 2\theta_p = \dfrac{-I_{xy}}{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)}$ សមីការនេះមានរឺសពីរ θ_{p1} និង θ_{p2}។

- ចំពោះ θ_{p1} ៖ $\sin 2\theta_{p1} = -\dfrac{I_{xy}}{\sqrt{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$ និង $\cos 2\theta_{p1} = \dfrac{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)}{\sqrt{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$

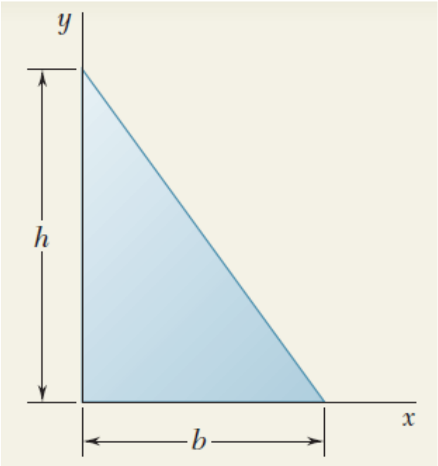
- ចំពោះ θ_{p2} ៖ $\sin 2\theta_{p1} = \dfrac{I_{xy}}{\sqrt{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$ និង $\cos 2\theta_{p1} = -\dfrac{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)}{\sqrt{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$

ជំនួសចូលក្នុងសមីការទី១ ឬទី២នៃសមីការ យើងបាន៖ $I_{\substack{\max \\ \min}} = \dfrac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$

ឧទាហរណ៍១៨៖ ចូរកំណត់ផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃត្រីកោណកែង៖

ក. ធៀបទៅនឹងអ័ក្ស x និង y។

ខ. ធៀបទៅនឹងអ័ក្សសង់ត្រូអ៊ីតស្របទៅនឹងអ័ក្ស x និង y។



ដំណោះស្រាយ

ក. ផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបទៅនឹងអ័ក្ស x និង y ៖

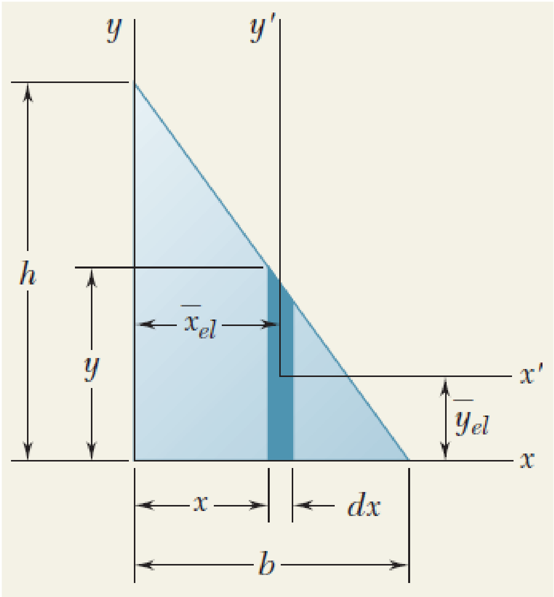
ជ្រើសរើសធាតុផ្ទៃឈរស្របទៅនឹងអ័ក្ស y ។

ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទនាត់ស្រប យើងសរសេរ៖

$$dI_{xy} = dI_{x'y'} + \tilde{x}\tilde{y}dA$$

ដោយសារ ធាតុផ្ទៃស៊ីមេទ្រីធៀបទៅនឹងអ័ក្ស x' និង y' នោះ $dI_{x'y'} = 0$ ។ យើងបាន៖

$$y = -\frac{h}{b}x + h\ ,\quad dA = ydx = h\left(1 - \frac{x}{b}\right)dx$$



$$\tilde{x} = x\ ,\quad \tilde{y} = \frac{y}{2} = \frac{1}{2}h\left(1 - \frac{x}{b}\right)$$

$$\Rightarrow I_{xy} = \int dI_{xy} = \int \tilde{x}\tilde{y}dA = \int_0^b x \times \frac{1}{2}h^2\left(1 - \frac{x}{b}\right)^2 dx$$

$$I_{xy} = h^2\int_0^b\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{2b^2}\right)dx$$

$$= h^2\left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3b} + \frac{x^4}{8b^2}\right]_0^b$$

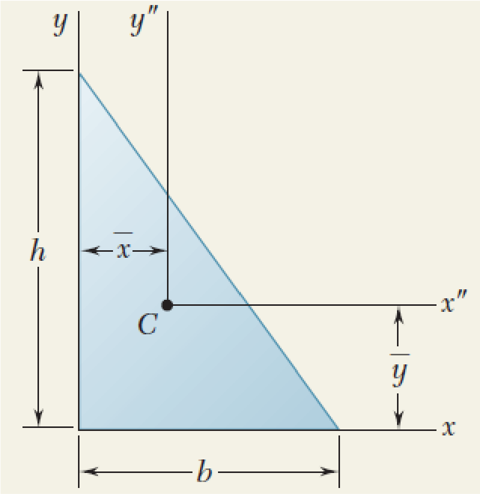
$$\Rightarrow I_{xy} = \frac{1}{24}b^2h^2$$

ខ. ផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាព $\bar{I}_{x"y"}$ ៖

កូអរដោនេនៃសង់ត្រូអ៊ីតនៃត្រីកោណធៀបទៅនឹងអ័ក្ស x និង y គឺ

$$\bar{x} = \frac{b}{3}\ ,\ \bar{y} = \frac{h}{3}$$

ដោយប្រើកន្សោមសម្រាប់ I_{xy} ដែលទទួលបាននៅសំណួរ-ក យើងអនុវត្តទ្រឹស្តីបន្ទាត់ស្រប នោះ



$$I_{xy} = \bar{I}_{x"y"} + \bar{x}\,\bar{y}A$$

$$\frac{1}{24}b^2h^2 = \bar{I}_{x"y"} + \frac{b}{3}\frac{h}{3}\frac{bh}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{I}_{x"y"} = \frac{1}{24}b^2h^2 - \frac{1}{18}b^2h^2 = -\frac{1}{72}b^2h^2$$

8. រង្វង់ MOHR ចំពោះម៉ូម៉ង់និចលភាព

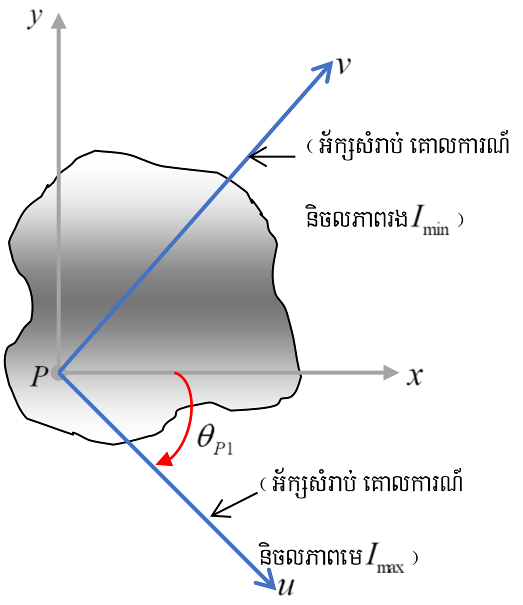
ពីសមីការមានចម្លើយជាលក្ខណៈរូបដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ដើម្បីប្រើនិងស្រួលរំឮក។ ដោយលើកជាការេសមីការទី១ និង ទី៣នៃរួចបូកបញ្ចូលគ្នា វាត្រូវបានរកឃើញថា៖

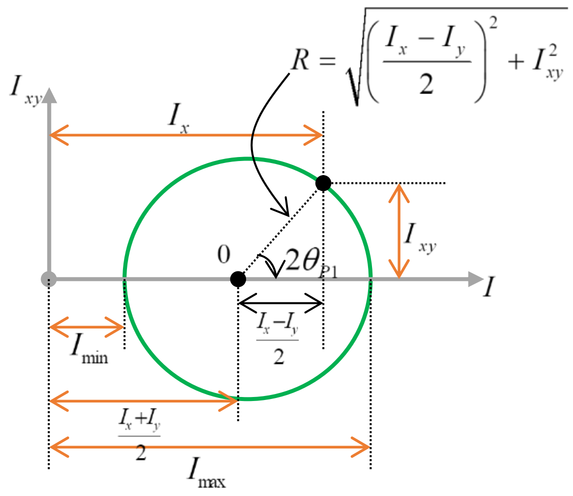
$$\left(I_u - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{uv}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2$$

នៅក្នុងចំណោទដែលឱ្យ I_u និង I_{uv} ជាអថេរនិង I_x, I_y និង I_{xy} ត្រូវបានស្គាល់ថាថេរ។ ដូចនេះសមីការអាចត្រូវបានសរសេរនៅក្នុងទម្រង់៖

$$(I_u - a)^2 + I_{uv}^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

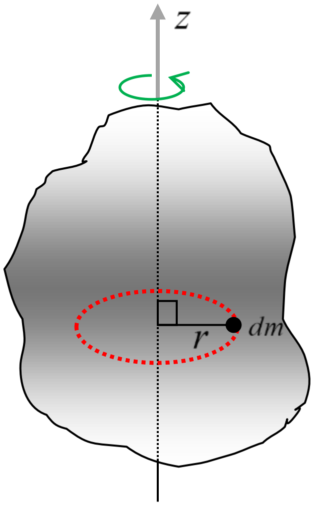
R តាងឱ្យកាំរង្វង់ដែលមានផ្ចិតនៅត្រង់ចំណុច $(a,0)$ ដែល $a = \frac{I_x + I_y}{2}$ ។ រង្វង់នេះត្រូវបានសង់ឡើងហើយហៅថារង្វង់ Mohr មកពីឈ្មោះវិស្វករអាល្លឺម៉ង់ Otto Mohr(1835 – 1918) ។





9. ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាស

យើងឱ្យនិយមន័យ ម៉ាសម៉ូម៉ង់និចលភាពជាអាំងតេក្រាលនៃ(ម៉ូម៉ង់ទី២) ធៀបអ័ក្សនៃគ្រប់ធាតុមានម៉ាស dm ដែលជាបន្សំនៃអង្គធាតុ។ ឧទាហរណ៍យើងពិនិត្យរូប ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបអ័ក្ស z គឺ៖ $I = \int_m r^2 dm$ ។

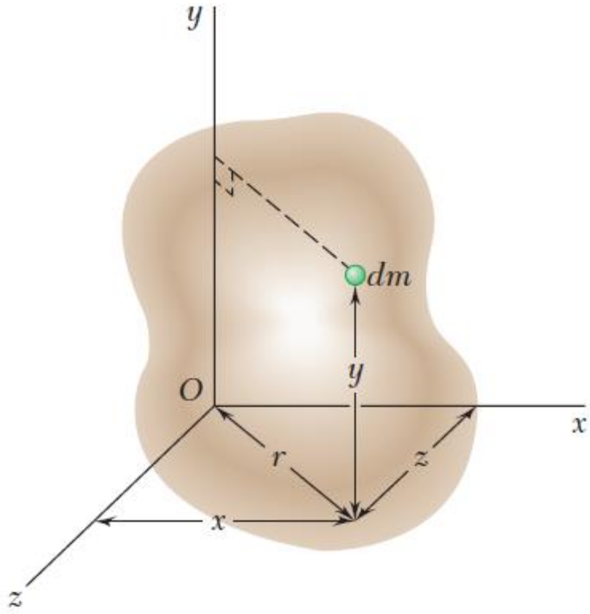


ដែម៉ូម៉ង់ចម្ងាយកែងពីអ័ក្សទៅចំណុចម៉ាស dm ។ ដោយ $dm = \rho dV$, dV ជាធាតុមាឌ និង ρ ជាម៉ាសមាឌ។ បើរូបធាតុមានម៉ាសមាឌប្រែប្រួលគឺ $\rho = \rho(x,y,z)$ ។

$$\Rightarrow \quad I = \int_V r^2 \rho dV$$

បើចំណុចរូបធាតុមានម៉ាសមាឌថេរ យើងបាន៖ $I = \rho \int_V r^2 dV$

ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃអង្គធាតុធៀបទៅនឹងអ័ក្សកូអរដោនេអាចត្រូវបានសំដែងយ៉ាងងាយស្រួល ជាអនុគមន៍នៃកូអរដោនេ x, y, z នៃធាតុម៉ាស dm ។ នៅលើរូប ចម្ងាយការេនៃ r ពីធាតុម៉ាស dm ទៅអ័ក្ស y គឺ $r^2 = x^2 + z^2$ ។ យើងសំដែងម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបទៅនឹងអ័ក្ស y គឺ



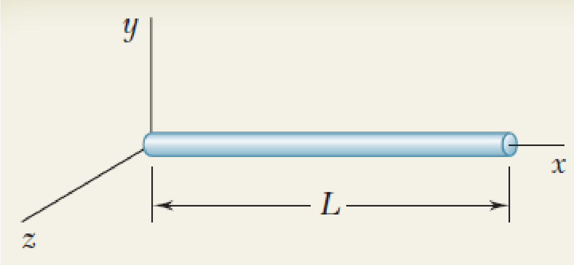
$$I_y = \int r^2 dm = \int (x^2 + z^2) dm$$

កន្សោមស្រដៀងគ្នាអាចទទួលបាន សម្រាប់ម៉ូម៉ង់និចលភាធៀបទៅនឹងអ័ក្ស x និង y ។ យើងនបាន៖

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

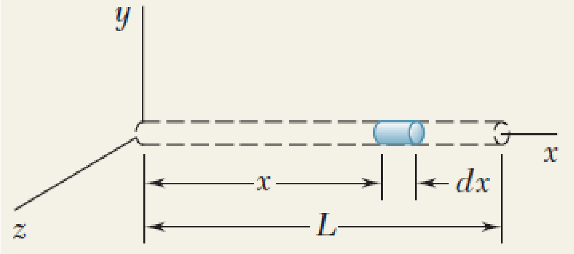
$$I_y = \int (x^2 + z^2) dm$$

ឧទាហរណ៍១៩៖ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃដងមានប្រវែង L និងម៉ាស m ធៀបទៅនឹងអ័ក្សដែលកែងទៅនឹងដងហើយកាត់តាមចុងមួយនៃដង។



ដំណោះស្រាយ

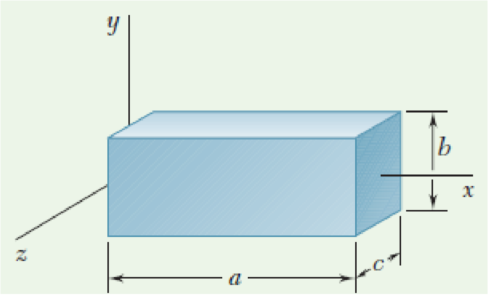
ដោយជ្រើសរើសធាតុឌីផេរ៉ង់ស្យែលម៉ាស



$$dm = \frac{m}{L} dx$$

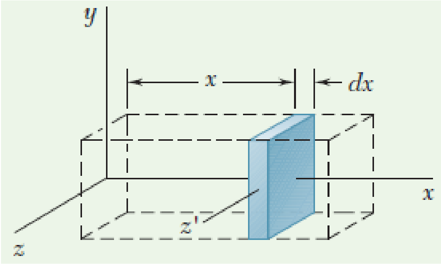
$$I_y = \int x^2 dm = \int_0^L x^2 \frac{m}{L} dx = \left[\frac{m}{L} \frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{1}{3} mL^2$$

ឧទាហរណ៍២០៖ ចំពោះប្រលេពីប៉ែតកែងស្មើសាច់ដូចរូប ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបអ័ក្ស z ។



ដំណោះស្រាយ

យើងជ្រើសរើសជាតុម៉ាសដូចរូប



$dm = \rho bcdx$

ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្ស z' គឺ $dI_{z'} = \frac{1}{12}b^2 dm$

ដោយអនុវត្តទ្រឹស្តីបន្ទាត់ស្រប យើងទទួលបាន

ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃបន្ទះធៀបនឹងអ័ក្ស z គឺ

$$dI_z = dI_{z'} + x^2 dm = \frac{1}{12}b^2 dm + x^2 dm = \left(\frac{1}{12}b^2 + x^2\right)\rho bcdx$$

ធ្វើអាំងតេក្រាលជាមួយលក្ខខណ្ឌគោល

$$I_z = \int dI_z = \int_0^a \left(\frac{1}{12}b^2 + x^2\right)\rho bcdx = \rho abc\left(\frac{1}{12}b^2 + \frac{1}{3}a^2\right)$$

ដោយម៉ាសនៃប្រលេពីប៉ែតកែង $m = \rho abc$ យើងអាចសរសេរម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបអ័ក្ស z គឺ

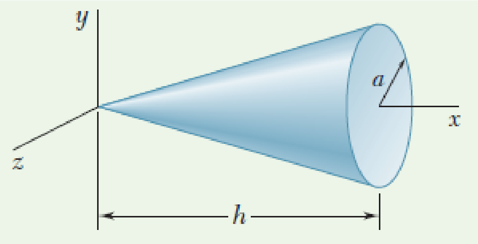
$$I_z = m\left(\frac{1}{12}b^2 + \frac{1}{3}a^2\right) = \frac{1}{12}m\left(4a^2 + b^2\right)$$

ឧទាហរណ៍២១៖ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃកោនស្មើសាច់ធៀបទៅនឹង៖

ក. អ័ក្ស x (អ័ក្សរបស់កោន)។

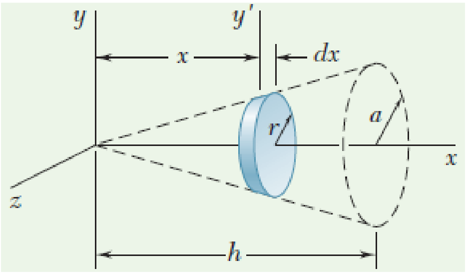
ខ. អ័ក្ស y ឬ z ។

គ. អ័ក្សកាត់តាមសង់ត្រូអ៊ីតកែងទៅនឹងអ័ក្សកោន។



ដំណោះស្រាយ

ក. ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃកោនធៀបអ័ក្ស x ៖



ជ្រើសរើសជាតុម៉ាសដូចរូប (ជាថាសមានកាំ r កម្រាស់ dx)

$dm = \rho\pi r^2 dx$ ដោយ $r = a\dfrac{x}{h}$

ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃធាតុម៉ាសធៀបនឹងអ័ក្ស x គឺ

$$dI_x = \frac{1}{2}r^2 dm = \frac{1}{2}\left(a\frac{x}{h}\right)^2\left(\rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2dx\right) = \frac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}x^4dx$$

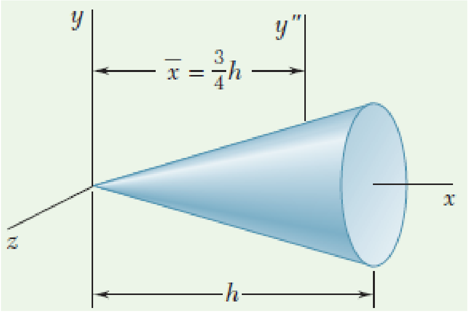
ធ្វើអាំងតេក្រាលជាមួយលក្ខខណ្ឌគោល

$$I_x = \int dI_x = \int_0^h \frac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}x^4dx = \frac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}\frac{h^5}{5} = \frac{1}{10}\rho\pi a^4 h$$

ដោយសារម៉ាសកោន $m = \dfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h$ យើងអាចសរសេរម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃកោនធៀបអ័ក្ស x គឺ

$$I_x = \frac{1}{10}\rho\pi a^4 h = \frac{3}{10}a^2\left(\frac{1}{3}\rho\pi a^2 h\right) = \frac{3}{10}ma^2$$

ខ. ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបអ័ក្ស y ៖



ដោយប្រើធាតុម៉ាសដដែល ហើយប្រើទ្រឹស្តីបទឆ្លាត់ស្រប៖

$$dI_y = dI_{y'} + x^2dm = \frac{1}{4}r^2dm + x^2dm = \left(\frac{1}{4}r^2 + x^2\right)dm$$

ដោយជំនួស r និង dm ទៅក្នុងសមីការ យើងបាន៖

$$dI_y = \left(\frac{1}{14}\frac{a^2}{h^2}x^2 + x^2\right)\left(\rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2dx\right) = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2}+1\right)x^4dx$$

$$I_y = \int dI_y = \int_0^h \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2}+1\right)x^4dx = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2}+1\right)\frac{h^5}{5}$$

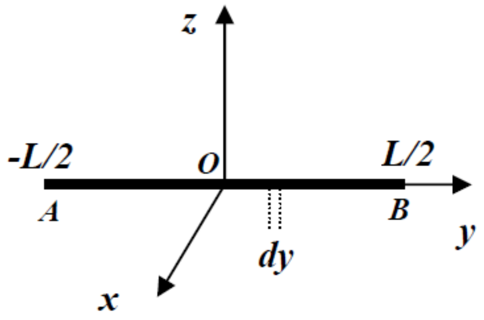
ឬ $I_y = \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{4}a^2 + h^2\right)\dfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h = \dfrac{2}{5}m\left(\dfrac{1}{4}a^2 + h^2\right)$

គ. ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃកោនធៀបអ័ក្សដែលកាត់តាមសង់ត្រូអ៊ីតហើយកែងអ័ក្សកោន៖

តាមទ្រឹស្តីបទឆ្លាត់ស្រប $I_y = \bar{I}_{y''} + m\bar{x}^2$ ដែល $\bar{x} = \dfrac{3}{4}h$

$$\Rightarrow \quad \overline{I}_{y''} = I_y - m\overline{x}^2 = \frac{3}{5}m\left(\frac{1}{4}a^2 + h^2\right) - m\left(\frac{3}{4}h\right)^2 = \frac{3}{20}m\left(a^2 + \frac{1}{4}b^2\right)$$

ឧទាហរណ៍២២៖ ចូររកម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃរបារស្មើសាច់មានប្រវែង L ម៉ាស m វិលជុំវិញចំណុចកណ្ដាលរបស់វា។



ដំណោះស្រាយ

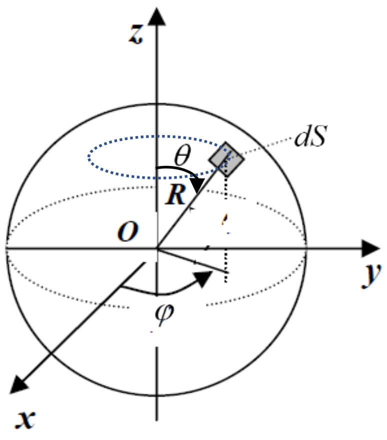
យកអ័ក្ស Oy ដេកតាមរបារ។ ពិនិត្យធាតុប្រវែង dy មានម៉ាស $dm = \lambda dy$ នៅចម្ងាយ y ពី O ហើយវិលជុំវិញ O មានម៉ូម៉ង់និចលភាព $dI_0 = y^2 dy$

$$\Rightarrow \quad I_0 = \int_{(S)} dI_0 = \int_{(S)} y^2 dm$$

$$I_0 = \int_{-L/2}^{+L/2} y^2 \lambda dy = \frac{1}{12}mL^2$$

ចំណាំ $\quad I_{xx} = I_{zz} = I_0 = \frac{1}{12}mL^2$

ឧទាហរណ៍២៣៖ គណនាម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃស្វ៊ែប្រហោងមានកាំ R ម៉ាស m វិលជុំវិញអ័ក្សរបស់វា។



ដំណោះស្រាយ

ពិនិត្យធាតុម៉ាស $dm=\sigma dS$ វិលជុំវិញអ័ក្ស Oz នៅចម្ងាយ $R\sin\theta$ មានម៉ូម៉ង់និចលភាព៖

$$dI_{zz}=(R\sin\theta)^2 dm$$

នៅក្នុងកូអរដោនេស្វ៊ែ $dS=R^2\sin\theta d\theta d\varphi$

$$\Rightarrow\quad I_{zz}=\int_{(S)} dI_{zz}=\int_{(S)}(R\sin\theta)^2\sigma dS$$

$$I_{zz}=\sigma R^4\iint_{(S)}\sin^3\theta d\theta d\varphi=\sigma R^4\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$I_{zz}=-\sigma R^4 2\pi\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)d(\cos\theta)=-\sigma R^4 2\pi\left[\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}$$

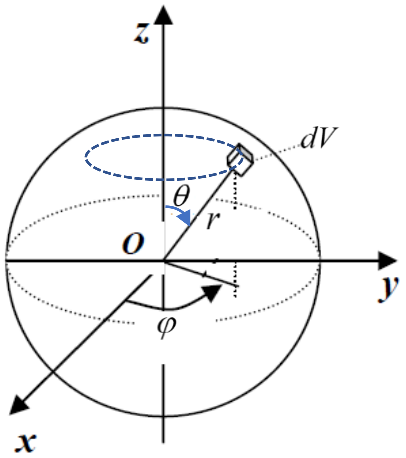
$$=-\sigma R^4 2\pi\left[\left(-1+\frac{1}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]=-\sigma R^4 2\pi\left(-\frac{4}{3}\right)$$

ដោយ $m=\sigma\times 4\pi R^2$

ដូចនេះ $I_{zz}=\dfrac{2}{3}mR^2$

ចំណាំ $I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=\dfrac{2}{3}mR^2$

ឧទាហរណ៍២៤៖ គណនាម៉ូម៉ង់និចលភាពស្វ៊ែស្មើសាច់មានកាំ R ម៉ាស m វិលជុំវិញអ័ក្សរបស់វា។



ដំណោះស្រាយ

ពិនិត្យធាតុម៉ាស $dm=\rho dV$ វិលជុំវិញអ័ក្ស z នៅចម្ងាយ $r\sin\theta$ ។

ម៉ូម៉ង់និចលភាពរបស់វា $dI_{zz}=\left(r\sin\theta\right)^2 dm$

នៅក្នុងកូអរដោនេស្វ៊ែ $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

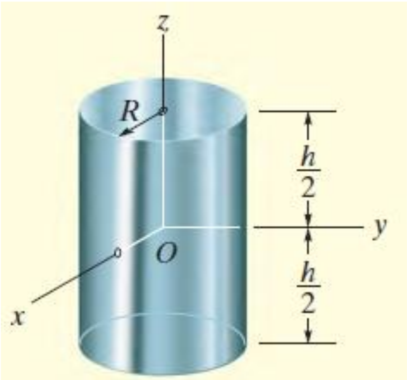
$$\Rightarrow I_{zz} = \int_{(S)} dI_{zz} = \int_{(S)} (r\sin\theta)^2 \rho dV = \iiint_V (r\sin\theta)^2 \rho r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

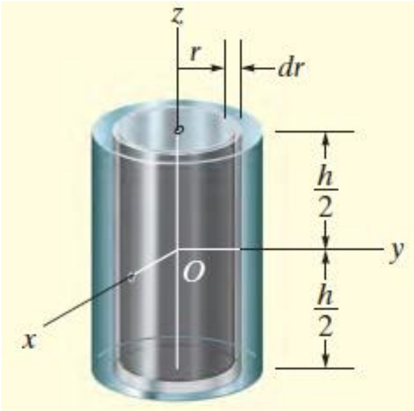
$$I_{zz} = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho \times \frac{R^5}{5} \times \frac{4}{3} \times 2\pi$$ ដោយ $m = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\Rightarrow I_{zz} = \frac{2}{5} mR^2$$

ចំណាំ $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} mR^2$

ឧទាហរណ៍២៥៖ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃស៊ីឡាំងរូបជៀបអ័ក្ស z ។ ម៉ាសមាឌ ρ ថេរ។





ដំណោះស្រាយ

- សំបកជាតុ៖ ចំណោទនេះអាចប្រើសំបកជាតុនិងអាំងតេក្រាល។ ជាតុមាឌគឺ $dV = 2\pi rhdr$ ។

ដូចនេះម៉ាសមាឌរបស់វាគឺ $dm = \rho dV = \rho(2\pi rh dr)$ ។

ដោយសារជាតុទាំងមូលដេកនៅចម្ងាយដូចគ្នា r ពីអ័ក្ស z ជាតុម៉ូម៉ង់និចលភាពគឺ៖

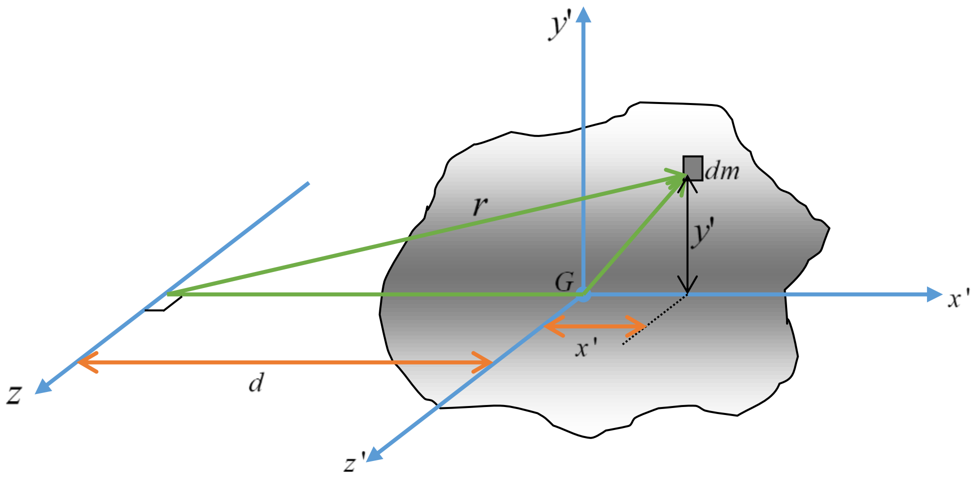
$$dI_z = r^2 dm = \rho 2\pi h r^3 dr$$

ដោយធ្វើអាំងតេក្រាលលើតំបន់ទាំងមូលនៃស៊ីឡាំងនាំឱ្យ $I_z = \int_m r^2 dm = \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr = \frac{\rho\pi}{2} R^4 h$

ម៉ាសស៊ីឡាំងគឺ $m = \int_m dm = \rho 2\pi h \int_0^R r dr = \rho\pi h R^2$

ដូចនេះ $I_z = \frac{1}{2} mR^2$

ទ្រឹស្តីអ័ក្សស្រប



បើម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃអង្គធាតុធៀបនឹងអ័ក្សកាត់តាមផ្ចិតម៉ាសនៃអង្គធាតុត្រូវបានស្គាល់។ ដូចនេះម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្សស្របផ្សេងទៀតអាចត្រូវបានកំណត់ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទអ័ក្សស្រប។ នៅក្នុងរូបអ័ក្ស z' កាត់តាមផ្ចិតម៉ាស G ហើយអ័ក្ស z ស្របអ័ក្សនេះនៅចម្ងាយ d ។ ដោយជ្រើសរើសធាតុម៉ាស dm ដែលមានទីតាំងស្ថិតនៅចំណុច (x',y') និងប្រើទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ $r^2=\left(d+x'\right)^2+y'^2$ ។

យើងអាចសំដែងម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃអង្គធាតុធៀបនឹងអ័ក្ស z គឺ៖

$$I=\int_m r^2dm=\int_m\left[(d+x')^2+y'^2\right]dm$$

$$=\int_m(x'^2+y'^2)dm+2d\int_m x'dm+d^2\int_m dm$$

ដោយសារ $r'^2=x'^2+y'^2$ អាំងតេក្រាលតាង I_G ។ អាំងតេក្រាលទី២សូន្យ ដោយសារ z' កាត់តាមផ្ចិតម៉ាសមានន័យថា៖ $\int x'dm=\overline{x}\int dm=0$ ដោយសារ $\overline{x}=0$ ។ ជាបញ្ចប់អាំងតេក្រាលទី៣ តាងម៉ាសសរុប m នៃអង្គធាតុ។ ដូចនេះម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបអ័ក្ស z អាចសរសេរ៖ $I=I_G+md^2$ ដែល I_G ជាម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្ស z' កាត់តាមផ្ចិតម៉ាស G, m ជាម៉ាសអង្គធាតុ ហើយ d ជាចម្ងាយរវាងអ័ក្សស្រប។

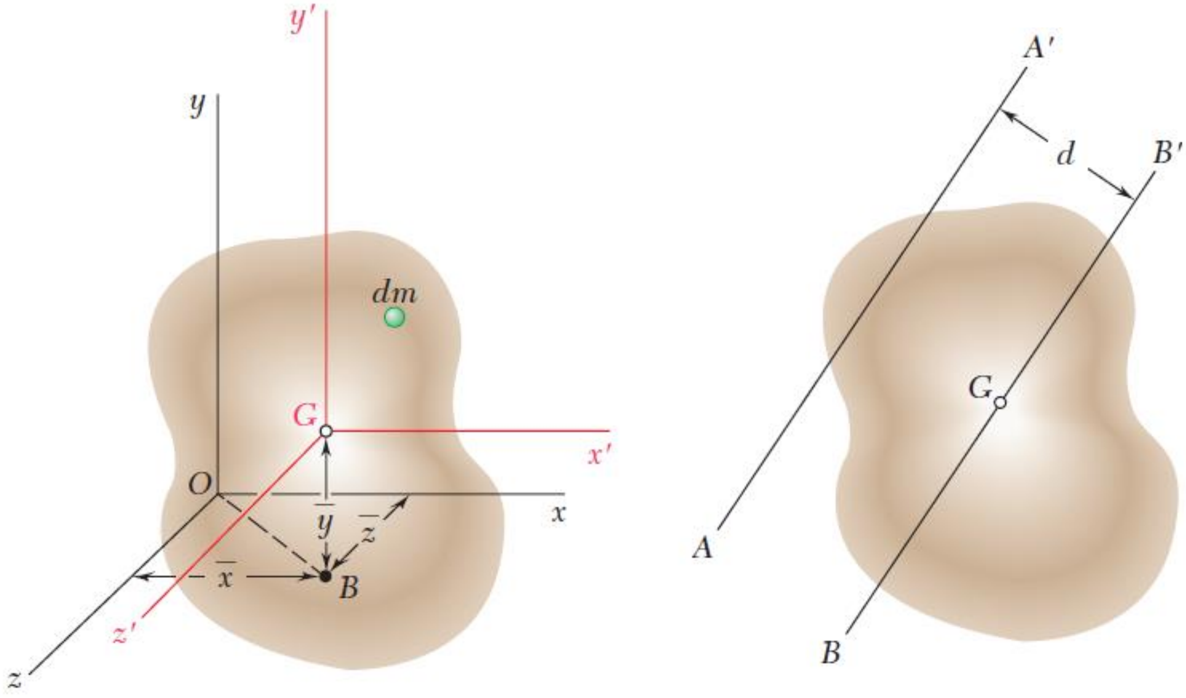
- កាំ Gyration

ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃអង្គធាតុធៀបនឹងអ័ក្សពិសេសត្រូវបានរាយការណ៍នៅក្នុងសៀវភៅនេះ ដោយប្រើកាំGyration ។ តម្លៃនេះមានខ្នាតដូចប្រវែង ហើយម៉ូម៉ង់និចលភាពត្រូវបានកំណត់៖

$$I=mk^2 \quad\Rightarrow\quad k=\sqrt{\frac{I}{m}}$$

ចំណាំ៖ k ស្រដៀង r ។

-អង្គធាតុសមាស៖ អង្គធាតុច្រើនវិលជុំវិញអ័ក្ស z ដូចគ្នា យើងបាន៖ $I=\Sigma\left(I_G+md^2\right)$

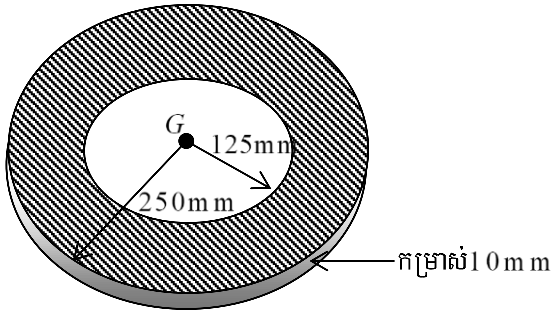


សំដែងម៉ូម៉ង់និចលភាពជាអនុគមន៍កាំ gyration ដែលទាក់ទង យើងអាចសរសេរ៖

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2$$

ដែល k និង k' តាងកាំ gyration នៃអង្គធាតុធៀប AA' និង BB' រៀងគ្នា។

ឧទាហរណ៍២៦៖ បើថាសមួយដូចរូបមានម៉ាសមាឌ 8000kg/m^3 និងកម្រាស់ 10mm ។ ចូរកំណត់ម៉ាសម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្សកែងទៅនឹងទំព័រសៀវភៅកាត់តាម O ។



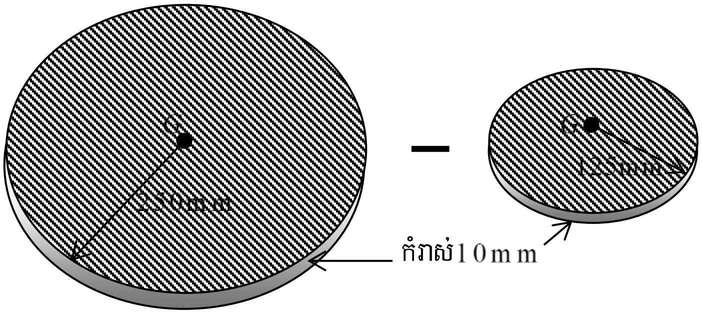
ដំណោះស្រាយ

ប្រើវិធីសមាស

- ថាស៖ ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្សកែងនឹងប្លង់ថាសគឺ៖

$I_G = \frac{1}{2}mr^2$ ។ ផ្ចិតម៉ាសនៃថាសគឺស្ថិតនៅចម្ងាយ 0.25m ពីចំណុច O។ ដូចនេះ៖

$$m_d = \rho_d V_d = 8000\text{kg/m}^3\left[\pi(0.25\text{m})^2(0.01\text{m})\right] = 15.71\text{kg}$$



$$(I_0)_d = \frac{1}{2}m_d r_d^2 + m_d d^2$$
$$= \frac{1}{2}(15.71\text{kg})(0.25\text{m})^2 + (15.71\text{kg})(0.25\text{m})^2$$
$$= 1.473\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

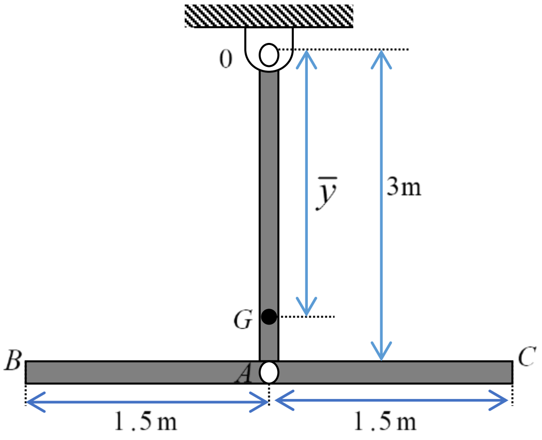
- រន្ធ៖ (ជាសមានកាំ125mm)

$$m_h = \rho_h V_h = 8000\text{kg/m}^3\left[\pi(0.125\text{m})^2(0.01\text{m})\right] = 3.93\text{kg}$$

$$(I_0)_h = \frac{1}{2}m_h r_h^2 + m_h d^2$$
$$= \frac{1}{2}(3.93\text{m})(0.125\text{m})^2 + (3.93\text{kg})(0.25\text{m})^2$$
$$= 0.276\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹង O គឺ៖ $I_0 = (I_0)_d - (I_0)_h = 1.473 - 0.276 = 1.20\text{kg}\cdot\text{m}^2$

ឧទាហរណ៍២៧៖ ប៉ោលមួយមានដងស្តើងពីរនីមួយៗមានម៉ាស 100kg ។ ចូរកំណត់ម៉ាសម៉ូម៉ង់និចលភាពរបស់ប៉ោលធៀបនឹងអ័ក្សកាត់តាម៖ ក. កន្លះ O ។ ខ. ផ្ចិតម៉ាស G នៃប៉ោល។



ដំណោះស្រាយ

ក. ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃដង $0A$ ធៀបទៅនឹងកាត់តាម O គឺ $I_0=\frac{1}{3}m\ell^2$ ។

$$(I_{0A})_0=\frac{1}{3}m.\ell^2=\frac{1}{3}\times 100\text{kg}\times(3\text{m})^2=300\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

ចំពោះដង BC យើងបាន៖

$$\begin{aligned}(I_{BC})_0&=\frac{1}{12}m\ell^2+md^2\\&=\frac{1}{12}(100\text{kg})(3\text{m})^2+(100\text{kg})(3\text{m})^2\\&=975\text{kg}\cdot\text{m}^2\end{aligned}$$

ដូចនេះ ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀប O គឺ៖

$$I_0=300+975=1275\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

ខ. ទីតាំងផ្ចិតម៉ាសធៀបចំនុច O ៖

$$\bar{y}=\frac{\Sigma\tilde{y}\,m}{\Sigma m}=\frac{1.5\text{m}\times 100\text{kg}+3\text{m}\times 100\text{kg}}{100\text{kg}+100\text{kg}}=2.25\text{m}$$

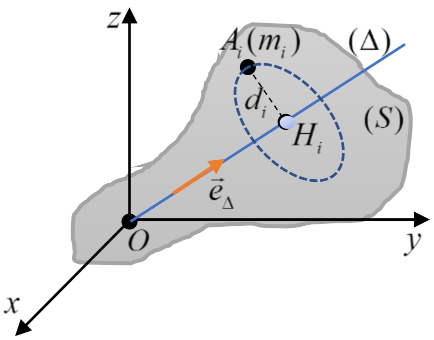
ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀប G ឱ្យដោយទំនាក់ទំនង៖

$$\begin{aligned}&I_0=I_G+md^2\\&\Leftrightarrow 1275\text{kg}\cdot\text{m}^2=I_G+(200\text{kg})(2.25\text{m})^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_G=262.5\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

10. ការីម៉ូម៉ង់និចលភាព និងម៉ាទ្រីសម៉ូម៉ង់និចលភាព

ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្សមួយ៖



$I_\Delta=\sum_i m_i d_i^2=\sum_i m_i|H_iA_i|^2$ ដែល $d_i=|H_iA_i|$ ជាចម្ងាយនៃម៉ាស m_i ទៅអ័ក្ស Δ ដូចរូប។ ចំពោះប្រព័ន្ធចំណុចរូបធាតុនៅជាប់ៗគ្នា(អង្គធាតុ)គឺ

$$I_\Delta=\int_V HA^2\rho dV$$

ដោយសំដែងនៅក្នុងប្រព័ន្ធ $\Re = 0xyz$ ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃអង្គធាតុធៀបអ័ក្ស Δ ដែលមានវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{e}_\Delta$ កាត់តាម O ដូចរូប៖

$$I_{O\Delta} = \sum_i m_i \left|H_i A_i\right|^2 = \sum_i m_i \left|\vec{e}_\Delta \times \overrightarrow{OA_i}\right|^2$$

ដោយកំណាត់កុំប៉ូសង់ $\vec{e}_\Delta$ និង $\overrightarrow{0A_i}$ ដោយ (α, β, γ) និង (x_i, y_i, z_i) រៀងគ្នា។ យើងបាន៖

$$I_{O\Delta} = \sum_i m_i \left[\left(\beta z_i - \gamma y_i\right)^2 + \left(\gamma x_i - \alpha z_i\right)^2 + \left(\alpha y_1 - \beta x_i\right)^2 \right]$$

យើងពន្លាតបាន $I_{O\Delta} = \alpha^2 I_{xx} + \beta^2 I_{yy} + \gamma^2 I_{zz} - 2\alpha\beta I_{xy} - 2\beta\gamma I_{yz} - 2\gamma\alpha I_{xz}$

ដោយ $I_{xx} = \sum_i m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right)$, $I_{yy} = \sum_i m_i \left(x_i^2 + z_i^2\right)$, $I_{zz} = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$

ជាម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្ស x, y, z រៀងគ្នា។

និង $I_{xy} = I_{yx} = \sum_i m_i x_i y_i$, $I_{xz} = I_{zx} = \sum_i m_i x_i z_i$, $I_{yz} = I_{zy} = \sum_i m_i y_i z_i$ ជាផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាព។

កន្សោមខាងលើ $I_{O\Delta}$ បានណែនាំការីម៉ូម៉ង់និចលភាព $[I]_O$ ដែលសំដែងនៅក្នុង $\Re$ ជាម៉ាទ្រីសការេ៖

$$[I]_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

ដោយ $\vec{e}_\Delta = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ វ៉ិចទ័រ $[I]_0 \vec{e}_\Delta$ អាចសំដែង៖

$$[I]_0 \vec{e}_\Delta = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha I_{xx} - \beta I_{xy} - \gamma I_{xz} \\ -\alpha I_{xy} + \beta I_{yy} - \gamma I_{yz} \\ -\alpha I_{xz} - \beta I_{yz} + \gamma I_{zz} \end{bmatrix}$$

ម៉ូម៉ង់និចលភាព $I_{0\Delta}$ អាចត្រូវបានចាត់ទុកដូចផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{e}_\Delta$ និងវ៉ិចទ័រ $[I]_O \vec{e}_\Delta$ ដែលទទួលបានដោយអំពើនៃ $[I]_O$ លើ $\vec{e}_\Delta$ ត្រូវបានហៅថា ការីម៉ូម៉ង់និចលភាព ឬ tensor និចលភាព៖

$$I_{O\Delta} = \vec{e}_\Delta \cdot [I]_O \vec{e}_\Delta$$

ប្រព័ន្ធមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី នោះផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាពសូន្យ $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$ ។

ការីម៉ូម៉ង់និចលភាពមេ (ធៀបអ័ក្សមេ)៖ $[I]_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$

ទ្រឹស្តី Huygens-Schteiner

ម៉ាទ្រីសនៃម៉ូម៉ង់និចលភាពអាស្រ័យនឹងគល់តម្រុយដែលជ្រើសរើស។ យើងសិក្សាបម្លែងកិលអ័ក្សនៃតម្រុយចាស់ 0xyz និងតម្រុយថ្មី 0′x′y′z′ ដូចរូប។ ដោយយក a, b, c ជាកូអរដោនេនៃ 0′ នោះ៖

$$I_{xx}=\sum_i m_i\left(y_i^2+z_i^2\right)=\sum_i m_i\left[\left(y'_i+b\right)^2+\left(z'_i+c\right)^2\right]=I_{0'x'}+M(b^2+c^2)+2b\sum_i m_i y'_i+2c\sum_i m_i z'_i$$

ដោយ $I_{0'x'}=\sum_i m_i\left(y'^2_i+z'^2_i\right)$

និង $I_{yy}=\sum_i m_i\left(x_i^2+z_i^2\right)=\sum_i m_i\left[\left(x'_i+a\right)^2+\left(z'_i+c\right)^2\right]=I_{0'y'}+M(a^2+c^2)+2a\sum_i m_i x'_i+2c\sum_i m_i z'_i$

ដោយ $I_{0'y'}=\sum_i m_i\left(x'^2_i+z'^2_i\right)$

ហើយ

$$I_{zz}=\sum_i m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)=\sum_i m_i\left[\left(x'_i+a\right)^2+\left(y'_i+b\right)^2\right]=I_{0'z'}+M(a^2+b^2)+2a\sum_i m_i x'_i+2b\sum_i m_i y'_i$$

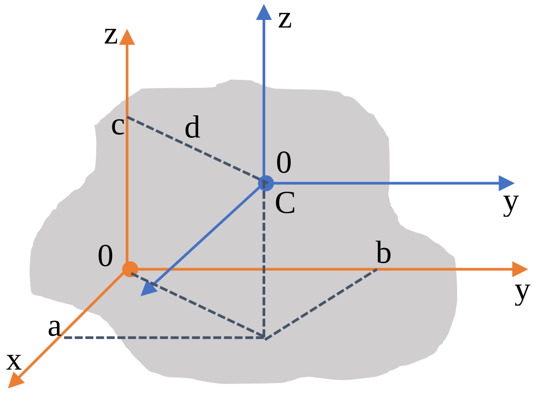
ដោយ $I_{0'z'}=\sum_i m_i\left(x'^2_i+y'^2_i\right)$

ចំពោះផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាព៖

$$I_{xy}=\sum_i m_i x_i y_i=\sum_i m_i\left[\left(x'_i+a\right)\left(y'_i+b\right)\right]$$

$$I_{xz}=\sum_i m_i x_i z_i=\sum_i m_i\left[\left(x'_i+a\right)\left(z'_i+c\right)\right]$$

$$I_{yz}=\sum_i m_i y_i z_i=\sum_i m_i\left[\left(y'_i+b\right)\left(z'_i+c\right)\right]$$



ចំណាំ៖ បើ 0′ ត្រួតជាមួយផ្ចិតម៉ាសនៃប្រព័ន្ធ នោះតួ $\sum_i m_i x'_i, \sum_i m_i {}'_i, \sum_i m_i z'_i$ សូន្យ។

យើងបាន៖

$$I_{xx}=I_{Cx'}+M(b^2+c^2),\ \ I_{xy}=I_{x'y'}+Mab$$

$$I_{yy}=I_{Cy'}+M(a^2+c^2),\ \ I_{yz}=I_{y'z'}+Mbc$$

$$I_{zz}=I_{Cz'}+M(a^2+b^2),\ \ I_{xz}=I_{x'z'}+Mac$$

ម៉ូម៉ង់និចលភាព

យើងអាចកំណត់ចំណុចនឹង O នៃ $\Re$ ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធកំណត់ដោយ៖

$$\vec{L}_O = \int \overrightarrow{OA} \times \vec{v} dm = \int_V \overrightarrow{OA} \times \rho \vec{v} dV$$

បើ O′ ជាចំណុចនឹងមួយទៀតក្នុង $\Re$ យើងបានទំនាក់ទំនងរវាងម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចធៀប O និង O′ ៖

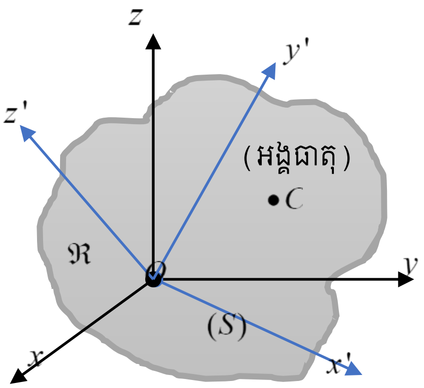
$$\vec{L}_O = \int_V \left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}\right) \times \rho \vec{v} dV = \int_V \overrightarrow{OO'} \times \rho \vec{v} dV + \int_V \overrightarrow{OO'A} \times \rho \vec{v} dV$$

$$= \overrightarrow{OO'} \times \int_V \rho \vec{v} dV + \vec{L}_{0'}$$

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OO'} \times \vec{P} + \vec{L}_{O'}$$

ករណីអង្គធាតុរឹងវិលជុំវិញចំណុចនឹង O បរិមាណចលនា៖

$$\vec{P} = M\,\vec{v}_C = M\left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OC}\right)$$



ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចធៀប O ៖

$$\vec{L}_0 = \int_V \overrightarrow{OA} \times \rho \vec{v} dV = \int_V \overrightarrow{OA} \times \rho\left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA}\right) dV$$

ឬ $$\vec{L}_O = \int_V \rho dV \left[\left(\overrightarrow{OA}^2 \vec{\omega}\right) - \overrightarrow{OA} \cdot \left(\overrightarrow{OA} \cdot \vec{\omega}\right)\right]$$

កុំប៉ូសង់ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច៖

$$L_{Ox} = \int_V \rho dV \left[\omega_x\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - x\left(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z\right)\right]$$

$$L_{Ox} = \int_V \rho dV \left[\omega_x (y^2 + z^2) - xy\omega_y - xz\omega_z\right]$$

$$= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z$$

គណនាដូចគ្នាចំពោះកុំប៉ូសង់ពីរទៀត។ ដូចនេះម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចអាចសរសេរ៖

$$\vec{L}_O = [I]_0 \vec{\omega} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

ករណីទូទៅ $\vec{L}_O = \overrightarrow{OC} \times \vec{P} + [I]_C \vec{\omega}$

ការប្តូរតម្រុយ

គេឱ្យតម្រុយនឹង $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ និងតម្រុយ $\Re'(O,\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ ដោយវិលធៀបទៅនឹងតម្រុយនឹងនេះ។ ដោយសារម៉ាទ្រីសឆ្លង យើងអាចសំដែងម៉ូម៉ង់និចលភាពនៅក្នុងតម្រុយមួយនៃតម្រុយទាំងពីរ ហើយទាញរកនៅក្នុងតម្រុយមួយទៀតនិងច្រាសមកវិញ។ យើងអាចសរសេរ៖

$$\begin{pmatrix}\vec{i}'\\ \vec{j}'\\ \vec{k}'\end{pmatrix} = P_{\Re'\to\Re}\begin{pmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{pmatrix} = P_{\Re\to\Re'}\begin{pmatrix}\vec{i}'\\ \vec{j}'\\ \vec{k}'\end{pmatrix} \text{ ដោយ } P_{\Re\to\Re'} = P^T_{\Re'\to\Re}$$

ម៉ាទ្រីសឆ្លង(បញ្ជូន)ពី $\Re$ ទៅ $\Re'$ កំណត់ដោយ៖ $P_{\Re\to\Re'}$ អាចទាញបានម៉ាទ្រីសនិចលភាពនៃអង្គធាតុនៅក្នុងតម្រុយ $\Re'$ ដោយស្គាល់នៅក្នុងតម្រុយ $\Re$ និងច្រាសមកវិញ។

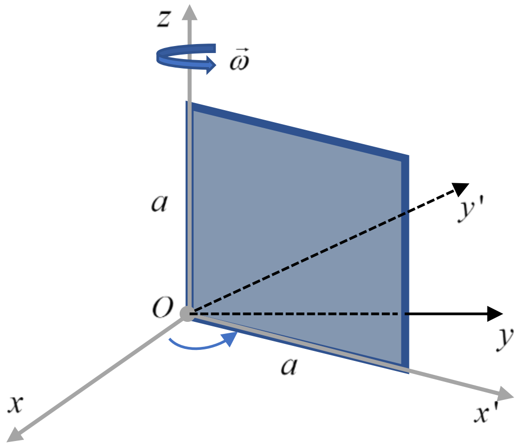
$$I_O(S)_{/\Re'} = P^T_{\Re\to\Re'}\cdot I_O(S)_{/\Re}\cdot P_{\Re\to\Re'}$$

$$I_O(S)_{/\Re} = P^T_{\Re'\to\Re}\cdot I_O(S)_{/\Re'}\cdot P_{\Re'\to\Re}$$

ឧទាហរណ៍២៨៖ ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៃបន្ទះការេវិលជុំវិញអ័ក្ស Oz។

ក. គណនាដោយផ្ទាល់៖

$$\vec{L}_O = \int \overrightarrow{OA}\times\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{OA}\right)\rho_s dx'dz'$$
$$= \int\left(x'\vec{i}'+z'\vec{k}\right)\times\left(\omega x'\vec{j}'\right)\rho_s dx'dz'$$



$$\vec{L}_O = \rho_s\omega\vec{k}\int_0^a\int_0^a\int_0^a x'^2\,dx'dz' - \rho_s\omega\vec{i}'\int_0^a\int_0^a x'z'dx'dz'$$

ដោយធ្វើអាំងតេក្រាល៖

$$\int_0^a\int_0^a x'^2\,dx'dz = \frac{a^4}{3} \text{ និង } \int_0^a\int_0^a x'zdx'dz = \frac{a^4}{4}$$

ដោយ $M = \rho_s a^2$ យើងទទួលបាន៖

$$\vec{L}_O = \rho_s\omega\left(\frac{a^4}{3}\vec{k} - \frac{a^4}{4}\vec{i}'\right) = \frac{Ma^2}{3}\vec{k} - \frac{Ma^2}{4}\omega\vec{i}'$$

ខ. គណនាតាមការីម៉ូម៉ង់និចលភាព៖

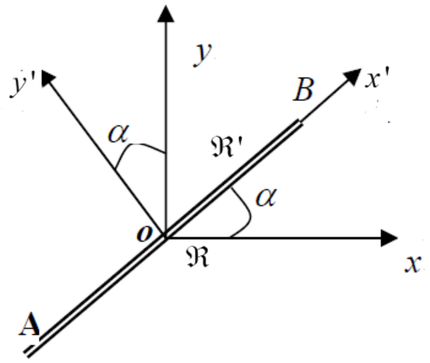
ដោយសារ Oy′ ជាអ័ក្សស៊ីមេទ្រី នោះ $I_{y'z} = I_{x'y'} = 0$

យើងបាន៖

$$\vec{L}_O=[I]_O\,\vec{\omega}=\begin{bmatrix} I_{0x'} & 0 & -I_{x'z} \\ 0 & I_{0y'} & 0 \\ -I_{x'z} & 0 & I_{0z}\end{bmatrix}_{\Re'}\begin{bmatrix}0\\0\\ \omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-I_{x'z}\omega\\ 0\\ I_{0z}\omega\end{bmatrix}_{\Re'}$$

ដោយ $I_{Oz}=\int_0^a\int_0^a x'^2\rho_s dx'dz=\dfrac{Ma^2}{3}$ និង $I_{x'z}=\int_0^a\int_0^a x'z\rho_s dx'dz=\dfrac{Ma^2}{4}$

ឧទាហរណ៍២៩៖ ចូរកំណត់ម៉ាទ្រីសនិចលភាពនៃរបារ AB មានប្រវែង L ម៉ាស m នៅក្នុងតម្រុយ $\Re'(O,\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ ដោយវិលធៀបទៅនឹងតម្រុយ $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ នៅនឹង។ ចូរទ្រាកម៉ាទ្រីសនិចលភាពនៅក្នុងតម្រុយ $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។



ដំណោះស្រាយ

យើងកំណត់ម៉ាទ្រីសនិចលភាពនៃរបារនៅក្នុងតម្រុយ $\Re'(O,\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ ។ យើងបាន៖

$$dm=\lambda dx',\; y'=0, z'=0 \;\;\Rightarrow\;\; I_{x'y'}=I_{x'z'}=I_{y'z'}=0 \;\text{ និង }\; I_{x'x'}=0$$

$$I_{y'y'}=I_{z'z'}=\int_{(S)}x'^2\,dm=\int_{-L/2}^{+L/2}x'^2\,\lambda dx'=\frac{1}{12}mL^2$$

$$\Rightarrow\;\; I_O(S)_{/\Re'}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{12}mL^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{12}mL^2\end{bmatrix}_{\Re'}$$

យើងកំណត់ម៉ាទ្រីសឆ្លងពី $\Re'$ ទៅ $\Re$ ដោយសំដែងវ៉ិចទ័រឯកតានៃ $\Re'$ ជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រឯកតានៃ $\Re$ ៖

$$\begin{cases} \vec{i}\,' = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j} + 0\vec{k} \\ \vec{j}\,' = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j} + 0\vec{k} \\ \vec{k}\,' = 0\vec{i} + 0\,\vec{j} + 1\vec{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{i}\,' \\ \vec{j}\,' \\ \vec{k}\,' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

ដោយ $P_{\Re'\to\Re} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ និង $P_{\Re\to\Re'} = P^T_{\Re\to\Re'} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ម៉ាទ្រីសនិចលភាពនៅក្នុងតម្រុយ $\Re$ ស្មើនឹង៖ $I_O(S)_{/\Re} = P^T_{\Re'\to\Re} \cdot I_O(S)_{/\Re'} P_{\Re'\to\Re}$

$$\Rightarrow \quad I_O(S)_{/\Re} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}mL^2 \end{bmatrix}_{\Re'} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_O(S)_{/\Re} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}mL^2\sin^2\alpha & -\frac{1}{12}mL^2\sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ -\frac{1}{12}mL^2\sin\alpha\cos\alpha & \frac{1}{12}mL^2\cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}mL^2 \end{bmatrix}$$

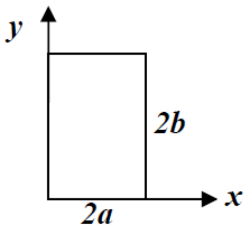
ឧទាហរណ៍៣០៖ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបចំណុច O នៃបន្ទះចតុកោណកែងស្តើងមានម៉ាស m ទទឹង 2a និងបណ្តោយ 2b ហើយផ្ចិតនិចលភាព G(a,b,0)។

ដំណោះស្រាយ

យើងកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀប G បន្ទាប់ប្រើទ្រឹស្តីអក្ស័ស្របដើម្បីទាញរកម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀប O ។

ប្លង់(xGz)និង(yGz)ជាប្លង់ស៊ីមេទ្រី ដូចនេះគ្រប់ផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាពគឺសូន្យ៖

$I_{Gxy} = I_{Gxz} = I_{Gyz} = 0$ ម៉ាទ្រីសម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀប G គឺអង្កត់ទ្រូង។



ម៉ាសបន្ទះ៖ $m = \sigma 4ab$

យើងបានប្លង់សូលីដ: $z = 0 \Rightarrow I_{Gzz} = I_{Gxx} + I_{Gyy}$

$$I_{Gxx} = \int y^2 dm = \int y^2 \sigma ds = \sigma \int y^2 dxdy = \sigma \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b}^{+b} y^2 dy = \frac{1}{3}mb^2$$

$$I_{Gyy}=\int x^2dm=\int x^2\sigma ds=\sigma\int x^2dxdy=\sigma\int_{-a}^{+a}x^2dx\int_{-b}^{+b}dy=\frac{1}{3}ma^2$$

$$I_{Gzz}=I_{Gxx}+I_{Gyy}=\frac{1}{3}m(a^2+b^2)$$

ម៉ាទ្រីសនិចលភាពធៀប G ត្រូវបានសរសេរ៖

$$I_G(S)=\begin{vmatrix}\frac{mb^2}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{m}{3}(a^2+b^2)\end{vmatrix}$$

តាមទ្រឹស្តីបទ្ទាត់ស្រប (Huygens)

$$I_{0xx}=\frac{mb^2}{3}+mb^2=\frac{4}{3}mb^2\ ,\quad I_{0yy}=\frac{ma^2}{3}+ma^2=\frac{4}{3}ma^2$$

$$I_{0zz}=\frac{m}{3}(a^2+b^2)+m(a^2+b^2)=\frac{4}{3}m(a^2+b^2)$$

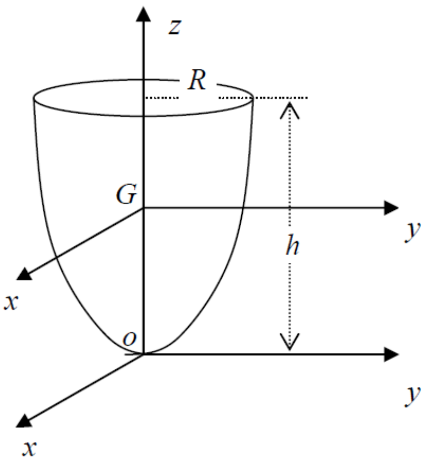
$$I_{0xy}=0+mab=mab,\ I_{0xz}=0+ma\cdot 0=0,\ I_{0yz}=0+mb\cdot 0=0$$

ដូចនេះ ម៉ាទ្រីសម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀប O គឺ

$$I_G(S)=\begin{vmatrix}\frac{4mb^2}{3} & -mab & 0\\ -mab & \frac{4ma^2}{3} & 0\\ 0 & 0 & 4\frac{m}{3}(a^2+b^2)\end{vmatrix}$$

ឧទាហរណ៍៣១៖ សូលីដស្មើសាច់មួយមានម៉ាសមាឌ ρ (មានរាងជាប៉ារ៉ាបូលអ៊ីត)ដោយកើតពីការរង្វង់ផ្ទៃប៉ារ៉ាបូលជុំវិញអ័ក្ស $0z$។

សមីការប៉ារ៉ាបូលកំណត់ផ្ទៃនេះឱ្យដោយ៖ $z=\frac{h}{R^2}y^2$ ។



ក. ចូរបង្ហាញថាម៉ាសនៃសូលីដគឺ $M=\frac{1}{2}\rho\pi R^2h$ ។

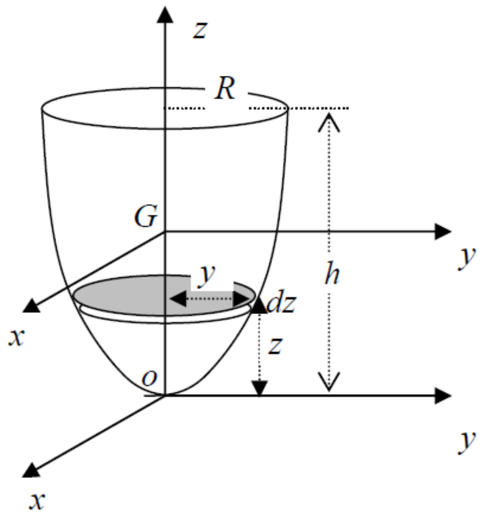
ខ. ចូរកំណត់ម៉ាទ្រីសម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀប O ។

គ. គណនាម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀប G តាមអ័ក្ស Gx៖ I_{Gx} ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ម៉ាសសូលីដ

យើងពិនិត្យធាតុនៃមាឌ $dV = sdz = \pi y^2 dz$



ម៉ាសសូលីដស្មើនឹង

$$M = \rho\int dV = \rho\int \pi y^2 dz = \rho\int_0^h \frac{R^2}{h} zdz = \frac{1}{2}\rho\pi R^2 h$$

ខ. ម៉ាទ្រីសម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀប O ៖

សូលីដអ័ក្សបរិវត្ត Oz ដូចនេះអ័ក្ស Ox និង Oy ដើរតួដូចគ្នា

យើងបាន៖ $I_{0xx} = I_{0yy}$

$$I_{0xx} = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$= \int_0^h \left(\frac{R^2}{h} z + z^2\right) \rho\pi y^2 dz$$

$$= \int_0^h \left(\frac{R^2}{h} z + z^2\right) \rho\pi \frac{R^2}{h} zdz = \rho\pi R^2 h \left[\frac{R^2}{3} + \frac{h^2}{4}\right]$$

$$I_{0xx} = 2M\left[\frac{R^2}{3} + \frac{h^2}{4}\right] = \frac{M}{6}(4R^2 + 3h^2)$$

$$I_{0zz} = \int (x^2 + y^2) dm = \int (x^2 + y^2 + z^2 - z^2) dm = \int (x^2 + z^2) dm + \int y^2 dm - \int z^2 dm$$

$$I_{0zz} = I_{0yy} + \int y^2 \rho\pi y^2 dz - \int z^2 \rho\pi y^2 dz = I_{0yy} + \rho\pi\int \frac{R^4}{h^2} z^2 dz - \rho\pi\int \frac{R^2}{h} z^3 dz$$

$$I_{0zz} = I_{0yy} + \frac{M}{6}(4R^2 - 3h^2) = \frac{4}{3}MR^2$$

ដូចនេះ ម៉ាទ្រីសម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀប O គឺ

$$I_0(S) = \begin{vmatrix} \frac{M}{6}(4R^2 + 3h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{6}(4R^2 + 3h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}MR^2 \end{vmatrix}$$

គ. ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបG តាមអ័ក្ស Gx ៖ I_{Gx}

យើងប្រើទ្រឹស្តីបទ្ទាត់ស្រប(Huygens) កាត់ចំណុច O)ចំណុច G ៖

$$I_{0xx} = I_{Gxx} + m\,d^2 \Rightarrow I_{Gx} = I_{0xx} - M\,d^2$$

ដោយ $0z$ ជាអ័ក្សបរិវត្ត នោះ G ស្ថិតនៅលើអ័ក្សនោះ ដែល៖

$$x_G = y_G = 0 \quad \text{និង} \quad z_G = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

$$z_G = \frac{1}{M}\int z\rho\pi y^2 dz = \frac{\rho\pi R^2}{Mh}\int_0^h z^2 dz = \frac{2h}{3}$$

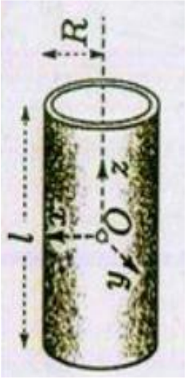
ទាញបាន៖ $$I_{Gxx} = I_{0xx} - M(y_G^2 + z_G^2) = \frac{M}{6}\left(4R^2 + \frac{h^2}{3}\right)$$

រូបមន្តម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃអង្គធាតុខ្លះៗ

ស៊ីឡាំងប្រហោង

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}M\,l^2$$

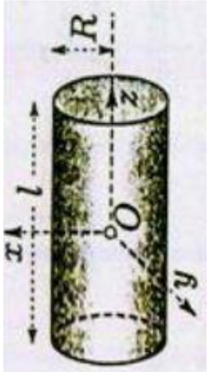
$$I_3 = MR^2$$



ស៊ីឡាំងតាន់(ស្មើសាច់)

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}M\,l^2$$

$$I_3 = \frac{1}{2}MR^2$$

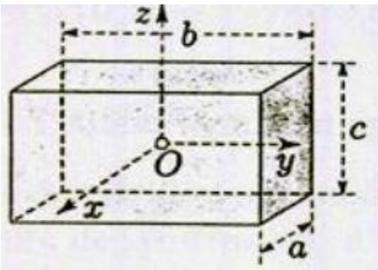


ប្រលេពីប៉ែតកែង(ស្មើសាច់)

$$I_1 = \frac{1}{12}M(b^2 + c^2)$$

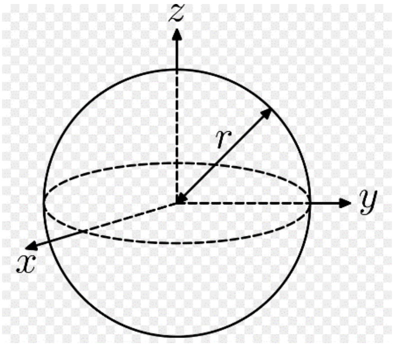
$$I_2 = \frac{1}{12}M(a^2 + c^2)$$

$$I_3 = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$



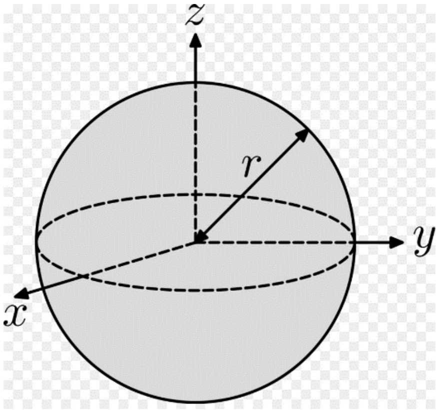
ស្វ៊ែប្រហោង

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{3} M\,r^2$$



ស្វ៊ែតាន់

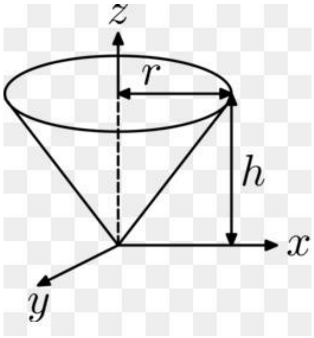
$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5} M\,r^2$$



កោនប្រហោង

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4} M\,r^2 + \frac{1}{2} M\,h^2$$

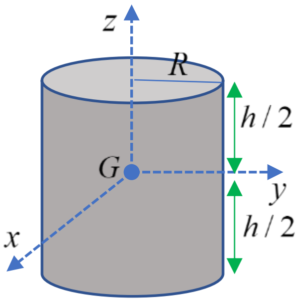
$$I_3 = \frac{1}{2} M\,r^2$$



តារាងសង្ខេបម៉ាទ្រីសម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃអង្គធាតុខ្លះៗ

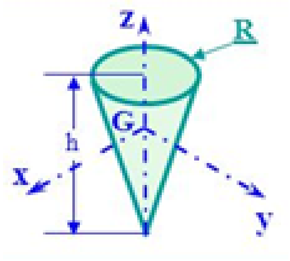
- ស៊ីឡាំងស្មើសាច់

$$I_G = \begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}$$



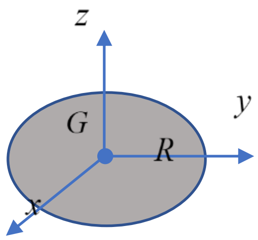
- ថាសស្មើសាច់

$$I_G = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}$$



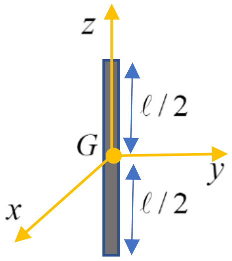
- កោនស្មើសាច់

$$I_G = \begin{bmatrix} \frac{3m}{20}\left(R^2+\frac{h^2}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3m}{20}\left(R^2+\frac{h^2}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3mR^2}{10} \end{bmatrix}$$



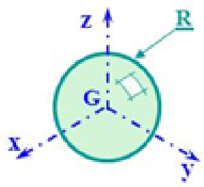
- របារស្មើសាច់

$$I_G = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



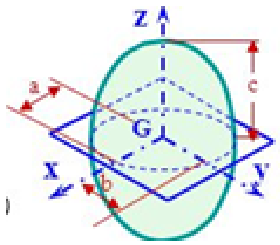
- ស្វ៊ែរស្មើសាច់

$$I_G = \begin{bmatrix} \frac{2mR^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2mR^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2mR^2}{5} \end{bmatrix}$$



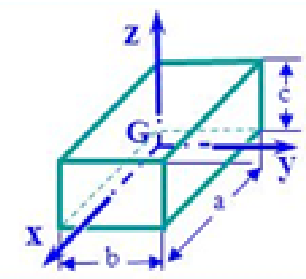
- អេលីបស្មើសាច់

$$I_G = \begin{bmatrix} \frac{m}{5}\left(b^2+c^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{5}\left(a^2+c^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{5}\left(a^2+b^2\right) \end{bmatrix}$$



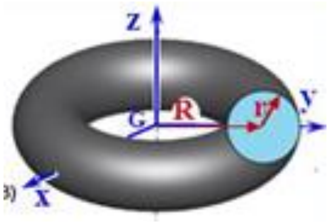
- ប្រលេពីប៉ែតកែងស្មើសាច់

$$I_G = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}\left(b^2+c^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}\left(a^2+c^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right) \end{bmatrix}$$



- កងមានគិតកម្រាស់ស្មើសាច់

$$I_G = \begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{2}+\frac{5r^2}{8}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{2}+\frac{5r^2}{8}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\left(R^2+\frac{3r^2}{4}\right) \end{bmatrix}$$

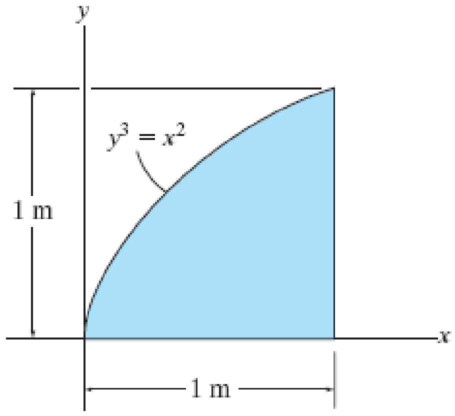


☞ សង្ខេបមេរៀន

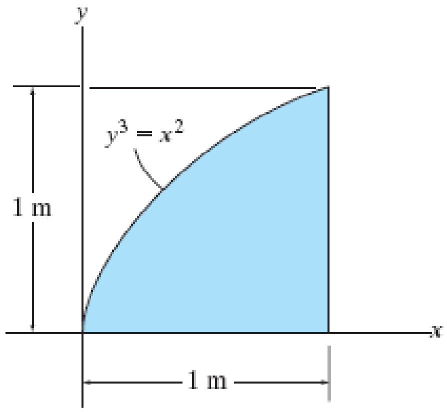
- ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃ៖ $I_x = \int_A y^2 dA,\ I_y = \int_A x^2 dA$ និង $I_z = \int_A (x^2+y^2)dA$
- ម៉ូម៉ង់និចលភាពប៉ូលធៀបនឹងអ័ក្សកែងទៅនឹងប្លង់ (xy) និងកាត់តាមប៉ូល O (អ័ក្ស z)៖ $J_0 = \bar{J}_C + A\cdot d^2$
- កាំ Gyration នៃផ្ទៃ៖ $k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$, $k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$, $k_0 = \sqrt{\frac{I_0}{A}}$
- ផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃ៖ $I_{xy} = \int_A xy\, dA$
- ទ្រឹស្តីបន្ទាត់ស្របនៃផ្ទៃ យើងបាន៖ $I_x = \bar{I}_{x'} + A\cdot d_y^2$, $I_y = \bar{I}_{y'} + A\cdot d_x^2$
  ចំពោះម៉ូម៉ង់និចលភាពប៉ូលធៀបនឹងអ័ក្សកែងទៅនឹងប្លង់ (xy) និងកាត់តាមប៉ូល O (អ័ក្ស z)
  $J_0 = \bar{J}_C + A\cdot d^2$
- រង្វង់ Mohr សមីការអាចត្រូវបានសរសេរនៅក្នុងទម្រង់៖ $(I_u - a)^2 + I_{uv}^2 = R^2$, $R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$
  R តាងឱ្យកាំរង្វង់ដែលមានផ្ចិតនៅត្រង់ចំណុច $(a,0)$ ដែល $a = \frac{I_x + I_y}{2}$ ។
- ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាស $I = \int_m r^2 dm$
- ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាសធៀបទៅនឹងអ័ក្ស x និង y ៖ $I_x = \int (y^2+z^2)dm$, $I_y = \int (x^2+z^2)dm$
- ទ្រឹស្តីបន្ទាត់ស្របឬ ទ្រឹស្តី Huygens ៖ $I = I_G + md^2$
- ការីម៉ូម៉ង់និចលភាព៖ $[I]_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$
- ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច៖ $\vec{L}_O = [I]_0\,\vec{\omega} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$ ឬ $\vec{L}_O = \overrightarrow{OC} \times \vec{P} + [I]_C\,\vec{\omega}$

ចំណោទ

១. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃបំបែកផ្ទៃជៀបនឹងអ័ក្ស x ។



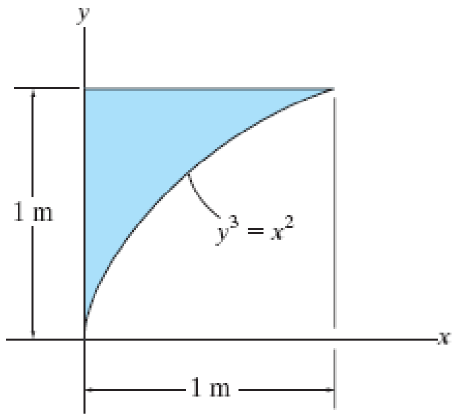
(លំហាត់១)



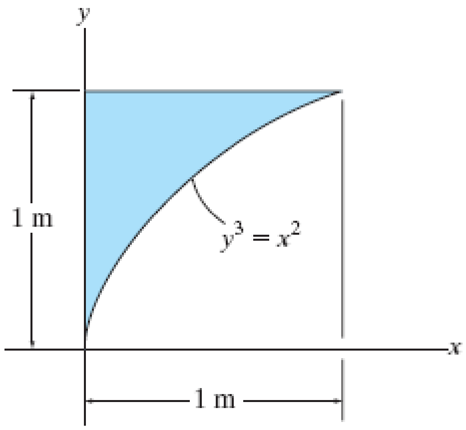
(លំហាត់២)

២. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃបំបែកផ្ទៃជៀបនឹងអ័ក្ស y ។

៣. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃបំបែកផ្ទៃជៀបនឹងអ័ក្ស x ។



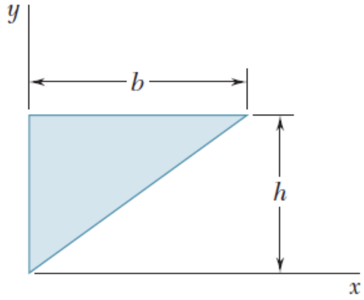
(លំហាត់៣)



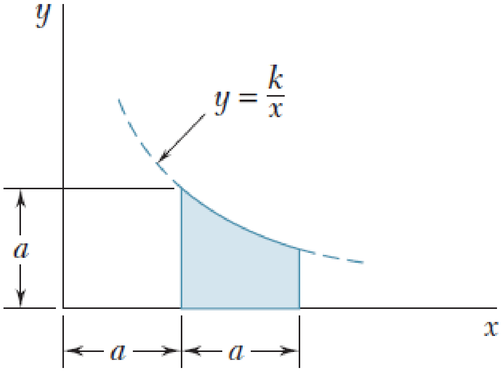
(លំហាត់៤)

៤. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃបំបែកផ្ទៃជៀបនឹងអ័ក្ស y ។

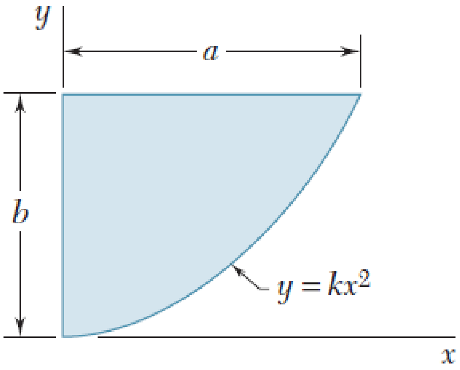
៥. គណនាម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃក្រឡាផ្ទៃវិលជុំវិញអ័ក្ស y ។



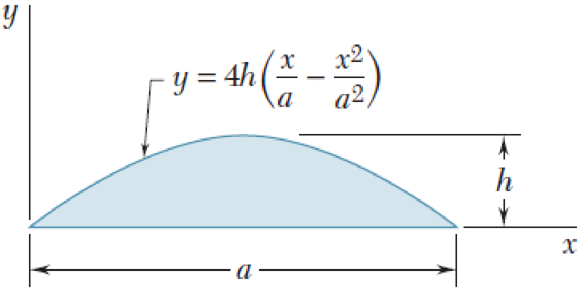
៦. គណនាម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃក្រឡាផ្ទៃវិលជុំវិញអ័ក្ស x ។



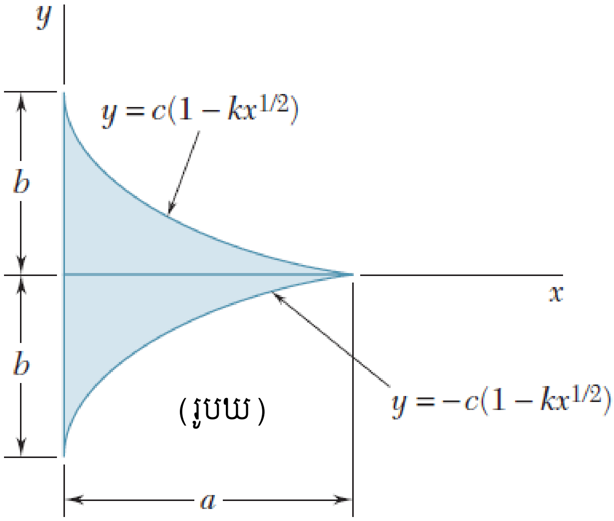
(រូបក)



(រូបខ)

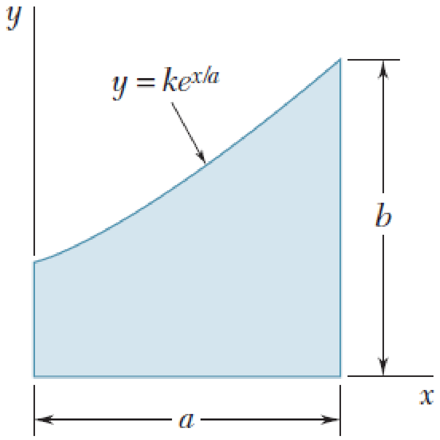


(រូបគ)

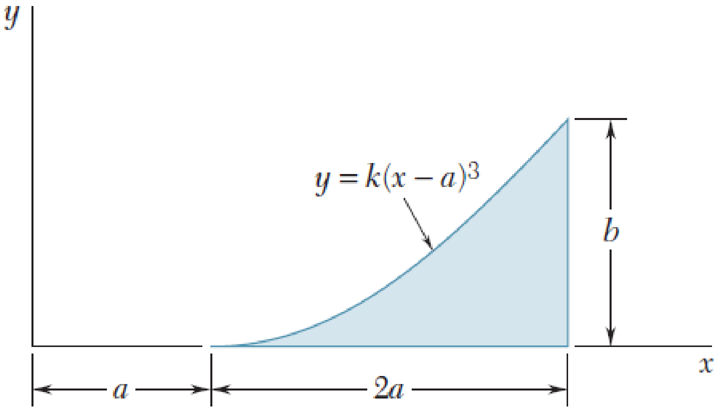


(រូបឃ)

៧. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃផាត់វិលជុំវិញអ័ក្ស y ។

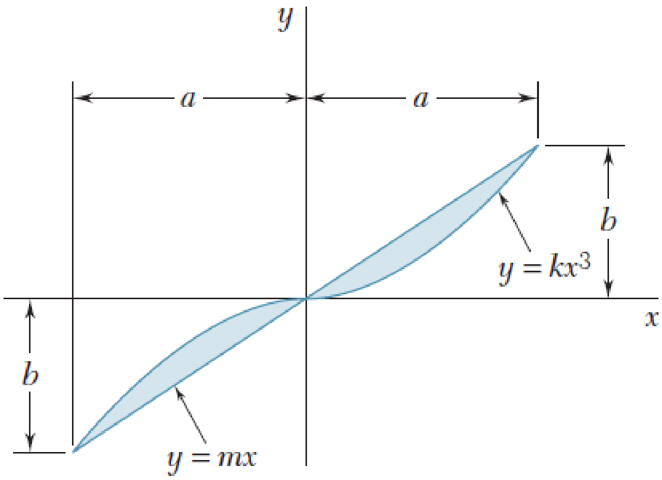


(រូបក)

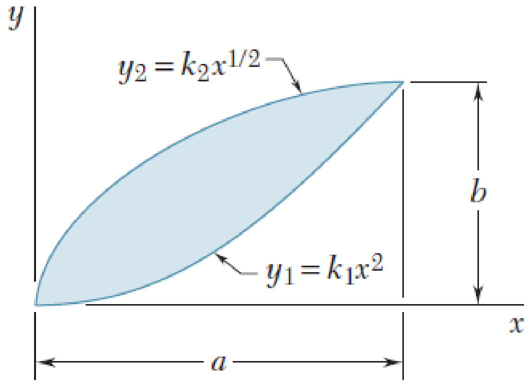


(រូបខ)

៨. ចូរគំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាព និងកាំ gyration នៃផ្ទៃផាត់ដូចបង្ហាញ ធៀបទៅនឹងអ័ក្ស x ។



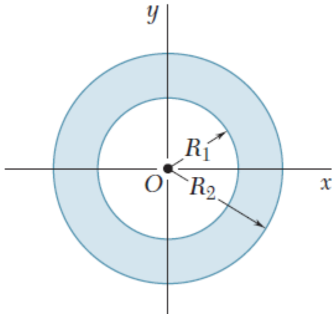
(រូបក)



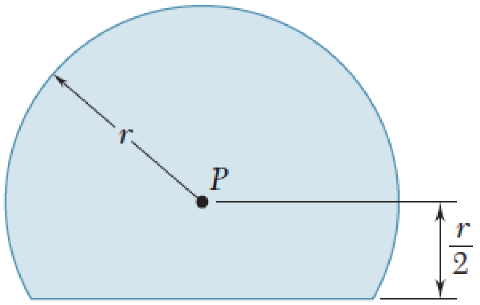
(រូបខ)

៩. ក. ចូររកម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃកងធៀបនឹង O។

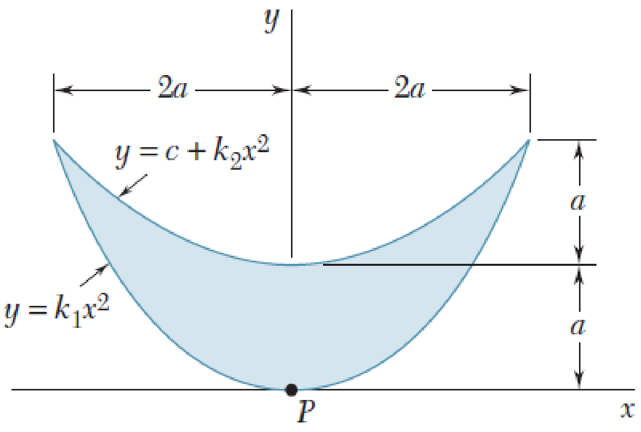
ខ. ដោយប្រើលទ្ធផលសំណួរ-ក ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃធៀបទៅនឹងអ័ក្ស x ។



១០. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាព និងកាំ gyration នៃផ្ទៃធៀបទៅនឹងចំណុច P ។

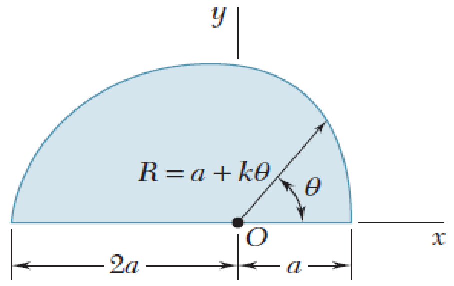


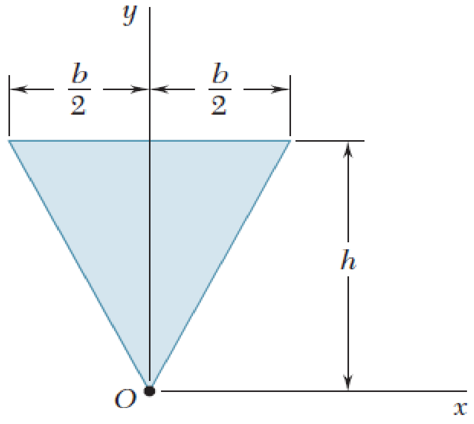
(រូបក)



(រូបខ)

១១. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាព និងកាំ gyration នៃផ្ទៃធៀបទៅនឹងចំណុច O ។

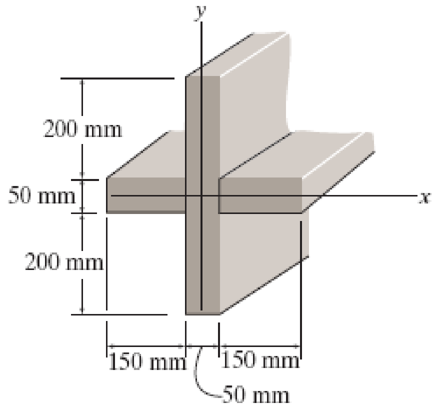


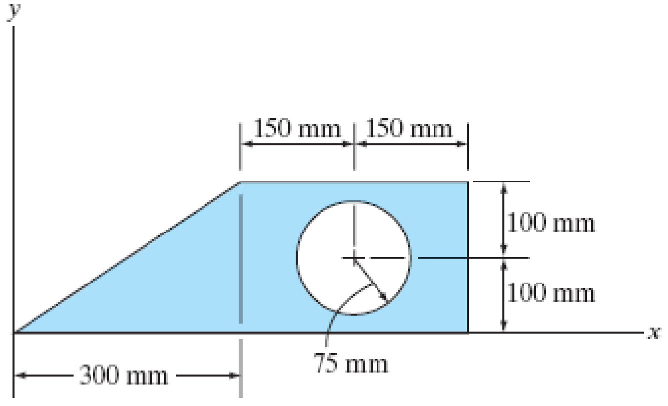


(លំហាត់១១) (លំហាត់១២)

១២. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាព និងកាំ gyration នៃផ្ទៃត្រីកោណសមបាតធៀបទៅនឹងចំណុច P ។

១៣. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃបាច់ផ្ទៃមានមុខកាត់ផ្ទៃធៀបនឹងអ័ក្សសង់ត្រូអ៊ីត x និង y ។

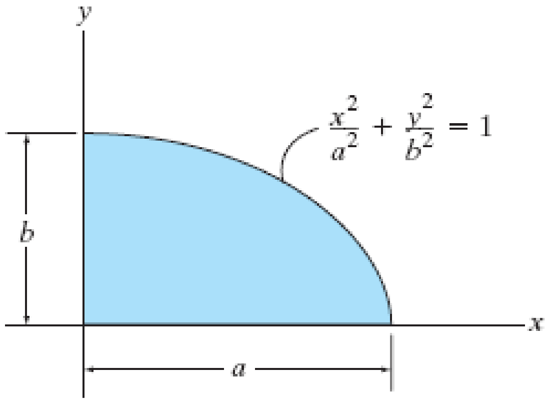


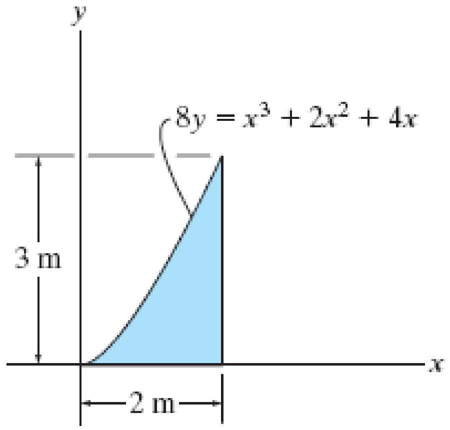


(លំហាត់១៣) (លំហាត់១៤)

១៤. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃសមាសធៀបនឹងអ័ក្ស y ។

១៥. ចូរកំណត់ផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃមួយភាគបួននៃផ្ទៃអេលីបធៀបនឹងអ័ក្ស x និង y ។

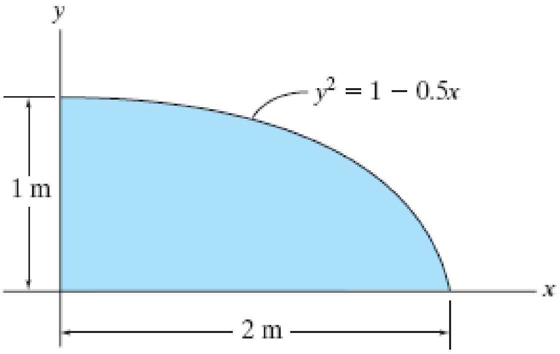




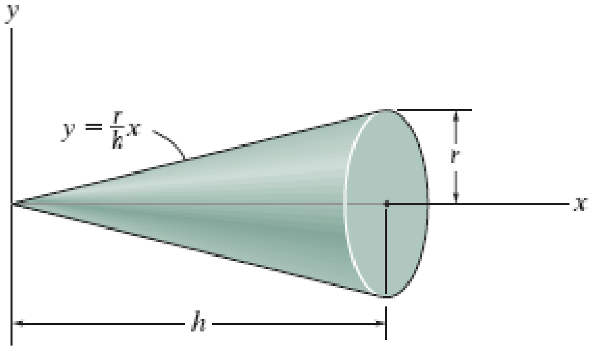
(លំហាត់១៥) (លំហាត់១៦)

១៦. ចូរកំណត់ផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃមួយភាគបួននៃផ្ទៃអេលីបធៀបនឹងអ័ក្ស x និង y ។

១៧. ចូរកំណត់ផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃមួយភាគបួននៃផ្ទៃអេលីបធៀបនឹងអ័ក្ស x និង y ។



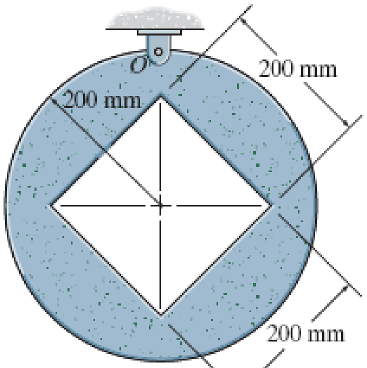
(លំហាត់១៧)



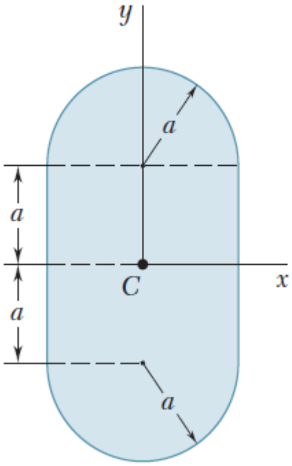
(លំហាត់១៨)

១៨. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាស I_x នៃកោន។ កោនមានម៉ាសមាឌថេរ ρ ។

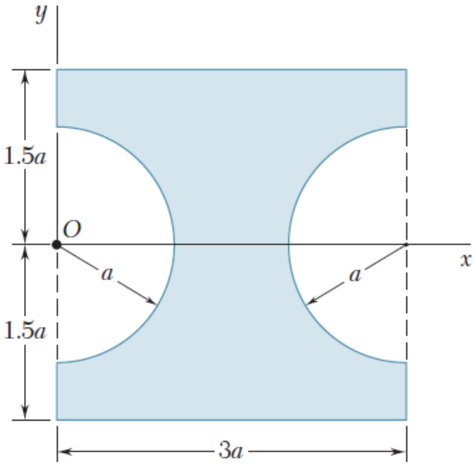
១៩. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចភាពម៉ាសនៃបន្ទះស្តើងធៀបនឹងអ័ក្សកែងនឹងទំព័រសៀវភៅហើយកាត់តាមចំណុច O ។ រូបធាតុមានម៉ាសក្នុងមួយខ្នាតផ្ទៃ 20kg/m^2 ។



២០. គណនាម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃផាត់ធៀបទៅនឹងអ័ក្ស x និង y នៅពេល $a = 20$ mm ។



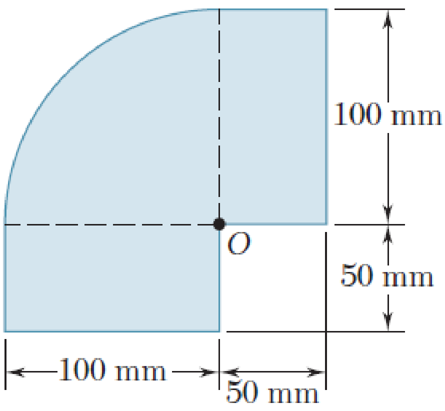
(រូបក)



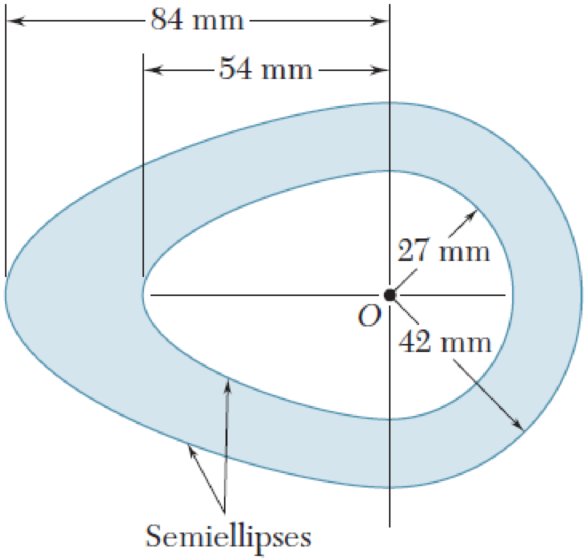
(រូបខ)

២១. គណនាម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្ទៃធៀបទៅនឹង៖

ក. ចំណុច O ។ ខ. សង់ត្រូអ៊ីតនៃផ្ទៃ។

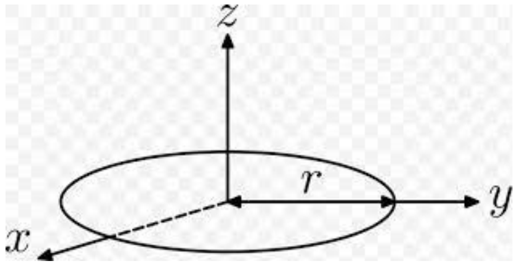


(រូបក)

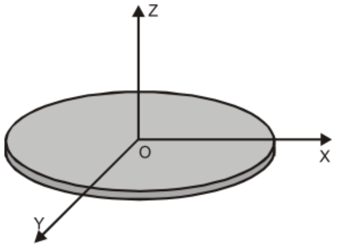


(រូបខ)

២២. គណនាម៉ាទ្រីសម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃកង។



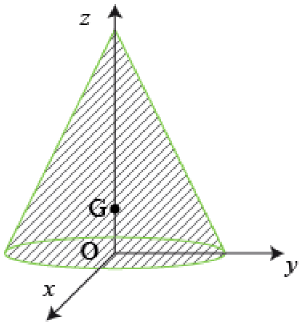
(លំហាត់២២)



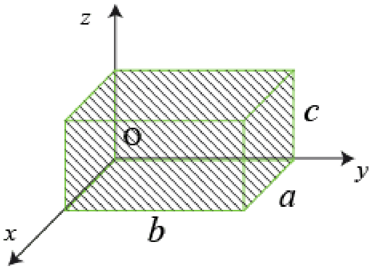
(លំហាត់២៣)

២៣. គណនាម៉ាទ្រីសម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃថាសស្មើសាច់។

២៤. គណនាម៉ាទ្រីសម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃកោនស្មើសាច់។



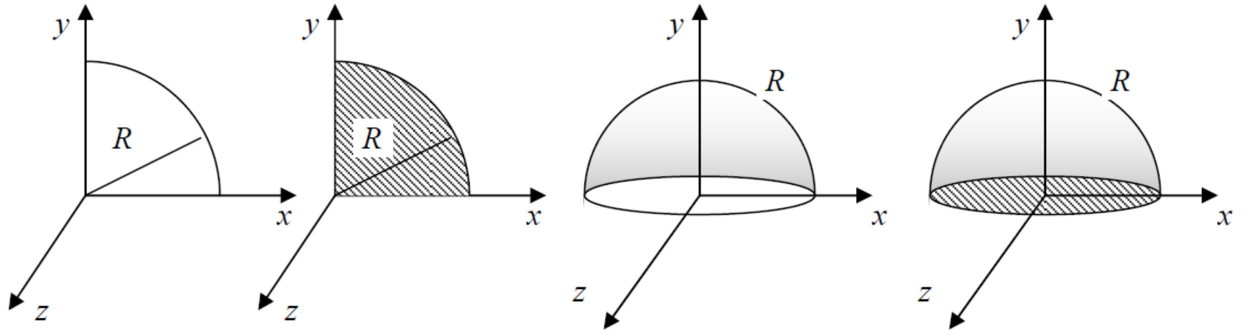
(លំហាត់២៤)



(លំហាត់២៥)

២៥. គណនាម៉ាទ្រីសម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃប្រលេពីប៉ែតកែងស្មើសាច់។

២៦. ចូរកំណត់ tenseur និចលភាពត្រង់ O ធៀបទៅនឹងតម្រុយអរតូនរមេ $\Re(0,x,y,z)$ នៃអង្គធាតុស្មើសាច់ (S) ដូចតទៅ៖ មួយភាគបួននៃកង មួយភាគបួននៃថាស កន្លះស្វ៊ែប្រហោង និងកន្លះស្វ៊ែតាន់។



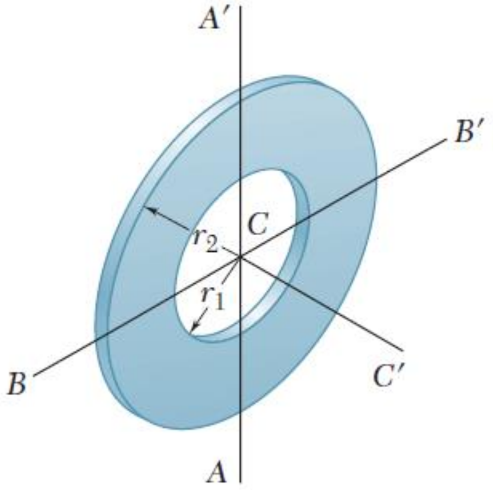
(រូបក)　　(រូបខ)　　(រូគ)　　(រូបឃ)

ក. ចំពោះអង្គធាតុនីមួយៗ ចូរគណនាម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាមចំណុច O និងចំណុច *A* ដែលមានកូអរដោនេ(R,R,O)។

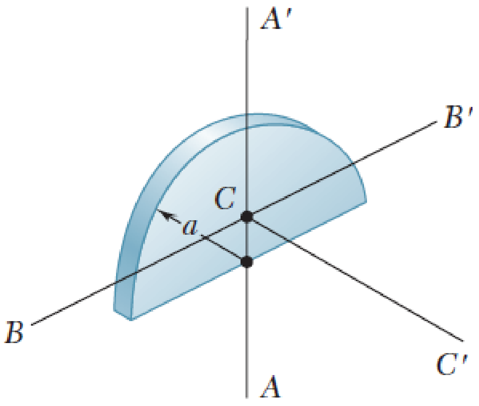
ខ. ចូរកំណត់អ័ក្សមេនិចលភាពចំពោះអង្គធាតុនីមួយៗ។

២៧. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃកងមានម៉ាស *m* កាត់ពីបន្ទះស្មើសាច់ស្តើង ធៀបទៅនឹង៖

ក. អ័ក្ស AA' ។　　ខ.អ័ក្សសង់ត្រូអ៊ីត CC' ដែលកែងទៅនឹងប្លង់នៃកង។



(លំហាត់២៧)



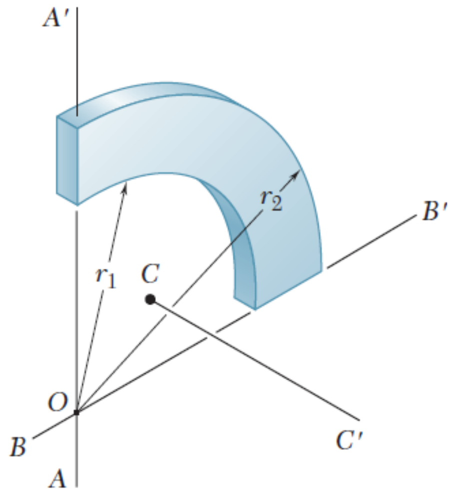
(លំហាត់២៨)

២៨. បន្ទះស្តើងពាក់កណ្តាលរង្វង់មានកាំ *a* និងម៉ាស *m* ។ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃបន្ទះធៀបនឹង៖

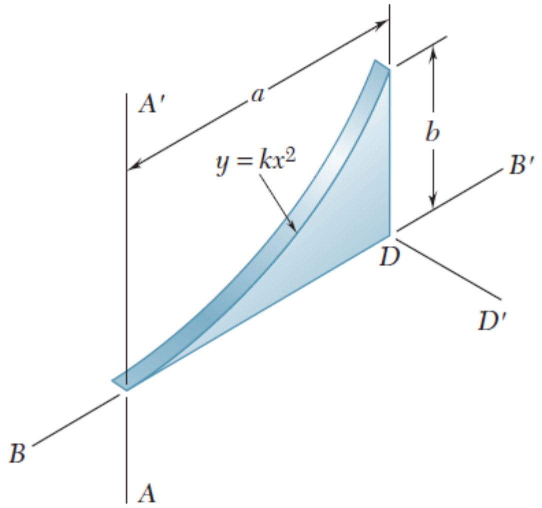
ក. អ័ក្សសង់ត្រូអ៊ីត BB' ។　　ខ. អ័ក្សសង់ត្រូអ៊ីត CC' ដែលកែងទៅនឹងបន្ទះ។

២៩. មួយភាគបួននៃកងមានម៉ាស m និងត្រូវបានកាត់ពីបន្ទះស្តើងស្មើសាច់។ ដោយដឹងថា $r_1 = \frac{3}{4}r_2$ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃមួយភាគបួននៃកងធៀបទៅនឹង៖

ក. អ័ក្ស AA' ។ ខ. អ័ក្សសង់ត្រូអ៊ីត CC' ដែលកែងទៅនឹងប្លង់នៃកង។



(លំហាត់២៩)



(លំហាត់៣០)

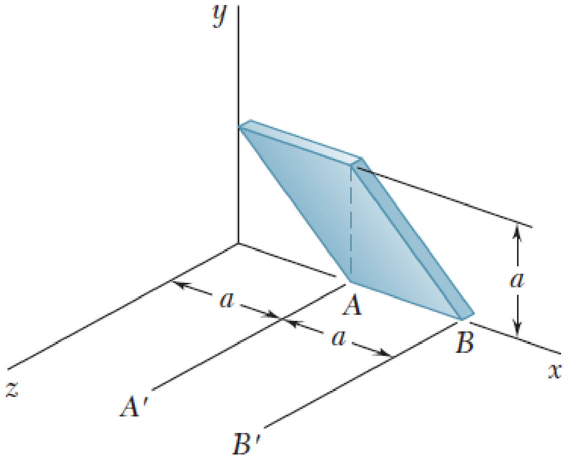
៣០. ប៉ារ៉ាបូលត្រូវបានកាត់ពីបន្ទះស្តើងស្មើសាច់។ វាមានម៉ាស m ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹង៖

ក. អ័ក្ស BB' ។ ខ. អ័ក្ស DD' ដែលកែងទៅនឹងប៉ារ៉ាបូល។

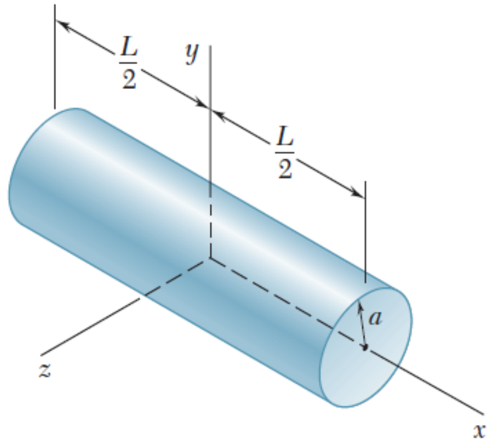
៣១. បន្ទះស្តើងមានម៉ាស m ត្រូវបានកាត់ជារាងប្រលេឡូក្រាមដូចបង្ហាញ។ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃបន្ទះធៀបទៅនឹង៖

ក. អ័ក្ស x ។ ខ. អ័ក្ស BB' ដែលកែងទៅនឹងបន្ទះ។

គ. អ័ក្ស y ។ ឃ. អ័ក្ស AA' ដែលកែងទៅនឹងបន្ទះ។



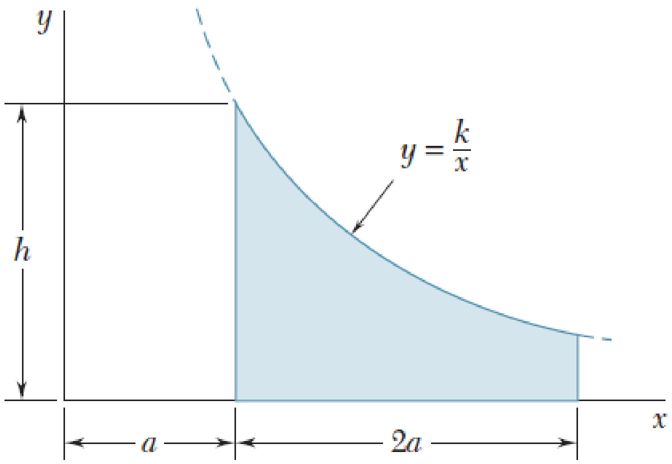
(លំហាត់៣១)



(លំហាត់៣២)

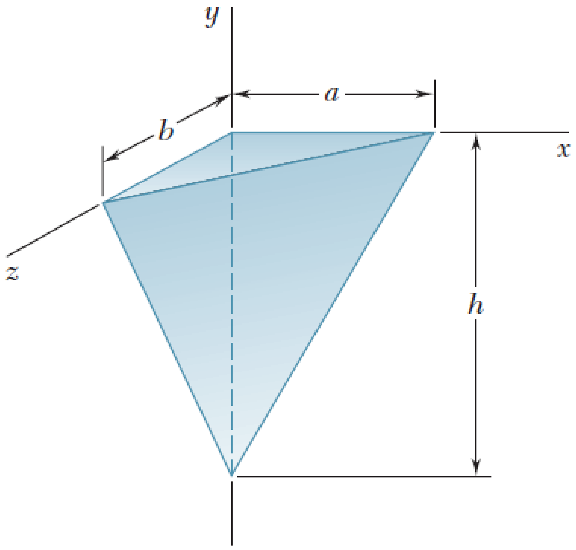
៣២. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាសធៀបអ័ក្ស y ។ ដោយសន្មតថាវាស្មើសាច់មានម៉ាស m ។

៣៣. ផ្ទៃដូចរូបធ្វើបរិវត្តជុំវិញអ័ក្ស x ដើម្បីបង្កើតសូលីដអូម៉ូសែនមានម៉ាស m ។ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាសនៃសូលីដធៀបទៅនឹង៖ ក. អ័ក្ស x ។ ខ. អ័ក្ស y ។

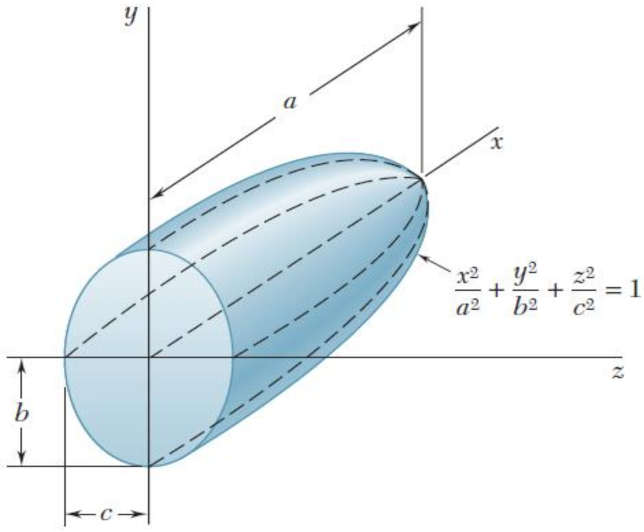


៣៤. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាសនៃតេត្រាហេត្រុងមានម៉ាស m ធៀបទៅនឹង៖

ក. អ័ក្ស x ។ ខ. អ័ក្ស y ។



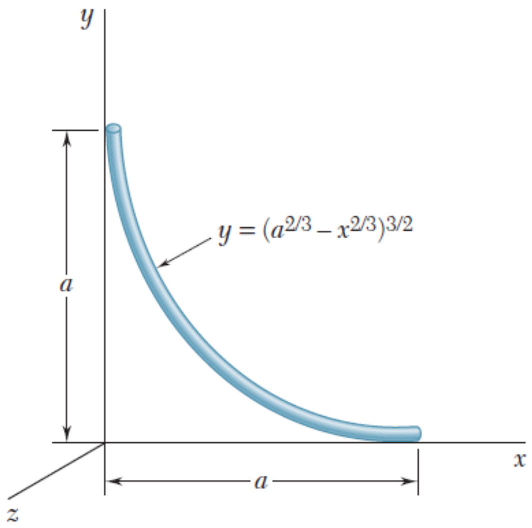
(លំហាត់៣៤)



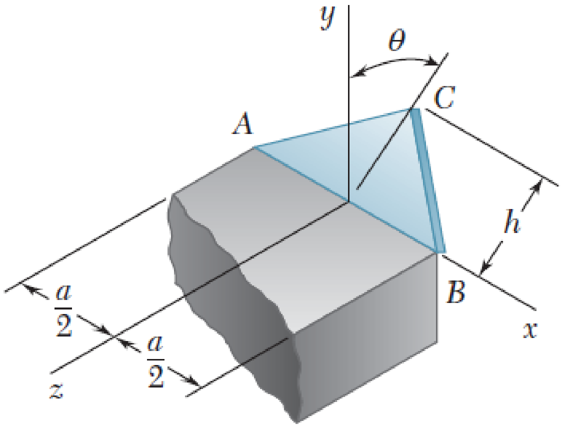
(លំហាត់៣៥)

៣៥. អង្គធាតុស្មើសាច់មួយមានម៉ាស m មានរាងពាក់កណ្ដាលអេលីបសូអ៊ីត។ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបទៅនឹងអ័ក្ស z ។

៣៦. ខ្សែភ្លើងស្តើងត្រូវបានបត់ជារាងដូចបង្ហាញ។ កំណត់ម៉ាសក្នុងមួយខ្នាតប្រវែងគឺ m' ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាសនៃខ្សែធៀបទៅនឹងអ័ក្សនីមួយៗនៃកូអរដោនេ។



(លំហាត់៣៦)

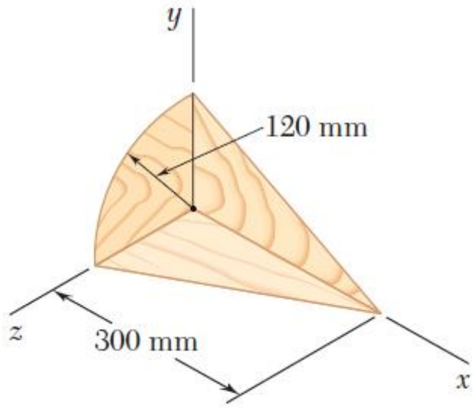


(លំហាត់៣៧)

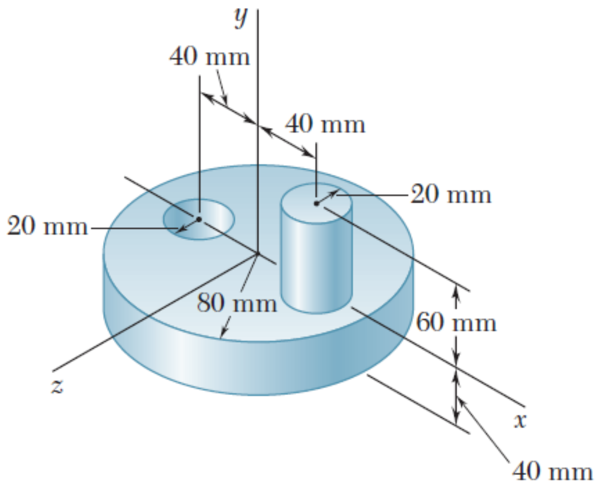
៣៧. បន្ទះត្រីកោណមានម៉ាស m ត្រូវបានផ្សារបាត AB របស់វា ជាប់ទៅនឹងដុំដូចបង្ហាញ។ ដោយដឹងថាបន្ទះផ្គុំបានមុំ θ ជាមួយអ័ក្ស y ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាសនៃបន្ទះធៀបទៅនឹងៈ

ក. អ័ក្ស x ។ ខ. អ័ក្ស y ។ គ. អ័ក្ស z ។

៣៨. គម្រូយន្តហោះមួយត្រូវបានផលិតពីបីបំណែកពីឈើ 1.5 mm ។ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាសធៀបទៅនឹងអ័ក្សកូអរដោនេ។ ម៉ាសមាឌឈើគឺ 780 kg/m^3 ។



(លំហាត់៣៨)



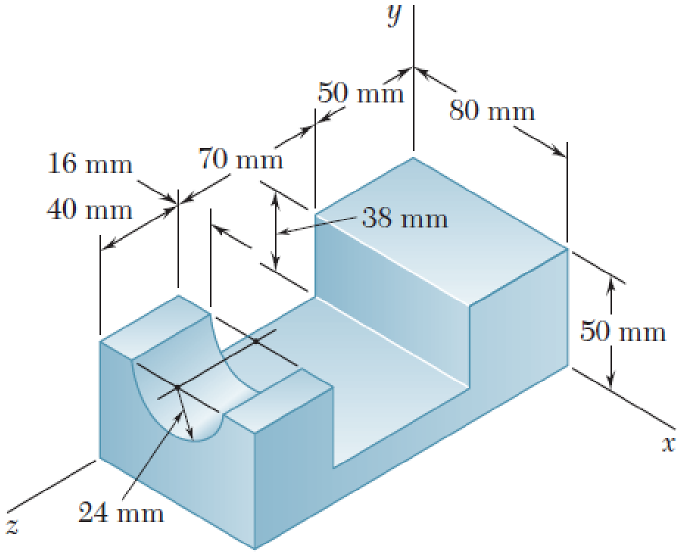
(លំហាត់៣៩)

៣៩. គ្រឿងម៉ាស៊ីនដូចបង្ហាញត្រូវបានផលិតពីដែកថែប។ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាសនៃសំណុំធៀបទៅនឹងៈ

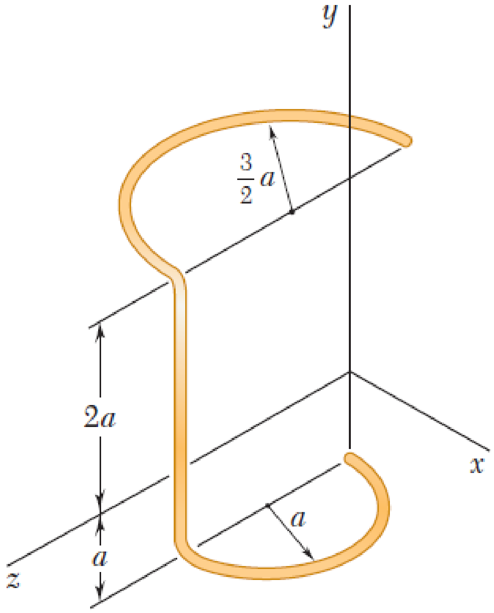
ក. អ័ក្ស x ។ ខ. អ័ក្ស y ។ គ. អ័ក្ស z ។

ម៉ាសមាឌនៃដែកថែបគឺ 7850 kg $/m^3$ ។

៤០. កំណត់ផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាស I_{xy}, I_{yz} និង I_{zx} នៃដុំថែកថែប។ ម៉ាសមាឌនៃដែកថែបគឺ 7850 $\mathrm{kg/m^3}$ ។



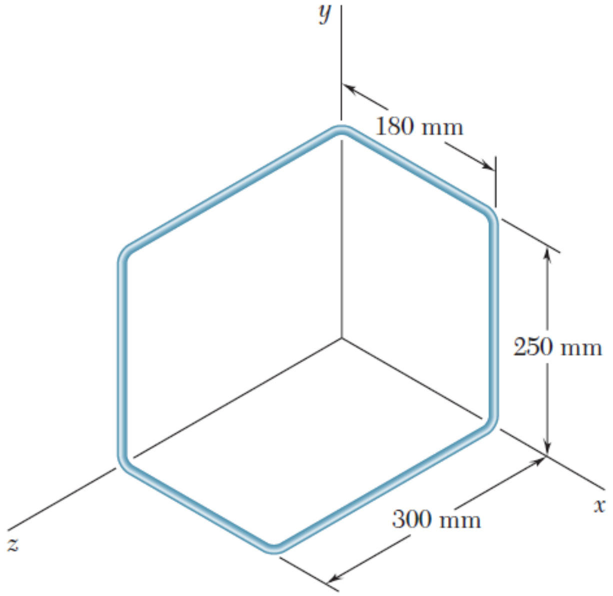
(លំហាត់៤០)



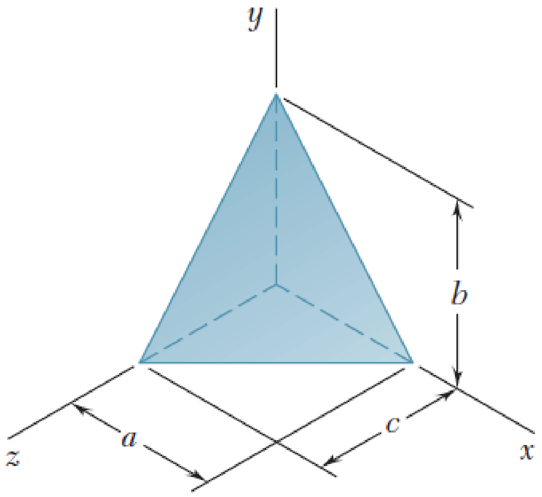
(លំហាត់៤១)

៤១. ខ្សែលង្ហិនមានម៉ាសក្នុងមួយខ្នាតប្រវែងគឺ w ត្រូវបានពត់ជារាងដូចបង្ហាញ។ ចូរកំណត់ផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាស I_{xy}, I_{yz} និង I_{zx} នៃខ្សែ។

៤២. ខ្សែទង់ដែងមានអង្កត់ផ្ចិត 1.5 mm ត្រូវបានពត់ដូចរូប។ ដោយដឹងថាម៉ាសមាឌអាលុយមីញ៉ូម 2800 $\mathrm{kg/m^3}$ ចូរកំណត់ផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាស I_{xy}, I_{yz} និង I_{zx} នៃខ្សែ។



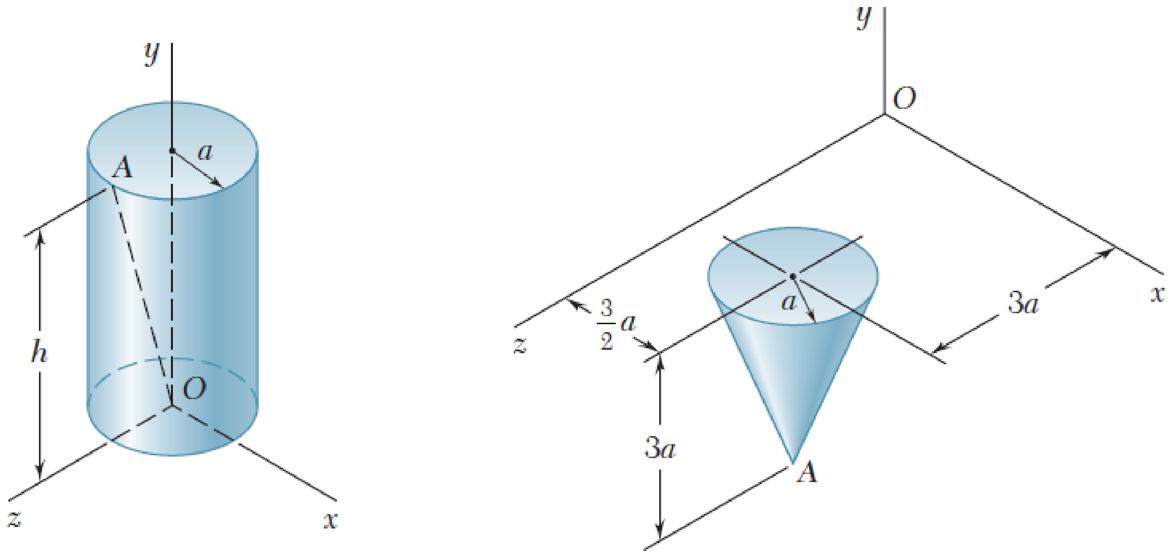
(លំហាត់៤២)



(លំហាត់៤៣)

៤៣. ចំពោះតេត្រហេត្រុងស្មើសាច់មានម៉ាស m ដូចបង្ហាញ ។ ចូរកំណត់ផលគុណម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាស I_{zx}, I_{yz} និង I_{xy} ។

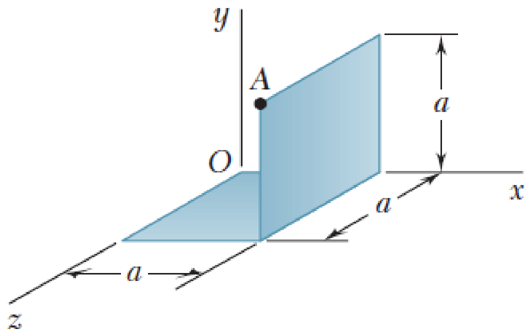
៤៤. ស៊ីឡាំងស្មើសាច់មានម៉ាស m ។ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាសធៀប O និងចំណុច A ដែលស្ថិតនៅលើបរិមាត្រនៃផ្ទៃខាងលើរបស់ស៊ីឡាំង។



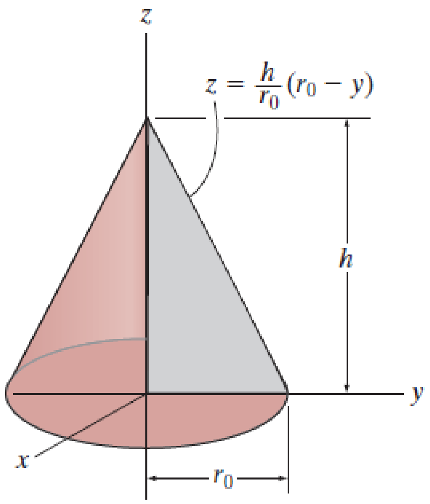
(លំហាត់៤៤)　　　　(លំហាត់៤៥)

៤៥. កោនស្មើសាច់ដូចបង្ហាញមានម៉ាស m ។ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាសនៃកោនធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ភ្ជាប់គល់ O និងចំណុច A។

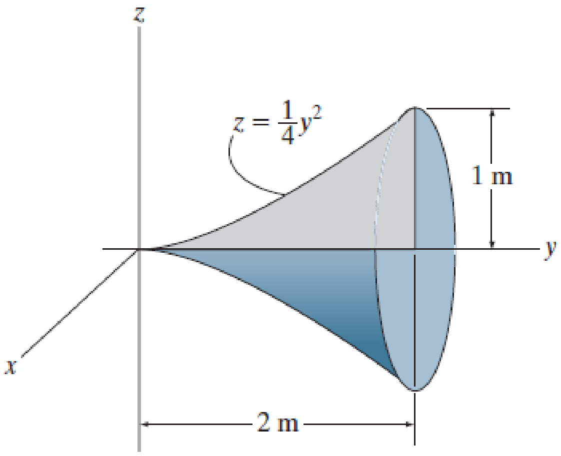
៤៦. បន្ទះស្តើងស្មើសាច់ត្រូវបានពត់ដូចរូបមានទម្ងន់ P ។ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាសរបស់វាធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ភ្ជាប់គល់ O និងចំណុច A ។



៤៧. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាស I_z នៃកោនបរិវត្តកើតពីបន្ទះផ្ទៃត្រីកោណវិលជុំវិញអ័ក្ស z ។ ម៉ាសមាឌនៃរូបធាតុ ρ ។ ចូរសំដែងលទ្ធផលជាអនុគមន៍នៃម៉ាសកោន m ។



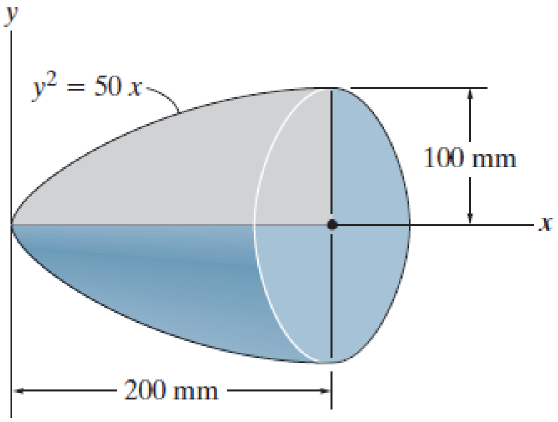
(លំហាត់៤៧)



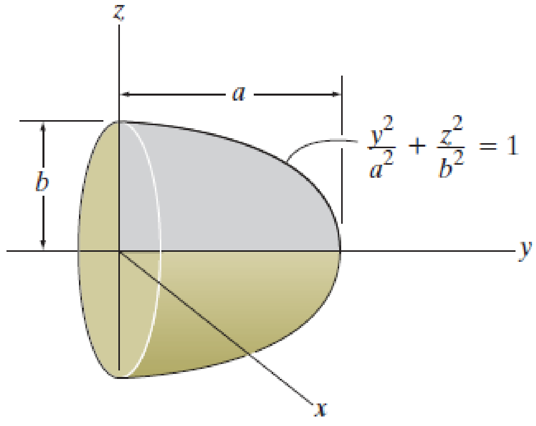
(លំហាត់៤៨)

៤៨. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាស I_y នៃអង្គធាតុកើតពីបរិវត្តផ្ទៃជុំវិញអ័ក្ស y ។ ម៉ាសមាឌនៃរូបធាតុ ρ ។ ចូរសំដែងលទ្ធផលជាអនុគមន៍នៃម៉ាសអង្គធាតុ m ។

៤៩. ប៉ារ៉ាបូអ៊ីតកើតពីបរិវត្តផ្ទៃជុំវិញអ័ក្ស x ។ ចូរកំណត់កាំ k_x ។ ម៉ាសធាតុនៃអង្គធាតុគឺ $\rho = 5\text{Mg/m}^3$ ។



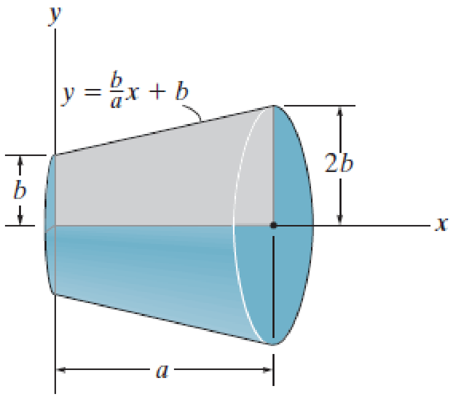
(លំហាត់៤៩)



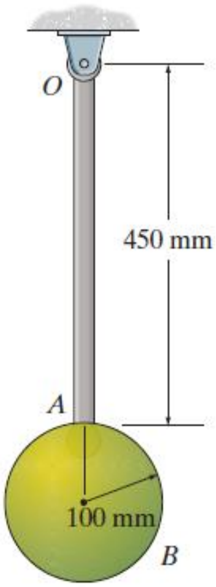
(លំហាត់៥០)

៥០. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាស I_y នៃអង្គធាតុកើតពីបរិវត្តផ្ទៃរិលជុំវិញអ័ក្ស y។ ម៉ាសមាឌនៃអង្គធាតុគឺ ρ។ ចូរសំដែងលទ្ធផលជាអនុគមន៍នៃម៉ាស m និងកន្លះអ័ក្សអេលីបសូអ៊ីត។

៥១. កំណាត់កោនកើតពីផ្ទៃខាងក្រោមបន្ទាត់រិលជុំវិញអ័ក្ស x។ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាស I_x និងសំដែងលទ្ធផលជាអនុគមន៍នៃម៉ាស m។ ម៉ាសមាឌរូបធាតុថេរគឺ ρ ។



(លំហាត់៥១)



(លំហាត់៥២)

៥២. ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់និចលភាពម៉ាសនៃប៉ោលវិលជុំវិញអ័ក្សកែងទៅនឹងកន្លាស់កាត់តាម O ។ ដងមានម៉ាស 10 kg និងស្វ៊ែមានម៉ាស 15 kg ។

ជំពូក១៩ ចលនានៃអង្គធាតុរឹង

MOTION OF RIGID BODIES

គោលបំណង

- បង្ហាញចលនាទូទៅនៃអង្គធាតុរឹងគឺ ចលនារំកិល ចលនារង្វិល និងចលនារមៀល។
- យល់ដឹងវែដនល្បឿន និងផ្ចិតខណៈល្បឿនសូន្យនៃចលនារបស់អង្គធាតុរឹង។
- ពន្យល់បង្ហាញរបៀបប្រើ Torseur ស៊ីនេម៉ាទិច និងឌីណាមិចក្នុងការដោះស្រាយចំណោទឌីណាមិចនៃអង្គធាតុរឹង។

1. ស៊ីនេម៉ាទិចនៃអង្គធាតុរឹង

1.1. ភាពទូទៅ

អង្គធាតុរឹងត្រូវបាននិយាយ មិនខូចរាងនៅពេលមានចលនា មានន័យថារក្សាចម្ងាយរវាងចំណុចពីរនៃអង្គធាតុ៖ $d\left[A(t),B(t)\right]=\left|\overrightarrow{AB}\right|=$ ថេរ

មេកានិចនៃអង្គធាតុរឹងសិក្សា ចរិកលក្ខណៈនៃអង្គធាតុនិងកំណត់គ្រប់ប៉ារ៉ាម៉ែតស៊ីនេម៉ាទិចនៃសំណុំចំណុចទាំងនេះគ្រប់ប្រភេទចលនា។

1.2. សញ្ញាណនៃតម្រុយ និងយោង

វែដនល្បឿន

អង្គធាតុ(S_k)មិនខូចរាង នោះចម្ងាយ $\overrightarrow{AB}=$ ថេរ នៅតែថេរតាមពេលនៅក្នុងតម្រុយពីរ។ វ៉ិចទ័រនេះសំដែងរបៀបផ្សេងគ្នាក្នុង $\Re$ និង $\Re'$ ។ ល្បឿនចំណុច A និង B ខុសគ្នា ពីព្រោះអង្គធាតុមានចលនាណាមួយ។

នៅក្នុងតម្រុយ $\Re$ យើងបាន៖ $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=$ ថេរ

នៅក្នុងតម្រុយ $\Re'$ យើងបាន៖ $\overrightarrow{O'B}=\overrightarrow{O'A}+\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{O'B}-\overrightarrow{O'A}=$ ថេរ

កន្សោមទាំងពីរ យើងអាចទាញបានទំនាក់ទំនងរវាងល្បឿននៃចំណុចទាំងពីរដែលជាកម្មសិទ្ធិរបស់អង្គធាតុ។

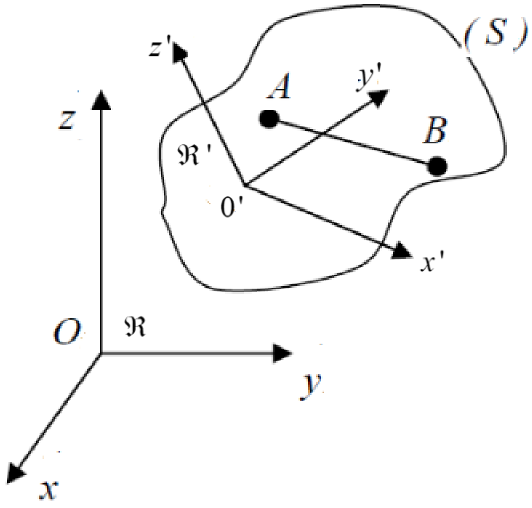
ល្បឿននៃចំណុចទាំងពីរធៀបទៅនឹង $\Re$ ត្រូវបានឱ្យដោយ៖

$\vec{v}_{A/\Re} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{\Re}$ និង $\vec{v}_{B/\Re} = \left(\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_{\Re}$

កន្សោមទាំងពីរអាចសរសេរក្រោមទម្រង់៖

$$\vec{v}_{A/\Re} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{\Re'} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{OA} \quad (1)$$

$$\vec{v}_{B/\Re} = \left(\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_{\Re'} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{OB} \quad (2)$$



ដោយធ្វើផលសង(2)-(1) យើងទទួលបាន៖

$$\vec{v}_{B/\Re} - \vec{v}_{A/\Re} = \left(\frac{d\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)}{dt}\right)_{\Re} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$$

$$\left(\frac{d\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\Re} = \vec{0}$$

ព្រោះ៖ $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$

យើងទទួលបានទំនាក់ទំនងរបាយល្បឿននៅក្នុងអង្គធាតុ៖ $\vec{v}_{B/\Re} = \vec{v}_{A/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{AB}$

ទំនាក់ទំនងនេះសំខាន់ណាស់នៅក្នុងស៊ីនេម៉ាទិចនិងឌីណាមិចនៃអង្គធាតុ។ ចេញពីល្បឿននៃចំណុចរបស់អង្គធាតុដើម្បីទាញរកល្បឿននៃគ្រប់ចំណុចផ្សេងទៀត ដោយស្គាល់ល្បឿនរង្វិលនៃតម្រុយដែលភ្ជាប់ជាមួយអង្គធាតុ។

ចំណាំ៖

ក. បើល្បឿនរង្វិល $\vec{\Omega}_{\Re'/\Re} = \vec{0}$ អង្គធាតុធ្វើចលនារំកិលសុទ្ធ ហើយគ្រប់ចំណុចទាំងអស់នៃអង្គធាតុមានល្បឿនដូចៗគ្នា $\vec{v}_{B/\Re} = \vec{v}_{A/\Re}$ ។

ខ. បើ $\vec{v}_{A/\Re} = \vec{0}$ និង $\vec{v}_{B/\Re} = \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{AB}$ យើងនិយាយថាអង្គធាតុធ្វើចលនារង្វិលជុំវិញចំណុច $A \in (S)$ ។

គ.ចលនាណាមួយ(ទូទៅ)នៃអង្គធាតុអាចត្រូវបានពណ៌នាជាសមាសនៃចលនារំកិលនៃចំណុច $A \in (S)$ នៅល្បឿន $\vec{v}_{A/\Re}$ និងចលនារង្វិលជុំវិញចំណុច $A \in (S)$ នៅល្បឿនរង្វិល $\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}$ ។

1.3. ចំណោលស្មើនៃដែនល្បឿនរបស់អង្គធាតុ

យើងអាចបង្ហាញដោយវិធីសាស្ត្រពីរផ្សេងគ្នា។

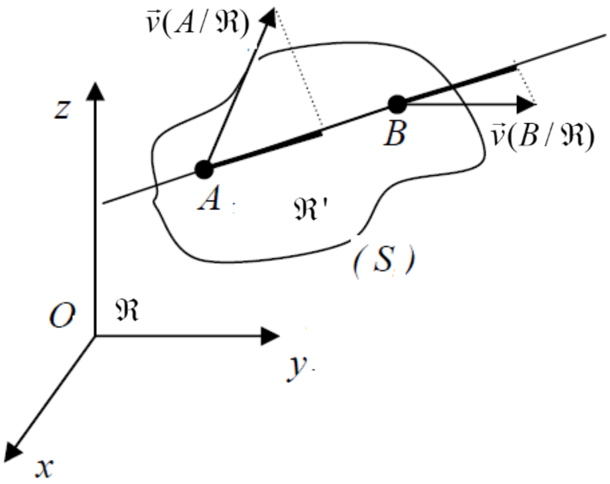
ក. យើងបានបង្ហាញខាងដើមហើយថា $\vec{v}_{B/\Re} = \vec{v}_{A/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{AB}$

ដោយគុណកន្សោមនេះដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ យើងទទួលបាន៖

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}_{B/\Re} = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}_{A/\Re} + \overrightarrow{AB}\cdot\left(\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}\times\overrightarrow{AB}\right)$$

តាមផលគុណចម្រុះ $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}\times\overrightarrow{AB}\right) = \vec{\Omega}_{\Re'/\Re}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$

យើងទទួលសមភាព៖ $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}_{B/\Re} = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}_{A/\Re}$ (សមចំណោលនៃដែនល្បឿនរបស់អង្គធាតុ)



ខ. កន្សោមនេះអាចត្រូវបានរកឃើញតាមរបៀបមួយទៀត។

អង្គធាតុ (S) មិនខូចរាង ហើយចម្ងាយនៃ $\overrightarrow{AB}$ ថេរ នោះ $\dfrac{d\overrightarrow{AB}^2}{dt} = 0$

$$\frac{d\overrightarrow{AB}^2}{dt} = 2\overrightarrow{AB}\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0$$

$$2\overrightarrow{AB}\cdot\left(\vec{v}_{B/\Re} - \vec{v}_{A/\Re}\right) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}_{B/\Re} = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}_{A/\Re}$$

លក្ខណៈសមចំណោលនាំទៅអត្ថិភាពនៃវ៉ិចទ័រសេរី $\vec{\Omega}(\Re'/\Re)$ ដែល៖ $\vec{v}_{B/\Re} = \vec{v}_{A/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re}\times\overrightarrow{AB}$ នេះអាចផ្ដើមសញ្ញាណនៃ torseur ស៊ីនេម៉ាទិច។

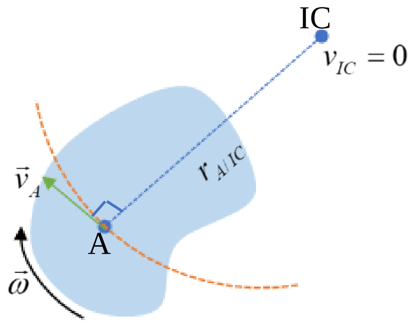
1.4. ផ្ចិតខណៈនៃល្បឿនសូន្យ

ល្បឿននៃចំណុច B ណាមួយនៅលើអង្គធាតុអាចទទួលបានដោយផ្ទាល់ បើជម្រើសមួយ ចំណុចគោល A ជាចំណុចដែលមានល្បឿនសូន្យនៅខណៈពិនិត្យ។ នៅក្នុងករណីនេះ $\vec{v}_A = \vec{0}$ ដូចនេះសមីការល្បឿន $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}_{B/A}$ ក្លាយជា $\vec{v}_B = \vec{\omega}\times\vec{r}_{B/A}$ ។ ចំពោះអង្គធាតុធ្វើចលនាប្លង់ទូទៅ ចំណុច A ត្រូវបានជ្រើសរើស ហៅថាផ្ចិតខណៈនៃល្បឿនសូន្យ ហើយ (IC) វាដេកនៅលើអ័ក្សខណៈនៃល្បឿនសូន្យ។ អ័ក្សនេះជានិច្ចកាលកែងទៅនឹងប្លង់នៃចលនា និងខ្នាត់នៃ

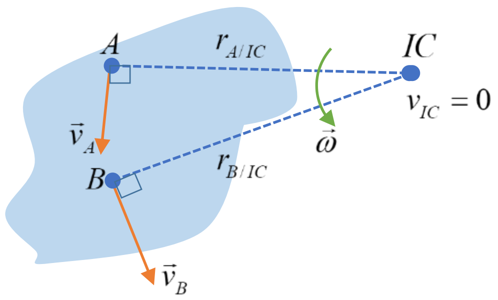
អ័ក្សជាមួយប្លង់នេះឱ្យនិយមន័យទីតាំងនៃ (IC)។ ដោយសារចំណុច A ត្រួតជាមួយ (IC) ដូចនេះ $\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/IC}$ ហើយចំណុចធ្វើចលនាជៀបនឹង (IC) នៅក្នុងគន្លងវង់ ម្យ៉ាងទៀតអង្គធាតុលេចឡើងនូវចលនារង្វិលជៀបទៅនឹងអ័ក្សខណៈ។

- ទីតាំងនៃ(IC) ៖ ដើម្បីដាក់ទីតាំង(IC) យើងអាចប្រើល្បឿននៃចំណុចនៅលើអង្គធាតុជានិច្ចកាលកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រទីតាំងធៀប(IC) សន្ទឹងពី (IC) ទៅចំណុច។ លទ្ធភាពជាច្រើន៖

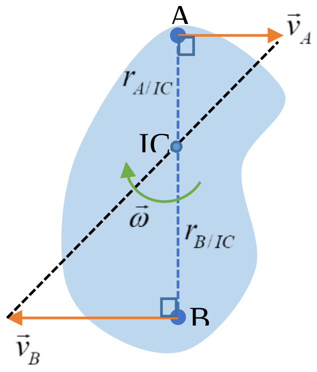
ក. ឱ្យល្បឿន $\vec{v}_A$ នៃចំណុច A នៅលើអង្គធាតុ និងល្បឿនមុំ ω នៃអង្គធាតុ។ នៅក្នុងករណីនេះ ស្ថិតនៅលើ(IC) បន្ទាត់គូសកែងទៅនឹង $\vec{v}_A$ នៅត្រង់ A ដែលចម្ងាយពី A ទៅ(IC) គឺ $r_{A/IC} = \dfrac{v_A}{\omega}$ ។

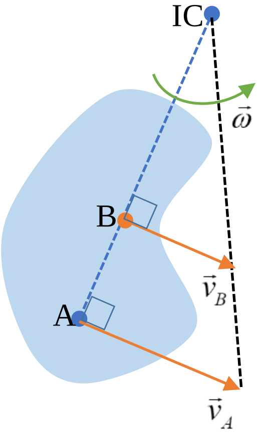


ខ. ឱ្យបន្ទាត់សកម្មនៃវ៉ិចទ័រល្បឿនពីរមិនស្របគ្នា $\vec{v}_A$ និង $\vec{v}_B$។ សង់នៅចំណុច A និង B នូវអង្កត់ដែលកែងទៅនឹង $\vec{v}_A$ និង $\vec{v}_B$ ។

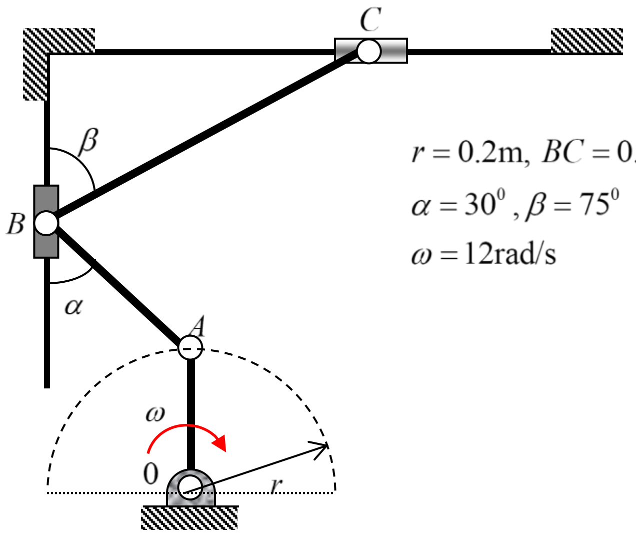


គ. ឱ្យតម្លៃ និងទិសនៃល្បឿនពីរស្របគ្នា $\vec{v}_A$ និង $\vec{v}_B$។ ទីតាំងនៃ (IC) ត្រូវបានកំណត់ដោយសមាមាត្រត្រីកោណ។





ឧទាហរណ៍១៖ គណនាល្បឿនរបស់ជុំ B និង C និងល្បឿនមុំ ω_{AB} និង ω_{BC} ចំពោះរូបខាងក្រោម។



ដំណោះស្រាយ

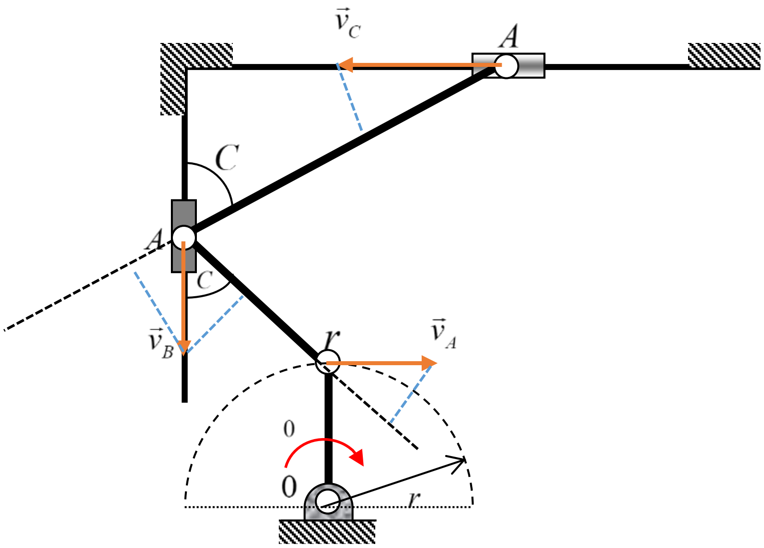
ល្បឿននៃចំណុច A ៖ $\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA}$, $\vec{v}_A = \vec{0}$ $\Rightarrow v_A = r\omega = 0.2 \times 12 = 2.4\text{m/s}$

ប្រើដែនរ៉ិចទ័រល្បឿន៖ $\vec{v}_B \cdot \overrightarrow{BA} = \vec{v}_A \cdot \overrightarrow{BA}$

ឬ $v_B \cos\alpha = v_A \cos(90^0 - \alpha)$ $\Rightarrow v_B = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} v_A = \tan 30^0 \times 2.4 = 1.38\text{m/s}$

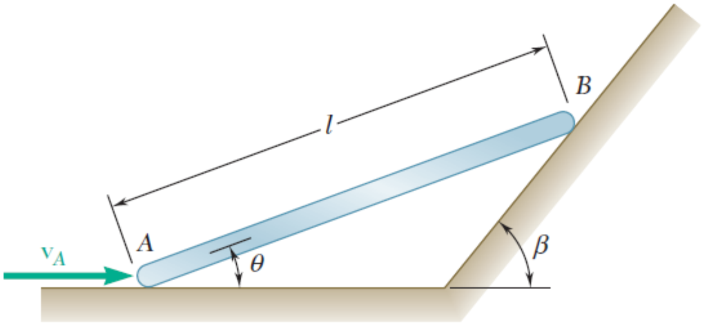
និង $\vec{v}_C \cdot \overrightarrow{CB} = \vec{v}_B \cdot \overrightarrow{CB}$ ឬ $v_C \cos(90^0 - \beta) = v_B \cos\beta$

$$\Rightarrow v_C = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} v_B = \text{cotan}\, 75^0 \times 1.38 = 0.37\text{m/s}$$



ឧទាហរណ៍២៖ ដង AB អាចរអិលដោយសេរីតាមកម្រាលដេកនិងប្លង់ទេរ។ កំណត់ $\vec{v}_A$ ជាល្បឿនចុង A ។

ក. ចូរកំណត់ល្បឿនមុំនៃដង។ ខ. គណនាល្បឿនចុង B ។



ដំណោះស្រាយ

យើងអាចដោះស្រាយតាមពីររបៀប៖

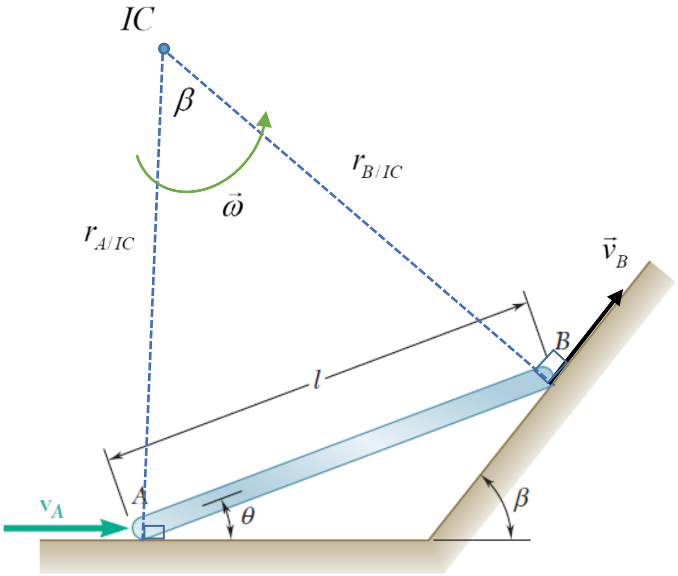
របៀបទី១៖ តាមផ្ចិតខណៈនៃល្បឿនសូន្យ។

ក. កំណត់ល្បឿនមុំនៃដង៖ $\omega = \dfrac{v_A}{r_{A/IC}}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស៖

$$\frac{l}{\sin\beta} = \frac{r_{A/IC}}{\sin(90^0+\theta-\beta)}$$

ដោយ $\sin(90^0+\theta-\beta)=\cos(\theta-\beta)$



$$= \cos(\beta - \theta)$$

$$\Rightarrow \quad r_{A/IC} = \frac{\cos(\beta - \theta)}{\sin\beta} l$$

ដូចនេះល្បឿនមុំនៃដងគឺ

$$\omega = \frac{\sin\beta}{\cos(\beta - \theta)} \frac{v_A}{l}$$

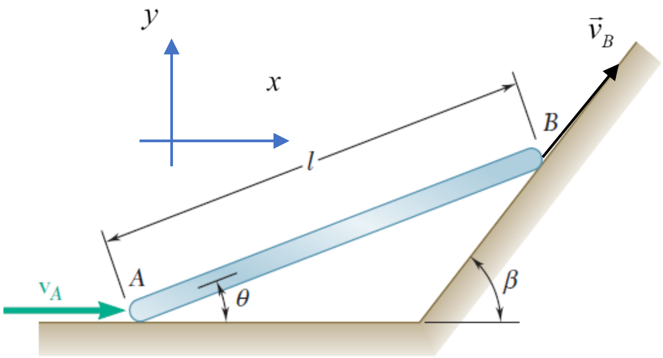
ខ. ល្បឿននៃចំណុច B ៖

ចំណុច B ធ្វើចលនាវង់ជុំវិញ IC ជាមួយល្បឿនប្រវែង $v_B = r_{B/IC}\omega$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស៖ $\frac{l}{\sin\beta} = \frac{r_{B/IC}}{\sin(90^0 - \theta)} \quad \Rightarrow \quad r_{B/IC} = \frac{\cos\theta}{\sin\beta} l$

$$\Rightarrow \quad v_B = \frac{\cos\theta}{\sin\beta} l \times \frac{\sin\beta}{\cos(\beta-\theta)} \frac{v_A}{l} = \frac{\cos\theta}{\cos(\beta - \theta)} v_A$$

របៀបទី២៖ ដោយប្រើវិធីសាស្ត្រវិចទ័រ



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$$

$$\begin{pmatrix} v_B\cos\beta \\ v_B\sin\beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l\cos\theta \\ l\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_B\cos\beta \\ v_B\sin\beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -l\omega\sin\theta \\ l\omega\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad v_B\cos\beta = v_A - l\omega\sin\theta \qquad (1)$$

និង $v_B\sin\beta = l\omega\cos\theta \qquad (2)$

ក. ល្បឿនមុំនៃដង៖

យក $(2)\times\cos\beta - (1)\times\sin\beta$ យើងបាន៖

$$0 = -v_A\sin\beta + l\omega(\sin\theta\sin\beta + \cos\theta\cos\beta) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\sin\beta}{\cos(\beta - \theta)} \frac{v_A}{l}$$

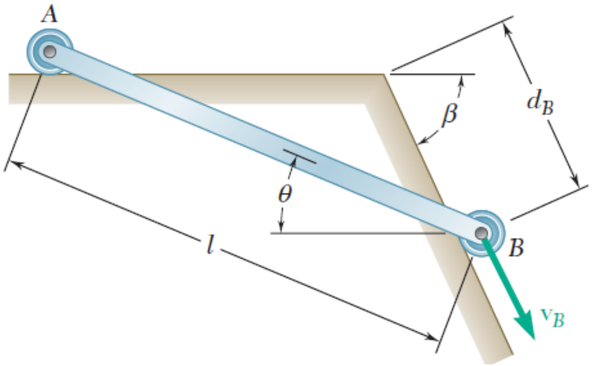
ខ. ល្បឿននៃចំណុច B ៖

សមីការ (2) $\Rightarrow \quad v_B = \frac{l\cos\theta}{\sin\beta}\omega = \frac{l\cos\theta}{\sin\beta} \times \frac{\sin\beta}{\cos(\beta-\theta)} \frac{v_A}{l} = \frac{\cos\theta}{\cos(\beta-\theta)} v_A$

ចំណាំ៖ ល្បឿនត្រង់ចំណុចB អាចរកបានដោយប្រើវិធីសាស្ត្រចំណោល ឬដែនល្បឿន៖

$$\vec{v}_A\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{v}_B\cdot\overrightarrow{AB} \text{ ឬ } v_A\,AB\cos\theta=v_B\,AB\cos(\beta-\theta) \Rightarrow v_B=\frac{\cos\theta}{\cos(\beta-\theta)}v_A$$

ឧទាហរណ៍៣៖ កង់ពីរភ្ជាប់នៅចុងរបារAB រំលតាមផ្ទៃដូចបង្ហាញ។ ចូររកល្បឿនកង់ A និងល្បឿនមុំនៃរបារជាអនុគមន៍នៃ v_B, θ, l និង β ។



ដំណោះស្រាយ

តាមដែនល្បឿន $\vec{v}_A\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{v}_B\cdot\overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow v_A l\cos\theta=\mathrm{v}_B\, l\cos(\beta-\theta) \Rightarrow v_A=\frac{\cos(\beta-\theta)}{\cos\theta}v_B$$

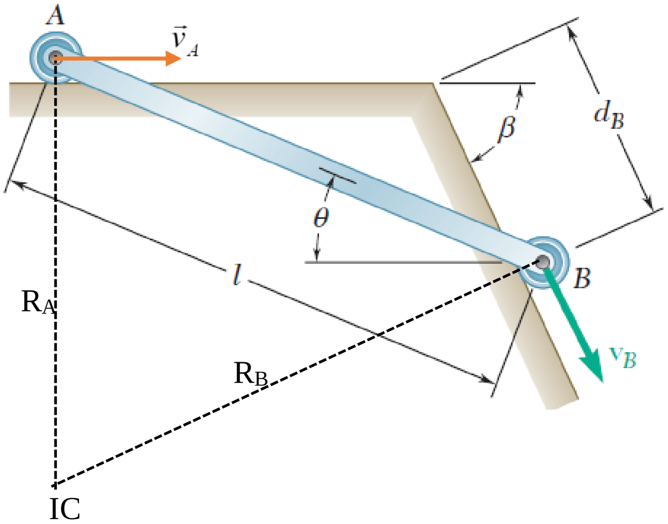
ដោយប្រើ (IC)ដើម្បីរកល្បឿនមុំនៃរបារ

$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{R_A}=\frac{v_B}{R_B}$$

តាមទ្រឹស្តីស៊ីនុស៖

$$\frac{l}{\sin\beta}=\frac{R_B}{\sin(90^0-\theta)}\Rightarrow R_B=\frac{\cos\theta}{\sin\beta}l$$

$$\Rightarrow\omega_{AB}=\frac{v_B\sin\beta}{l\cos\theta}$$



ម្យ៉ាងទៀតយើងគណនាល្បឿនកង់ A និងល្បឿនមុំរបារ AB ដោយប្រើវ៉ិចទ័រ៖

$$\vec{v}_A=\vec{v}_B+\vec{\omega}_{BA}\times\overrightarrow{BA}$$

$$\begin{pmatrix} v_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_B \cos\beta \\ -v_B \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BA} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l\cos\theta \\ -l\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_B \cos\beta \\ -v_B \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l\omega_{BA} \sin\theta \\ l\omega_{BA} \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\ v_A = v_B \cos\beta + l\omega_{BA}\sin\theta$ និង $0 = -v_B \sin\beta + l\omega_{BA}\cos\theta \ \Rightarrow\ \omega_{BA} = \dfrac{v_B \sin\beta}{l\cos\theta}$

$$v_A = v_B \cos\beta + l\sin\theta \times \frac{v_B \sin\beta}{l\cos\theta} = \frac{\sin(\beta-\theta)}{\cos\theta} v_B$$

ចំណាំថា ល្បឿនមុំនៃរបារគឺ $\omega_{AB} = \omega_{BA}$

1.5. វ៉ិចទ័រសំទុះ

ចំពោះចំណុចនីមួយៗនៃអង្គធាតុ(S)ភ្ជាប់ទៅតម្រុយ $\Re'$ យើងទាញបានសំទុះចេញពីល្បឿនៈ

$$\vec{a}_{A/\Re} = \left(\frac{d\vec{v}_{A/\Re}}{dt}\right)_{\Re}$$

យើងនឹងរកកន្សោមដែលភ្ជាប់ទំនាក់ទំនងរវាងសំទុះ $\vec{a}_{A/\Re}$ និង $\vec{a}_{B/\Re}$។ យើងបានបង្កើតទំនាក់ទំនងរវាងល្បឿននៃចំណុចទាំងពីរៈ

$$\vec{v}_{B/\Re} = \vec{v}_{A/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{AB}$$

យើងទាញទំនាក់ទំនងរវាងសំទុះដោយដេរីវេកន្សោមនៃល្បឿនៈ

$$\vec{a}_{B/\Re} = \left(\frac{d\vec{v}_{B/\Re}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d\vec{v}_{A/\Re}}{dt}\right)_{\Re} + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}}{dt}\right)_{\Re} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\Re}$$

និងដោយសារ $\left(\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\Re'} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{AB} = \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{AB}$ ព្រោះ $\left(\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\Re'} = \vec{0}$

ជាបញ្ចប់យើងទទួលបានទំនាក់ទំនងរវាងសំទុះនៃចំណុចទាំងពីរ A និង B នៃអង្គធាតុៈ

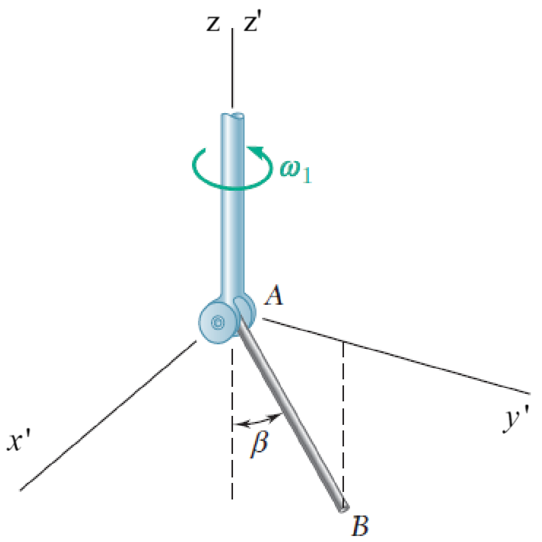
$$\vec{a}_{B/\Re} = \vec{a}_{A/\Re} + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}}{dt}\right)_{\Re} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \left(\vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{AB}\right)$$

យើងសម្គាល់ថា បើល្បឿនរង្វិលថេរ កន្សោមក្លាយជាៈ

$$\vec{a}_{B/\Re} = \vec{a}_{A/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \left(\vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{AB}\right) = \vec{a}_{A/\Re} - \overrightarrow{AB}\left(\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}\right)^2$$

ឧទាហរណ៍៤៖ ដង AB មានប្រវែង 125 mm ត្រូវបានភ្ជាប់ទៅដងឈរដែលវិលជុំវិញអ័ក្ស z នៅល្បឿនមុំថេរ $\omega_1 = 5\,\text{rad/s}$ ។ ដោយដឹងថា មុំដែលផ្គុំដោយដង AB និងទិសឈរ កើនឡើងនៅអត្រាថេរ $\frac{d\beta}{dt} = 3\,\text{rad/s}$ ចូរកំណត់ល្បឿន និងសំទុះនៃចុង B របស់ដង នៅពេល $\beta = 30^0$ ។

ដំណោះស្រាយ



យកតម្រុយ $\mathfrak{R}(Axyz)$ នៅនឹង ហើយតម្រុយ $\mathfrak{R}(Ax'y'z')$ វិលជាមួយល្បឿនមុំ៖

$$\Omega_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}} = \omega_1 = 5\,\text{rad/s}$$

ហើយដង AB វិលដោយល្បឿនមុំ៖

$$\omega_2 = \frac{d\beta}{dt} = 3\,\text{rad/s} \ (\text{ជុំវិញអ័ក្ស } x')$$

យើងបាន៖

– នៅក្នុងតម្រុយ $\mathfrak{R}'$ ៖ $\vec{v}_{B/\mathfrak{R}'} = \vec{v}_{A/\mathfrak{R}'} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AB}$

ដោយ $\vec{v}_{A/\mathfrak{R}'} = \vec{0}$ ហេតុនេះ $\vec{v}_{B/\mathfrak{R}'} = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AB}$

– នៅក្នុងតម្រុយ $\mathfrak{R}$ ៖ $\vec{v}_{B/\mathfrak{R}} = \vec{v}_{A/\mathfrak{R}} + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{AB}$ ដោយ $\vec{v}_{A/\mathfrak{R}} = \vec{0}$

ហេតុនេះ $\vec{v}_{B/\mathfrak{R}} = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AB}$

$$\text{ដោយ } \vec{v}_{B/\mathfrak{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\mathfrak{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\mathfrak{R}'} + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{AB} = \vec{v}_{B/\mathfrak{R}'} + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{B/\mathfrak{R}} = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{AB} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \overrightarrow{AB}$$

សំដែងនៅក្នុងគោល $\mathfrak{R}'$ ៖

$$\vec{v}_{B/\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathfrak{R}'} \times \begin{pmatrix} 0 \\ AB\sin\beta \\ -AB\cos\beta \end{pmatrix}_{\mathfrak{R}'} = \begin{pmatrix} -5AB\sin\beta \\ 3AB\cos\beta \\ 3AB\sin\beta \end{pmatrix}_{\mathfrak{R}'}$$

នៅខណៈ $\beta = 30^0$ ហើយ $AB = 125\text{mm} = 0.125\text{m}$

$$\vec{v}_{B/\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} -5AB\sin\beta \\ 3AB\cos\beta \\ 3AB\sin\beta \end{pmatrix}_{\mathfrak{R}'} = \begin{pmatrix} -5\times 1\sin 30^0 \\ 3\times 1\cos 30^0 \\ 3\times 1\sin 30^0 \end{pmatrix}_{\mathfrak{R}'} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ 2.598 \\ 1.50 \end{pmatrix}_{\mathfrak{R}'}$$

$$\Rightarrow v_{B/\Re} = \sqrt{(-2.5)^2 + (2.598)^2 + (1.50)^2} = 3.91\,\text{m/s}$$

សំទុះនៃចំណុច B ៖

$$\vec{a}_{B/\Re} = \left(\frac{\vec{v}_{B/\Re}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_{\Re} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_2 \times \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\Re} + \vec{\omega}_1 \times \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\Re}$$

$$\vec{a}_{B/\Re} = (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{a}_{B/\Re} = (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) \times \overrightarrow{AB} + (\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1) \times \overrightarrow{AB} + (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) \times \overrightarrow{AB}$$

ឬ $\vec{a}_{B/\Re} = (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) \times \overrightarrow{AB}$

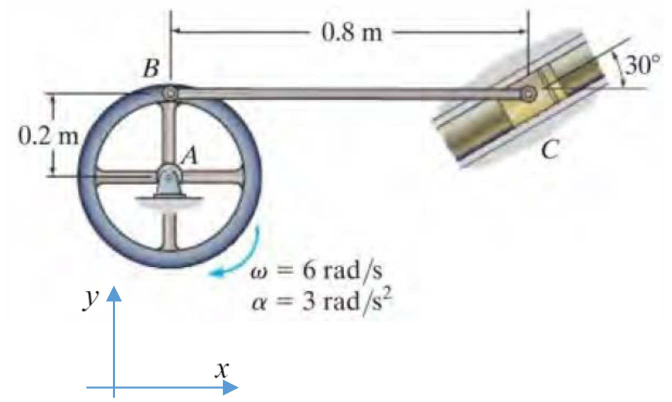
សំដែងនៅក្នុងគោល $\Re'$ ៖

$$\vec{a}_{B/\Re} = \left[\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}_{\Re'} \times \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}_{\Re'}\right] \times \begin{pmatrix}0\\AB\sin\beta\\-AB\cos\beta\end{pmatrix}_{\Re'} = \begin{pmatrix}0\\15\\0\end{pmatrix}_{\Re'} \times \begin{pmatrix}0\\AB\sin\beta\\-AB\cos\beta\end{pmatrix}_{\Re'}$$

$$\vec{a}_{B/\Re} = \begin{pmatrix}0\\15\\0\end{pmatrix}_{\Re'} \times \begin{pmatrix}0\\AB\sin\beta\\-AB\cos\beta\end{pmatrix}_{\Re'} = \begin{pmatrix}-15AB\cos\beta\\0\\0\end{pmatrix}_{\Re'} = \begin{pmatrix}-12.99\\0\\0\end{pmatrix}_{\Re'}$$

$\vec{a}_{B/\Re} = -12.99\vec{i}\,'\ \text{m/s}^2$ ឬ $a_{B/\Re} = 12.99\,\text{m/s}^2$

ឧទាហរណ៍៩៖ នៅខណៈដូចបង្ហាញ កង់ A វិលជាមួយល្បឿនមុំ $\omega = 6\,\text{rad/s}$ និងសំទុះមុំ $\alpha = 3\,\text{rad/s}^2$ ។ ចូរកំណត់សំទុះមុំនៃសន្លាក់ BC និងសំទុះនៃពីស្តុង C ។



ដំណោះស្រាយ

សំទុះមុំនៃសន្លាក់ BC និងសំទុះនៃពីស្តុង C ៖

ល្បឿន និងសំទុះនៃចំណុច B ៖

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\overrightarrow{AB}\ ,\ \ \vec{v}_A = \vec{0}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}\times\overrightarrow{AB} - \omega^2\cdot\overrightarrow{AB}\ ,\ \vec{a}_A = \vec{0}$$

ចំណុច B និង C នៅលើអង្គធាតុរឹងតែមួយ៖

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC}\times\overrightarrow{BC} = \vec{\omega}\times\overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{BC}\times\overrightarrow{BC} \qquad (1)$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BC}\times\overrightarrow{BC} - \omega_{BC}^2\overrightarrow{BC} = \vec{\alpha}\times\overrightarrow{AB} - \omega^2\overrightarrow{AB} + \vec{\alpha}_{BC}\times\overrightarrow{BC} - \omega_{BC}^2\overrightarrow{BC} \qquad (2)$$

សមីការ(1) យើងបាន៖

$$\begin{pmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BC} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ឬ } \begin{pmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.2\omega_{BC} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ v_{Cx} = 1.2 - 0.2\omega_{BC}$$

និង $v_{Cy} = 0$ ដោយ $v_{Cy} = v_C \sin 30^0 = 0 \Rightarrow v_C = 0$ នោះ $v_{Cx} = v_C \cos 30^0 = 0$

$$\Rightarrow\ \omega_{BC} = 6\,\text{rad/s}$$

សមីការ(2) យើងបាន៖

$$\begin{pmatrix} a_{Cx} \\ a_{Cy} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} - 36\begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_{BC} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 36\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{Cx} \\ a_{Cy} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 7.2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.8\alpha_{BC} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28.8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

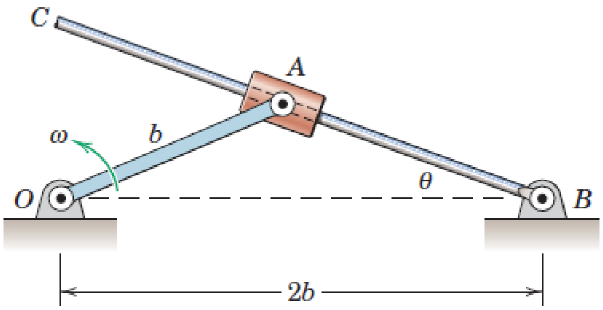
$$\Rightarrow\ a_{Cx} = 0.6 - 28.8\ \Rightarrow\ a_{Cx} = -28.2\,\text{m/s}^2$$

ដោយ $a_{Cx} = -a_C \cos 30^0 \ \Rightarrow\ a_C = \dfrac{28.2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 32.56\ \text{m/s}^2$

និង $a_{Cy} = -7.2 + 0.8\alpha_{BC} \ \Rightarrow\ \alpha_{BC} = \dfrac{7.2 - a_{Cy}}{0.8}$ ដោយ $a_{Cy} = -a_C \sin 30^0 = -16.28\text{m/s}^2$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{BC} = \frac{7.2+16.28}{0.8} = 29.35\,\text{rad/s}^2$$

ឧទាហរណ៍៦៖ សន្លាក់ OA = b = 1 m វិលក្នុងទិសដៅផ្ទុយទ្រនិចនាឡិកាជាមួយល្បឿនមុំ $\omega = 3\text{rad/s}$ ។ ចូរកំណត់ល្បឿនមុំនៃរបារ BC និងល្បឿនប្រឡៀ A ធៀបនឹងដង BC នៅពេល $\theta = 30^0$ ។



ដំណោះស្រាយ

កំណត់ល្បឿនមុំនៃរបារ BC ៖

ជ្រើសរើសតម្រុយពីរគឺ៖ តម្រុយ $\Re$ នៅនឹង(ជាប់ដី) និងតម្រុយ $\Re'$ មានអ័ក្ស x' នៅស្របជាប់ជាមួយរបារ BC ។

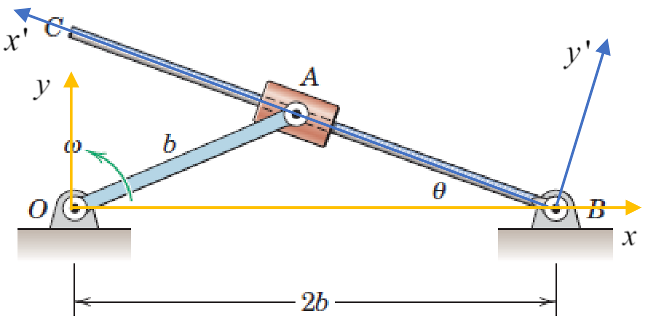
នៅក្នុងតម្រុយ $\Re$ ៖ $\vec{v}_{A/\Re} = \vec{\omega}\times\overrightarrow{OA}$

តាមច្បាប់បន្សំល្បឿន $\vec{v}_{A/\Re} = \vec{v}_e + \vec{v}_{A/\Re'}$

ដោយ $\vec{v}_e = \vec{\omega}_{BA}\times\overrightarrow{BA}$ និង $\vec{v}_{A/\Re'} = \dot{x}'\vec{i}\,'$

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega}\times\overrightarrow{OA} = \vec{\omega}_{BA}\times\overrightarrow{BA} + \vec{v}_{A/\Re'}$$

ដោយ $OA = b$ ហើយក្នុងរូប យើងបាន៖



$$BA = OA = b$$

សំដែងនៅក្នុងគោល $\Re$ ៖

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}_{\Re}\times\begin{pmatrix}b\cos\theta\\b\sin\theta\\0\end{pmatrix}_{\Re} = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega_{BA}\end{pmatrix}_{\Re}\times\begin{pmatrix}-b\cos\theta\\b\sin\theta\\0\end{pmatrix}_{\Re} + \begin{pmatrix}-v_{A/\Re'}\cos\theta\\v_{A/\Re'}\sin\theta\\0\end{pmatrix}_{\Re}$$

$$\begin{pmatrix}-b\omega\sin\theta\\b\omega\cos\theta\\0\end{pmatrix}_{\Re} = \begin{pmatrix}-b\omega_{BA}\sin\theta\\-b\omega_{BA}\cos\theta\\0\end{pmatrix}_{\Re} + \begin{pmatrix}-v_{A/\Re'}\cos\theta\\v_{A/\Re'}\sin\theta\\0\end{pmatrix}_{\Re}$$

$$\Rightarrow \quad -b\omega\sin\theta = -b\omega_{BA}\sin\theta - v_{A/\Re'}\cos\theta \qquad (1)$$

និង $b\omega\cos\theta = -b\omega_{BA}\cos\theta + v_{A/\Re'}\sin\theta \qquad (2)$

យក $(1)\times\sin\theta + (2)\times\cos\theta$ យើងបាន៖

$$b\omega\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = -b\omega_{BA} \quad \Rightarrow \quad \omega_{BA} = \left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)\omega$$

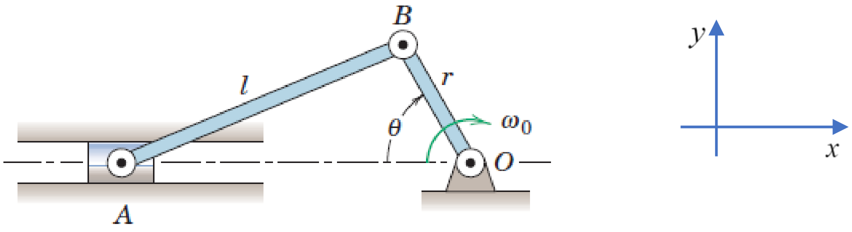
ចំពោះ $\theta = 30^0$, $\omega = 3\text{rad/s}$ យើងបាន៖

$$\omega_{BA} = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)\times 3 = -1.5\text{rad/s}$$ (វិលក្នុងទិសដៅទ្រនិចនាឡិកា)

សមីការ(2) យើងបានល្បឿនធៀប៖

$$v_{A/\Re'} = \frac{b\omega\cos\theta + b\omega_{BA}\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1\times(3-1.5)\frac{\sqrt{3}}{2}}{1/2} = 1.6\,\text{m/s}$$

ឧទាហរណ៍៧៖ ប្រព័ន្ធមេកានិចមួយដែលមានជុំអិល។ ចូរសំដែងល្បឿនមុំ ω_{AB} និងសំទុះមុំ α_{AB} នៃដង AB ជាអនុគមន៍នៃមុំ θ ចំពោះខណៈដែលឱ្យល្បឿនមុំ ω_0 ។



ដំណោះស្រាយ

សំដែងល្បឿនមុំ ω_{AB} និងសំទុះមុំ α_{AB} នៃដង AB ជាអនុគមន៍នៃមុំ θ ៖

ល្បឿនចំណុច B ៖ $\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega}_O \times \overrightarrow{OB}$, $\vec{v}_O = \vec{0}$

សំទុះនៃចំណុច B ៖ $\vec{a}_B = \dfrac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{\omega}_O \times \left(\vec{\omega}_O \times \overrightarrow{OB}\right) = -\omega_O^2\overrightarrow{OB}$

ម្យ៉ាងទៀត $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \overrightarrow{AB}$ និង $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \times \overrightarrow{AB} - \omega_{AB}^2\overrightarrow{AB}$

យើងបាន៖ $\vec{v}_O + \vec{\omega}_O \times \overrightarrow{OB} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \overrightarrow{AB}$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\-\omega_0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\cos\theta\\r\sin\theta\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_A\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\omega_{AB}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}l\cos\beta\\r\sin\theta\\0\end{pmatrix}\quad \text{ឬ}\quad \begin{pmatrix}r\omega_0\sin\theta\\r\omega_0\cos\theta\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_A\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-r\omega_{AB}\sin\theta\\l\omega_{AB}\cos\beta\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad r\omega_0\sin\theta=v_A-r\omega_{AB}\sin\theta$$

$r\omega_0\cos\theta=l\omega_{AB}\cos\beta \quad\Rightarrow\quad \omega_{AB}=\dfrac{r\omega_0\cos\theta}{l\cos\beta}$ ដោយ $\dfrac{r}{\sin\beta}=\dfrac{l}{\sin\theta}\quad\Rightarrow\quad \sin\beta=\dfrac{r}{l}\sin\theta$

ដូចនេះ ល្បឿនមុំនៃជងAB គឺ $\omega_{AB}=\dfrac{r\omega_0\cos\theta}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\theta}}$ និង $-\omega_0^2\overrightarrow{OB}=\vec{a}_A+\vec{\alpha}_{AB}\times\overrightarrow{AB}-\omega_{AB}^2\overrightarrow{AB}$

$$-\omega_0^2\begin{pmatrix}-r\cos\theta\\r\sin\theta\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_A\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\alpha_{AB}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}l\cos\beta\\r\sin\theta\\0\end{pmatrix}-\omega_{AB}^2\begin{pmatrix}l\cos\beta\\r\sin\theta\\0\end{pmatrix}$$

ឬ

$$-\omega_0^2\begin{pmatrix}-r\cos\theta\\r\sin\theta\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_A\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-r\alpha_{AB}\sin\theta\\l\alpha_{AB}\cos\beta\\0\end{pmatrix}-\omega_{AB}^2\begin{pmatrix}l\cos\beta\\r\sin\theta\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad -r\omega_0^2\sin\theta=l\alpha_{AB}\cos\beta-r\omega_{AB}^2\sin\theta$$

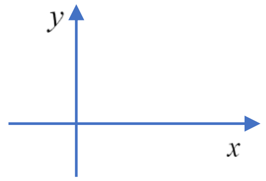
$$\Rightarrow\quad \alpha_{AB}=\frac{r\sin\theta\left(\omega_{AB}^2-\omega_0^2\right)}{l\cos\beta}\qquad \omega_{AB}=\frac{r\omega_0\cos\theta}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\theta}}$$

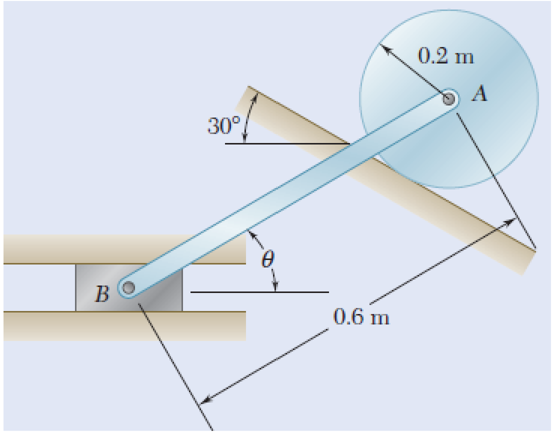
ដូចនេះសំទុះមុំនៃ AB គឺ $\alpha_{AB}=\dfrac{r\sin\theta\left(\dfrac{r^2\omega_0^2\cos^2\theta}{l^2-r^2\sin^2\theta}-\omega_0^2\right)}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\theta}}=\dfrac{r\omega_0^2\sin\theta\left(r^2-l^2\right)}{\left(l^2-r^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}$

ឧទាហរណ៍៨៖ ថាសមួយត្រូវបានលែងពីនៅស្ងៀម ហើយរមៀលចុះតាមប្លង់ទេ។ ដោយដឹងថា ល្បឿននៃ A គឺ 1.2 m/s នៅពេល $\theta=30^0$ ចូរកំណត់នៅខណៈនោះនូវ៖

ក. ល្បឿនមុំនៃជង AB ។

ខ. ល្បឿននៃ B ។





ដំណោះស្រាយ

ល្បឿននៃ A មានទិស្រេបនឹងប្លង់ទេរ ទិសដៅមកក្រោម។ ល្បឿននៃ B មានទិសដេកទៅស្តាំ។

ដោយ A និង B នៅលើរបារតែមួយ យើងបាន៖

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \overrightarrow{AB}$$

$$\begin{pmatrix} v_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_A \cos 30^0 \\ -v_A \sin 30^0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -AB\sin\theta \\ -AB\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_A \cos 30^0 \\ -v_A \sin 30^0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} AB\omega_{AB}\cos\theta \\ -AB\omega_{AB}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad v_B = v_A + AB\omega_{AB}\cos\theta \qquad (1)$$

និង $v_A \sin 30^0 + AB\omega_{AB}\sin\theta = 0 \qquad (2)$

ក. ល្បឿនមុំនៃដង AB ៖

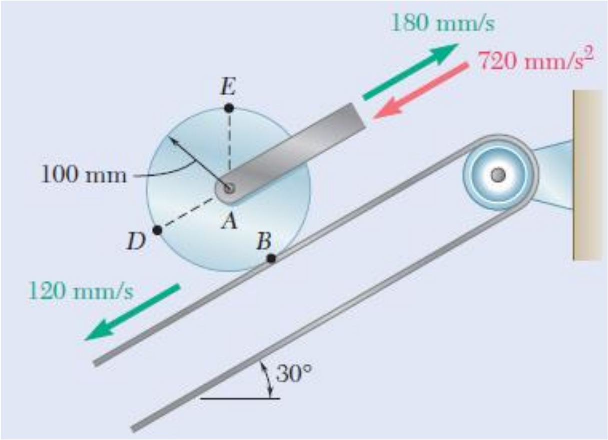
ចំពោះ $\theta = 30^0,\ \ AB = 0.6\text{m}\ ,\ v_A = 1.2\text{m/s}$

ពីសមីការ(2) $\Rightarrow\ 0.6 + 0.3\omega_{AB} = 0 \ \Rightarrow\ \omega_{AB} = -2\,\text{rad/s}$

ខ. ល្បឿននៃ B ៖

ពីសមីការ (1) $\Rightarrow\ v_B = 1.2 + 0.52\omega_{AB} = 1.2 + 0.52\times(-2) = 0.16\ \text{m/s}$

ឧទាហរណ៍៩៖ ស្ពូលមានកាំ 100 mm រមៀលដោយគ្មានរអិលលើកំណាត់ខ្សែពានដែលចលនាចុះក្រោមទៅឆ្វេង ជាមួយល្បឿនថេរ 120 mm/s ។ ដោយដឹងថា នៅខណៈដែលឱ្យល្បឿននិងសំទុះនៃផ្ចិត A របស់ស្ពូលដូចបង្ហាញលើរូប ចូរកំណត់សំទុះនៃចំណុច D។



ដំណោះស្រាយ

សំទុះរបស់ចំណុច D ៖

ចំណុច D នៅលើស្គរ យើងបាន៖ $\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AD}$ និង $\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \overrightarrow{BD}$

$$\Rightarrow \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AD} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \overrightarrow{BD}$$

ឬ $$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD}\right) = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \overrightarrow{BA}$$

$$\begin{pmatrix} 0.18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ឬ} \quad \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.1\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \; 0.18 = -0.12 - 0.1\omega \; \Rightarrow \; \omega = -3\text{rad/s}$ (ស្គររមៀលទៅស្តាំ តាមទិសដៅទ្រនិចនាឡិកា)

សំទុះនៃចំណុច D ៖ $\vec{a}_D = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{AD} - \omega^2 \overrightarrow{AD}$

$$\begin{pmatrix} a_{Dx} \\ a_{Dy} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.72 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0.12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 9 \begin{pmatrix} -0.12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ឬ} \quad \begin{pmatrix} a_{Dx} \\ a_{Dy} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.72 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.12\alpha \\ 0 \end{pmatrix} - 9 \begin{pmatrix} -0.12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \; a_{Dx} = -0.72 - 0.12 = -0.84 \text{ m/s}^2$ និង $a_{Dy} = -0.12\alpha$

ម្យ៉ាងទៀត $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{BA} - \omega^2 \overrightarrow{BA}$

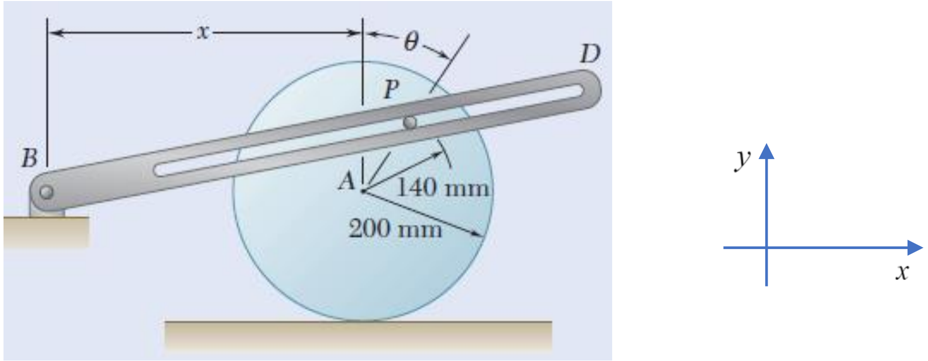
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.72 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0.12 \\ 0 \end{pmatrix} - 9 \begin{pmatrix} 0 \\ 0.12 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ឬ} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.72 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.12\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 9 \begin{pmatrix} 0 \\ 0.12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \; 0 = -0.72 - 0.12\alpha \; \Rightarrow \; \alpha = -3 \text{ rad/s}^2$

$$\Rightarrow\ a_{Dy} = -0.12\times(-3) = 0.72\ \text{m/s}^2$$

ដូចនេះសំទុះនៃចំណុច D គឺ $a_D = \sqrt{(-0.84)^2 + (0.72)^2} = 1.11\text{m/s}^2$

ឧទាហរណ៍១០៖ កន្លាស់ P ត្រូវបានភ្ជាប់ទៅកង់ដូចបង្ហាញ ហើយរអិលនៅក្នុងចង្អូរវះ នៅក្នុងរបារ BD។ កង់រមៀលទៅស្តាំដោយគ្មានរអិលជាមួយល្បឿនមុំថេរ 20 rad/s ។ ដោយដឹងថា $x = 480\text{mm}$ នៅពេល $\theta = 0$ ចូរកំណត់ល្បឿនមុំនៃរបារ និងល្បឿនធៀបនៃកន្លាស់ P ធៀបទៅនឹងជងនៅពេល៖ ក. $\theta = 0$ ខ. $\theta = 90^0$



ដំណោះស្រាយ

ល្បឿនមុំនៃរបារ និងល្បឿនធៀបនៃកន្លះ P ៖

ចំណុច P នៅជាប់កង់ យើងបាន៖ $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\overrightarrow{AP} = \vec{\omega}\times\overrightarrow{IA} + \vec{\omega}\times\overrightarrow{AP}$

ម្យ៉ាងទៀត P ធ្វើចលនាតាមចង្អូរនៃរបារ BD ៖ $\vec{v}_P = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

ដោយល្បឿននាំ $\vec{v}_e = \vec{\omega}_{BD}\times\overrightarrow{BP}$ យើងបាន៖ $\vec{\omega}_{BD}\times\overrightarrow{BP} + \vec{v}_r = \vec{\omega}\times\overrightarrow{IP}$

ក. ករណី $\theta = 0$ ៖

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\omega_{BD}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0.48\\0.14\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_{rx}\\v_{ry}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-10\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0.38\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-0.14\omega_{BD}\\0.48\omega_{BD}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_{rx}\\v_{ry}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3.8\\0\\0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ -0.14\omega_{BD} + v_{rx} = 3.8 \text{ និង } 0.48\omega_{BD} + v_{ry} = 0$$

ដោយ $v_{rx} = v_r\cos\alpha$, $v_{ry} = v_r\sin\alpha$ និង $\tan\alpha = \dfrac{140}{480}\ \Rightarrow\ \alpha = 16.26^0$

នោះ $-0.14\omega_{BD} + 0.96v_r = 3.8$ (1)

$0.48\omega_{BD} + 0.28 v_r = 0 \quad \Rightarrow \quad v_r = -1.71\omega_{BD}$ ជំនួសក្នុងសមីការ (1)

$(-0.14 - 1.65)\omega_{BD} = 3.8 \quad \Rightarrow \quad \omega_{BD} = -2.12 \text{rad/s}$

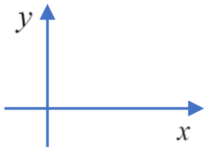
ល្បឿនធៀប $v_r = -1.71 \times (-2.12) = 3.63 \text{m/s}$

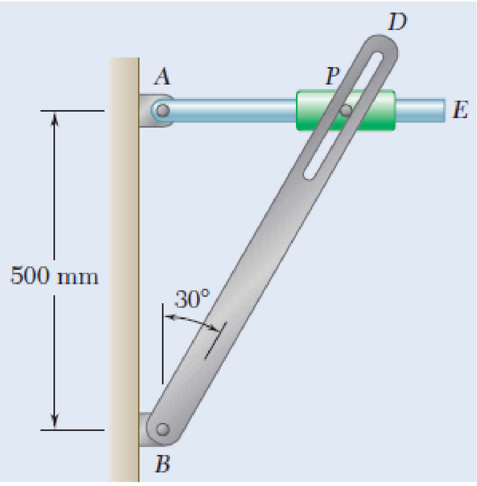
ខ. ករណី $\theta = 90^0$ ៖

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.34 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.62 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.34\omega_{BD} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6.2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_r = 0 \quad \text{និង} \quad \omega_{BD} = -\frac{6.2}{0.34} = -18.24 \text{rad/s}$$

ឧទាហរណ៍១១៖ កន្លាស់ P នៅជាប់ប្រឡៅដូចរូប ចលនានៃកន្លាស់ត្រូវបាននាំដោយចង្អូរនៅក្នុងដង BD និងដោយប្រឡៅដែលរអិលលើដង AE ។ ដោយដឹងថា នៅខណៈពិនិត្យ ដងវិលក្នុងទិសដៅទ្រនិចនាឡិកាជាមួយល្បឿនមុំថេរ $\omega_{AE} = 8 \text{rad/s}$ និង $\omega_{BD} = 3 \text{rad/s}$ ។ គណនាល្បឿននៃចំណុច P ។





ដំណោះស្រាយ

យកតម្រុយ $\Re_1$ ជាប់របារ AE មានអ័ក្ស x_1 នៅលើរបារ AE ។

យកតម្រុយ $\Re_2$ ជាប់របារ BD មានអ័ក្ស x_2 នៅលើរបារ BD ។

តាមច្បាប់បន្សំល្បឿន៖ $\vec{v}_P = \vec{\omega}_{AE} \times \overrightarrow{AP} + \vec{v}_{P/\Re_1}$ និង $\vec{v}_P = \vec{\omega}_{BD} \times \overrightarrow{BP} + \vec{v}_{P/\Re_2}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega}_{AE} \times \overrightarrow{AP} + \vec{v}_{P/\Re_1} = \vec{\omega}_{BD} \times \overrightarrow{BP} + \vec{v}_{P/\Re_2}$$

សំដែងនៅក្នុងគោល $\Re$ ៖

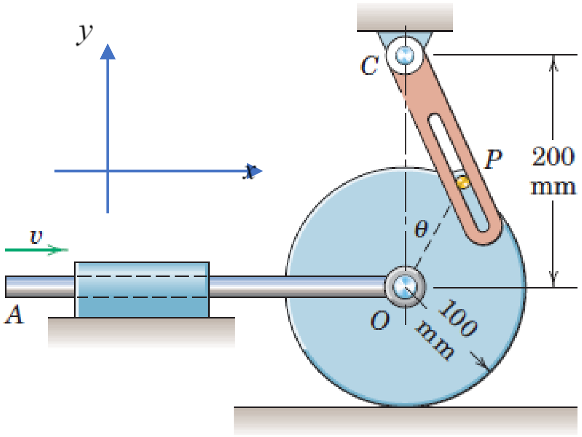
$$\begin{pmatrix}0\\0\\-8\end{pmatrix}_{\Re}\times\begin{pmatrix}0.5\tan 30^0\\0\\0\end{pmatrix}_{\Re}+\begin{pmatrix}v_{P/\Re_1}\\0\\0\end{pmatrix}_{\Re_1}=\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}_{\Re}\times\begin{pmatrix}0.5\tan 30^0\\0.5\\0\end{pmatrix}_{\Re}+\begin{pmatrix}v_{P/\Re_2}\sin 30^0\\v_{P/\Re_2}\cos 30^0\\0\end{pmatrix}_{\Re}$$

$$\begin{pmatrix}0\\-2.4\\0\end{pmatrix}_{\Re}+\begin{pmatrix}v_{P/\Re_1}\\0\\0\end{pmatrix}_{\Re}=\begin{pmatrix}1.5\\-0.9\\0\end{pmatrix}_{\Re}+\begin{pmatrix}0.5v_{P/\Re_2}\\0.87v_{P/\Re_2}\\0\end{pmatrix}_{\Re}$$

$$\Rightarrow\ v_{P/\Re_1}=1.5+0.5v_{P/\Re_2}\qquad(1)$$

$$-2.4=-0.9+0.87v_{P/\Re_2}\ \Rightarrow\ v_{P/\Re_2}=\frac{-1.5}{0.87}=-1.72\text{m/s}$$

ឧទាហរណ៍១២៖ កង់រមៀលមិនរអិល។ នៅខណៈដែល ឱ្យ នៅពេល O នៅខាងក្រោមចំណុច C សន្លាក់ OA មានល្បឿន $v=1.5\text{m/s}$ ទៅស្តាំ និង $\theta=30^0$ ។ ចូរកំណត់ល្បឿនមុំ ω នៃសន្លាក់មានចង្អូរ និងល្បឿននៃ P ធៀបសន្លាក់។



ដំណោះស្រាយ

កំណត់ល្បឿនមុំ ω នៃសន្លាក់មានចង្អូរ៖

ល្បឿនផ្ចិត O ស្មើនឹងល្បឿនរំកិលនៃដង AO គឺ $v_0=v=1.5\text{m/s}$

និងល្បឿនមុំនៃកង់ $\omega_0=\frac{1.5}{0.1}=15\text{rad/s}$

កន្លះ P នៅជាប់កង់ នោះ $\vec{v}_P=\vec{v}_0+\vec{\omega}_0\times\overrightarrow{OP}$

ម្យ៉ាងទៀត P ចលនានៅក្នុងចង្អូរនៃសន្លាក់ យើងបាន៖ $\vec{v}_P=\vec{v}_e+\vec{v}_r$

ដោយល្បឿននាំ $\vec{v}_e=\vec{\omega}\times\overrightarrow{CP}$ $\Rightarrow$ $\vec{v}_0+\vec{\omega}_0\times\overrightarrow{OP}=\vec{\omega}\times\overrightarrow{CP}+\vec{v}_r$

ដោយ $v_0=1.5\text{ m/s}$, $\omega_0=15\text{ rad/s}$ និងក្នុងរូប $CP=OP=0.1\text{ m}$ នោះ៖

$$\begin{pmatrix}1.5\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-15\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0.1\sin\theta\\0.1\cos\theta\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0.1\sin\theta\\-0.1\cos\theta\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_r\sin\theta\\-v_r\cos\theta\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1.5\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1.5\cos\theta\\-1.5\sin\theta\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.1\omega\cos\theta\\0.1\omega\sin\theta\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_r\sin\theta\\-v_r\cos\theta\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\ 1.5+1.5\cos\theta=0.1\omega\cos\theta+v_r\sin\theta$ (1)

និង $-1.5\sin\theta=0.1\omega\sin\theta-v_r\cos\theta$ (2)

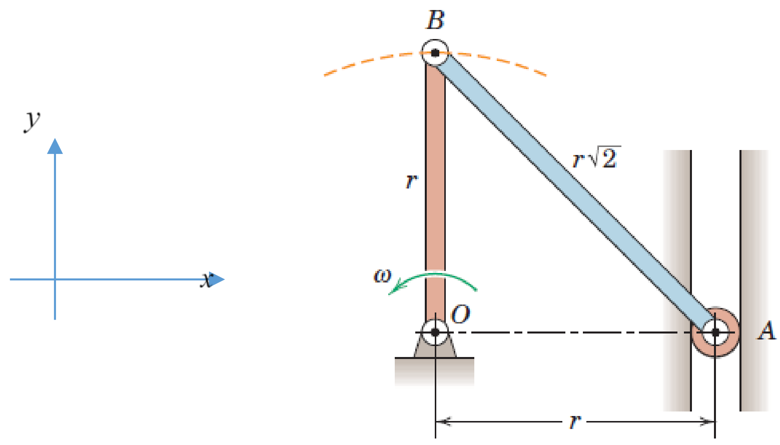
យក $(1)\times\cos\theta+(2)\sin\theta$ យើងបាន៖

$1.5\left(\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=0.1\omega$ ចំពោះ $\theta=30^0$

$$\Rightarrow\ \omega=15\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=5.49\text{ rad/s}$$

ពីសមីការ(1) នោះ $v_r=\dfrac{1.5\sin\theta+0.1\omega\sin\theta}{\cos\theta}=1.183\text{ m/s}$

ឧទាហរណ៍១៣៖ ចូរកំណត់សំទុះមុំ α_{AB} នៃ AB ចំពោះទីតាំងដូចបង្ហាញ បើសន្លាក់ OB មានល្បឿនមុំថេរ ω ។



ដំណោះស្រាយ

កំណត់សំទុះមុំ α_{AB} នៃ AB ៖

ចំណុច O និង B នៅលើរបារតែមួយ យើងបាន៖ $\vec{v}_B=\vec{v}_O+\vec{\omega}\times\overrightarrow{OB}$, $\vec{v}_O=\vec{0}$

និង $\vec{a}_B=\vec{a}_O+\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\times\overrightarrow{OB}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{OB}\right)$, $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}=\vec{0}$ ឬ $\vec{a}_B=-\omega^2\overrightarrow{OB}$

ម្យ៉ាងទៀត ចំណុច B និង A នៅលើរបារតែមួយ យើងបាន៖

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \times \overrightarrow{AB}$ និង $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{AB} \times \overrightarrow{AB} - \omega_{AB}^2 \overrightarrow{AB}$

ដោយធ្វើការជំនួស យើងបាន៖ $\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OB} + \vec{\omega}_{AB} \times \overrightarrow{AB}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ឬ } \begin{pmatrix} 0 \\ v_A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r\omega_{AB} \\ -r\omega_{AB} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \ 0 = r\omega - r\omega_{AB} \ \Rightarrow \ \omega_{AB} = \omega$ និង $v_A = -r\omega$ (មានទិសដៅចុះក្រោម)

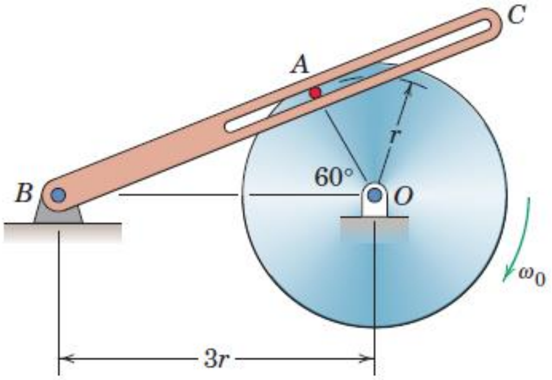
$\vec{a}_A = -\omega^2 \overrightarrow{OB} + \vec{\alpha}_{AB} \times \overrightarrow{AB} - \omega^2 \overrightarrow{AB}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a_A \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_{AB} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \\ r \\ 0 \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} -r \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ឬ } \begin{pmatrix} 0 \\ a_A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r\alpha_{AB} \\ -r\alpha_{AB} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\omega^2 \\ -r\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \ 0 = -r\alpha_{AB} + r\omega^2 \ \Rightarrow \ \alpha_{AB} = \omega^2$

និងសំទុះ $a_A = -3r\omega^2$ (មានទិសដៅចុះក្រោម)

ឧទាហរណ៍១៤៖ ថាសវិលជុំវិញអ័ក្សនឹងកាត់ចំណុច O ជាមួយល្បឿនមុំ $\omega_0 = 20\text{rad/s}$ ក្នុងទិសដៅទ្រនិចនាឡិកា និងល្បឿនមុំក្នុងទិសដៅផ្ទុយទ្រនិចនាឡិកា $\alpha_0 = 5\,\text{rad/s}^2$ នៅខណៈពិនិត្យ។ កាំ r = 200mm ។ កន្លាស់ A នៅនឹងជាប់ថាស ប៉ុន្តែរអិលដោយសេរីនៅក្នុងចង្អូរ BC ។



ក. ចូរកំណត់ល្បឿននៃចំណុច A ធៀបទៅនឹងចង្អូរ BC ។

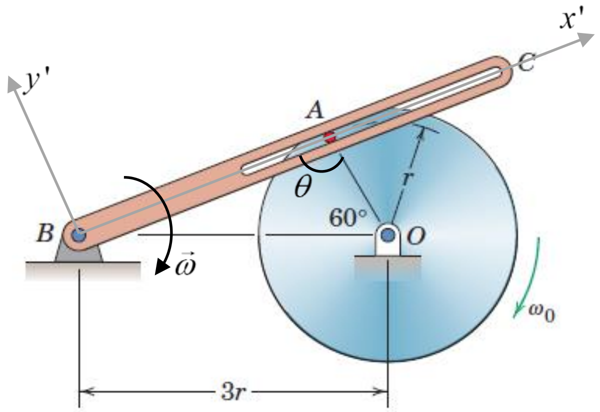
ខ. ចូរកំណត់សំទុះរបស់ចំណុចAធៀបទៅនឹងអង្អូរ BC និងសំទុះមុំនៃ BC ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ល្បឿននៃចំណុច A ធៀបទៅនឹងចង្អូរ BC និងល្បឿនមុំនៃរបារ BC ៖

យកតម្រុយ ℜ' នៅជាប់របារមានអ័ក្ស x' នៅជាប់របារ BC ។

ល្បឿននៃចំណុច A ធៀបនឹងរបារគឺ $\vec{v}_r = \dot{x}'\vec{i}\,'$



តាមច្បាប់បន្សំល្បឿន $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e$$

ដោយល្បឿនដាច់ខាត $\vec{v}_a = \vec{\omega}\times\overrightarrow{OA}$

និងល្បឿននាំ $\vec{v}_e = \vec{\omega}\times\overrightarrow{BA}$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_r = \vec{\omega}_0\times\overrightarrow{OA} + \vec{\omega}\times\overrightarrow{BA}$$

ដោយ $BA = \sqrt{(3r)^2 + r^2 - 2\times 3r\times r\cos 60^0} = r\sqrt{7}$

$$\frac{3r}{\sin\theta} = \frac{r\sqrt{7}}{\sin 60^0} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \quad \text{និង} \quad \cos\theta = \frac{r^2 + 7r^2 - 9r^2}{2\times r\times r\sqrt{7}} = \frac{-5}{2\sqrt{7}}$$

សំដែងក្នុងគោល ℜ' យើងបាន៖

$$\begin{pmatrix} v_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_0 \end{pmatrix}_{\Re'} \times \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix}_{\Re'} \times \begin{pmatrix} BA \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'}$$

$$\begin{pmatrix} v_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'} = \begin{pmatrix} r\omega_0\sin\theta \\ -r\omega_0\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'} + \begin{pmatrix} 0 \\ -BA\omega \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'}$$

$$\Rightarrow \quad v_r = r\omega_0\sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}r\omega_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\times 0.2\times 20 = 3.93 \text{ rad/s}$$

និង $0 = -r\omega_0\cos\theta - BA\omega$

$$\Rightarrow \quad \omega = -\frac{r\omega_0}{BA}\cos\theta = \frac{5}{14}\omega_0 = \frac{5}{14}\times 20 = 7.14 \text{ rad/s}$$

ខ. សំទុះរបស់ចំណុច A ធៀបទៅនឹងអង្គរ BC និងសំទុះមុំនៃ BC ៖

តាមច្បាប់បន្សំសំទុះ $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \quad \Rightarrow \vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_e - \vec{a}_c$

ដោយសំទុះដាច់ខាតនៃចំណុច A ៖ $\vec{a}_a = \vec{\alpha}_0\times\overrightarrow{OA} - \omega_0^2\overrightarrow{OA}$

សំទុះនាំ $\vec{a}_e = \vec{\alpha}\times\overrightarrow{BA} - \omega^2\overrightarrow{BA}$ និងសំទុះ Coriolis ៖ $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_r = \vec{\alpha}_0 \times \overrightarrow{OA} - \omega_0^2 \overrightarrow{OA} - \vec{\alpha} \times \overrightarrow{BA} + \omega^2 \overrightarrow{BA} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

$$\begin{pmatrix} a_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}_{\Re'} \times \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'} - \omega_0^2 \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}_{\Re'} \times \begin{pmatrix} BA \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'} + \omega^2 \begin{pmatrix} BA \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix}_{\Re'} \times \begin{pmatrix} v_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'}$$

$$\begin{pmatrix} a_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'} = \begin{pmatrix} -r\alpha_0 \sin\theta \\ r\alpha_0 \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'} - \begin{pmatrix} r\omega_0^2 \cos\theta \\ r\omega_0^2 \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'} - \begin{pmatrix} 0 \\ BA\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'} + \begin{pmatrix} BA\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2\omega v_r \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'}$$

$$\Rightarrow \quad a_r = -r\alpha_0 \sin\theta - r\omega_0^2 \cos\theta + BA\omega^2$$

$$a_r = -r\alpha_0 \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} + r\omega_0^2 \frac{5}{2\sqrt{7}} + r\sqrt{7}\omega^2 = 267.23\,\text{m/s}^2$$

និង $0 = r\alpha_0 \cos\theta - r\omega_0^2 \sin\theta - BA\alpha + 2\omega v_r$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{r\alpha_0 \cos\theta - r\omega_0^2 \sin\theta + 2\omega v_r}{BA} = 62.31\,\text{rad/s}^2$$

1.6. TORSEUR ស៊ីនេម៉ាទិច

រូបមន្តនៃរបាយល្បឿនត្រូវបានឱ្យដោយទំនាក់ទំនង៖ $\vec{v}_{B/\Re} = \vec{v}_{A/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{AB}$

រូបមន្តនៃការបញ្ជូននៃម៉ូម៉ង់រវាងចំណុចពីរ A និង B នៃអង្គធាតុមានកន្សោម៖ $\overrightarrow{M}(B) = \overrightarrow{M}(A) + \vec{R} \times \overrightarrow{AB}$ យើងសម្គាល់ឃើញថាមានអេគីវ៉ាឡង់រវាងសមីការទាំងពីរ។ វ៉ិចទ័រល្បឿននៅចំណុច(B)ជាម៉ូម៉ង់នៅចំណុច B នៃ torseur ដែលយើងនឹងកំណត់៖ $[C]_B$ និងលទ្ធផលគឺមានតែវ៉ិចទ័ររង្វិល $\vec{\Omega}(\Re'/\Re)$ ។ Torseur ស៊ីនេម៉ាទិចនៅចំណុច B ឬ (torseur នៃរបាយល្បឿន) ទាក់ទងទៅចលនានៃអង្គធាតុធៀបនឹង $\Re$ មានចំពោះជាតុបង្រួម៖

- ល្បឿនរង្វិល $\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}$

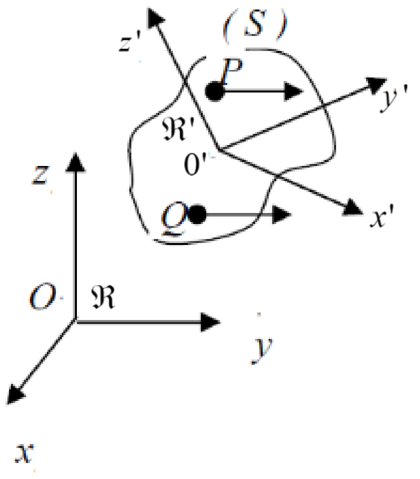
- ល្បឿនចំណុច $B: \vec{v}_{B/\Re}$

វាកំណត់ក្រោមទម្រង់៖ $[C]_B = \begin{cases} \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \\ \vec{v}_{B/\Re} = \vec{v}_{A/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{AB} \end{cases}$

Torseur ស៊ីនេម៉ាទិចគឺសំខាន់ណាស់ ព្រោះវាចរិកលក្ខណៈទាំងស្រុងនូវចលនាអង្គធាតុធៀបទៅនឹងតម្រុយ $\Re$ ដែលទាក់ទងល្បឿន។

2. ចលនាគ្រឹះពិសេស

2.1. ចលនារំកិលសុទ្ធ



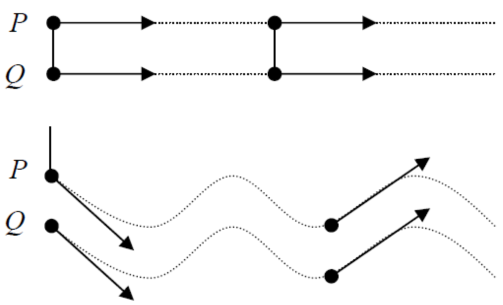
អង្គធាតុ(S)ភ្ជាប់ទៅតម្រុយ ℜ' ត្រូវបាននិយាយថាចលនារំកិលសុទ្ធធៀបទៅនឹងតម្រុយ ℜ បើអ័ក្សនៃតម្រុយ ℜ' រក្សាទិសថេរធៀបទៅនឹងអ័ក្សនៃតម្រុយ ℜ ។ គ្រប់ចំណុចនៃអង្គធាតុមានល្បឿននិងសំទុះដូចៗគ្នា។

ល្បឿនរង្វិលនៃអង្គធាតុសូន្យធៀបនឹង ℜ។ យើងអាចសរសេរ៖ $\vec{v}_{P/\Re} = \vec{v}_{O'/\Re}$ និង $\vec{\Omega}(\Re'/\Re) \times \overrightarrow{O'P} = \vec{0}$

ដោយសារ $\overrightarrow{O'P} \neq \vec{0}$ នោះ $\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}$ នៅក្នុងករណីនេះ ល្បឿនជាដែនឯកសណ្ឋាន។

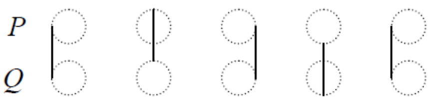
Torseur ស៊ីនេម៉ាទិចដែលពណ៌នាចលនារំកិលសុទ្ធជា torseur គូដែលលទ្ធផលគឺសូន្យ ប៉ុន្តែម៉ូម៉ង់មិនសូន្យ។

$$[C_{\Re'/\Re}]_P = \begin{cases} \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} = \vec{0} \\ \vec{v}_{P/\Re} = \vec{v}_{Q/\Re} \neq \vec{0} \end{cases}$$



ចំណុចទាំងពីរ P និង Q នៃអង្គធាតុ៖

- គន្លងរំកិលត្រង់
- គន្លងរំកិលកោង: ល្បឿនចំណុចPនិងQស្របគ្នានិងស្មើគ្នា។
- គន្លងរំកិលវង់ ចំណុច P និង Q គូសរង្វង់មានកាំដូចគ្នា នៅល្បឿនដូចគ្នា។



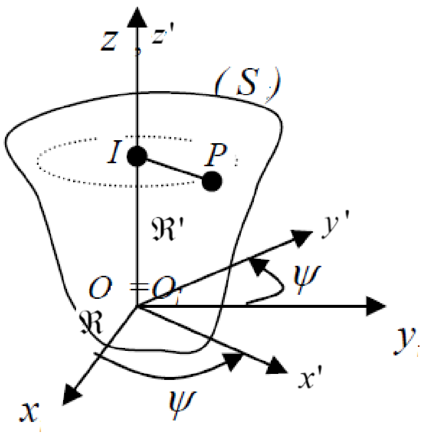
2.2. ចលនារង្វិលសុទ្ធជុំវិញអ័ក្សនៃអង្គធាតុ

ក. ល្បឿននៃចំណុចP

អង្គធាតុ(S)ភ្ជាប់ទៅតម្រុយ ℜ' ត្រូវបាននិយាយ ចលនារង្វិលសុទ្ធធៀបទៅនឹងតម្រុយ ℜ ។ តម្រុយ ℜ' ធ្វើចលនារង្វិលសុទ្ធធៀបទៅនឹងតម្រុយ ℜ នៅល្បឿនមុំឱ្យដោយ៖ $\vec{\Omega}_{\Re'/\Re} = \dot{\psi}\vec{k}$ និង $\vec{v}_{O/\Re} = \vec{0}$ ។ ឱ្យ P ជាចំណុចណាមួយនៃអង្គធាតុនិងមិនកម្មសិទ្ធិរបស់អ័ក្សរង្វិលដែល៖ $\overrightarrow{IP} = r\,\vec{i}\,'$ ។

$\vec{v}_{I/\Re} = \vec{v}_{O'/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{O'I}$

$\vec{\Omega}_{\Re'/\Re} // \overrightarrow{O'I} \Rightarrow \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{O'I} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{I/\Re} = \vec{v}_{O'/\Re}$



I និង Pជាចំណុចពីរនៃអង្គធាតុ យើងអាចសរសេរ៖

$\vec{v}_{P/\Re} = \vec{v}_{I/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{IP} = \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{IP}$

$\vec{v}_{P/\Re} = \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{IP} = \dot{\psi}\vec{k}' \times r\vec{i}' = r\dot{\psi}\,\vec{j}'$

នៅក្នុងចលនារង្វិលសុទ្ធ torseur នៃល្បឿនគឺសមមូលទៅនឹង torseur រអិលដោយ៖

$$[C_{\Re'/\Re}]_P = \begin{cases} \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \\ \vec{v}_{I/\Re} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{ដោយ} \quad I \in \vec{k}, \vec{k}'$$

ខ. សំទុះចំណុច P នៃអង្គធាតុ

កន្សោមសំទុះ $\vec{a}_{P/\Re} = \left(\dfrac{d\vec{v}_{P/\Re}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\dfrac{d\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}}{dt}\right)_{\Re} \times \overrightarrow{IP} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \left(\dfrac{d\overrightarrow{IP}}{dt}\right)_{\Re}$

ដោយ $\left(\dfrac{d\overrightarrow{IP}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{IP}}{dt}\right)_{\Re'} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{IP}$ ហើយ $\overrightarrow{IP} =$ ថេរនៅក្នុង $\Re'$ នោះ $\left(\dfrac{d\overrightarrow{IP}}{dt}\right)_{\Re'} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{a}_{P/\Re} = \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}}{dt}\right)_{\Re} \times \overrightarrow{IP} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \left(\vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{IP}\right)$$

ដោយពន្លាតកន្សោមនេះ យើងទទួលបាន៖

$$\Rightarrow \vec{a}_{P/\Re} = \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}}{dt}\right)_{\Re} \times \overrightarrow{IP} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re}\left(\vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \cdot \overrightarrow{IP}\right) - \overrightarrow{IP}\left(\vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \cdot \vec{\Omega}_{\Re'/\Re}\right)$$

ដោយ $\vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \cdot \overrightarrow{IP} = 0$, $\vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \cdot \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} = \vec{\Omega}^2_{\Re'/\Re}$

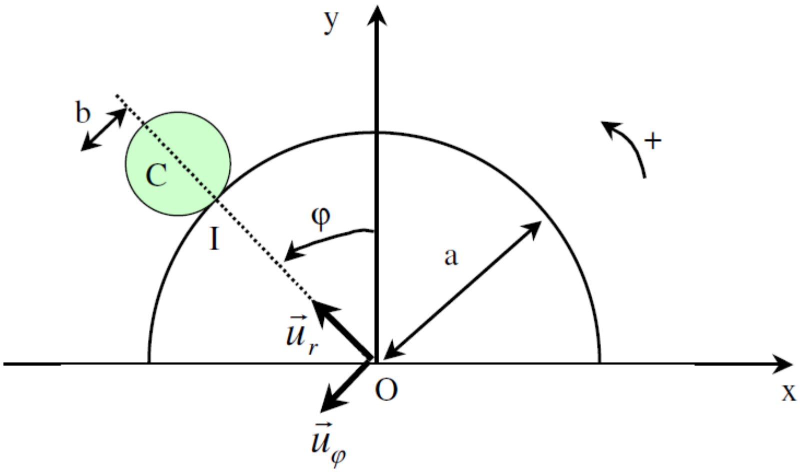
កន្សោមសំទុះចុងក្រោយគឺ៖ $\vec{a}_{P/\Re} = \left(\dfrac{d\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}}{dt}\right)_{\Re} \times \overrightarrow{IP} - \overrightarrow{IP}\,\vec{\Omega}^2_{\Re'/\Re}$

យើងបានសំទុះផ្គុំប៉ះ៖ $\vec{a}_{t(P/\Re)} = \left(\dfrac{d\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}}{dt}\right)_{\Re} \times \overrightarrow{IP}$

និងសំទុះផ្គុំកែង $\vec{a}_{n(P/\Re)} = -\overrightarrow{IP}\,\vec{\Omega}^2_{\Re'/\Re}$

ដោយ $\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}=\dot{\psi}\vec{k}$, $\overrightarrow{IP}=r\vec{i}\,'$ នោះ $\vec{a}_{P/\Re}=r\ddot{\psi}\vec{j}\,'-r\dot{\psi}^2\vec{i}\,'$

ឧទាហរណ៍១៥៖ កង់ផ្ចិត C មានកាំ b រមៀលមិនរអិលលើស៊ីឡាំងមានផ្ចិត O និងកាំ a នៅនឹងក្នុងប្លង់ឈរ។ ចូរកំណត់ល្បឿនមុំ $\vec{\Omega}$ នៃកង់ជាអនុគមន៍នៃ $\varphi=\left(\vec{j},\overrightarrow{OC}\right)$ ។



ដំណោះស្រាយ

ដោយយកតម្រុយ $\Re$ នៅនឹង(ជាប់ស៊ីឡាំង) ហើយ $\Re'$ ជាតម្រុយនៅជាប់កង់។

ល្បឿននៅត្រង់ចំណុចប៉ះ I ៖ $\vec{v}_{I/\Re}=\vec{v}_{C/\Re}+\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}\times\overrightarrow{CI}=\vec{0}$

ដោយសារគ្មានការរអិលរបស់កង់លើស៊ីឡាំង។

ដោយ $\overrightarrow{CI}=-b\vec{u}_r$, $\vec{v}(C/\Re)=\left(\dfrac{d(a+b)\vec{u}_r}{dt}\right)_{\Re}=(a+b)\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$

យើងបាន $(a+b)\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi-\Omega b\vec{u}_\varphi=\vec{0}\quad\Rightarrow\quad\Omega=\dfrac{a+b}{b}\dot{\varphi}$

ឧទាហរណ៍១៦៖ ប្រព័ន្ធមួយផ្សំពីអង្គធាតុពីរ(S_1)ភ្ជាប់ទៅតម្រុយ $\Re_1(C,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ និង (S_2)ភ្ជាប់ទៅតម្រុយ $\Re_2(C,\vec{i}_2,\vec{j}_2,\vec{k}_2)$ ចលនាធៀបទៅនឹងតម្រុយ $\Re(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។

(S_1)៖ជារបារមានប្រវែង L មានម៉ាសmមានចុង A រអិលលើជញ្ជាំងនិងចុង B ភ្ជាប់ទៅសន្លាក់ថាស។

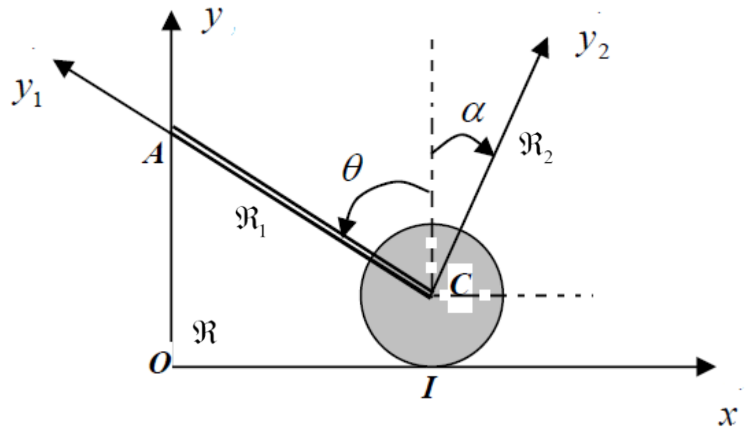
(S_2)៖ជាថាសមានម៉ាស M និងកាំ R ដែលរមៀលមិនរអិលលើប្លង់ដេកដូចបង្ហាញលើរូប។

ក. ចូរកំណត់ទំនាក់ទំនងដែលសំដែងមិនរអិលនៃថាសលើប្លង់ត្រង់ចំណុច I ។

ខ. ចូរកំណត់ផ្ចិតខណៈនៃវង្វិល(C.I.R)នៃរបារ៖

ខ. ១. ដោយធរណីមាត្រ។

ខ. ២. ដោយវិភាគ។



ដំណោះស្រាយ

$\Re$ ជាតម្រុយនៅនឹង នោះ $\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix} L\sin\theta \\ R \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re}$, $\overrightarrow{OI}=\begin{pmatrix} L\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re}$

$\Re_1$ នៅជាប់របារ ដែល $\theta=(\vec{i},\vec{i}_1)=(\vec{j},\vec{j}_1)$ និង $\vec{\Omega}_{\Re_1/\Re}=\dot{\theta}\vec{k}_1=\dot{\theta}\vec{k}$

$\Re_2$ នៅជាប់ថាស ដែល $\alpha=(\vec{i},\vec{i}_2)=(\vec{j},\vec{j}_2)$ និង $\vec{\Omega}_{\Re_2/\Re}=-\dot{\alpha}\vec{k}_1=-\dot{\alpha}\vec{k}$

ក. លក្ខខណ្ឌរមៀលមិនរអិល៖

លក្ខខណ្ឌមិនរអិលនៃថាសលើប្លង់ត្រូវបានផ្ទៀងផ្ទាត់ បើល្បឿននៃចំណុច I ជាកម្មសិទ្ធិរបស់ថាសសូន្យ៖ $\vec{v}(I\in dis)=\vec{0}$ តាមស៊ីនេម៉ាទិចនៃអង្គធាតុសរសេរ៖

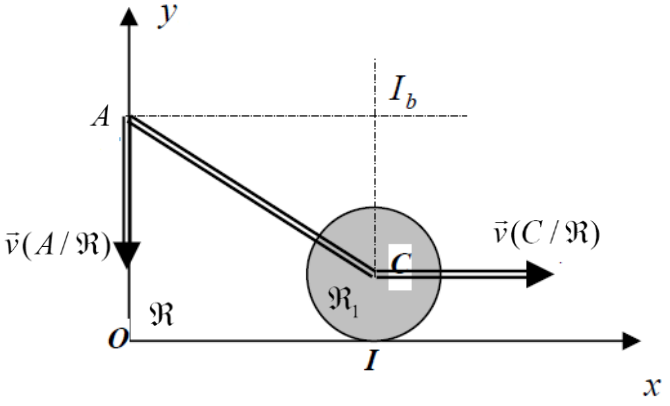
$$\vec{v}_{I/\Re}=\vec{v}_{C/\Re}+\vec{\Omega}_{\Re_2/\Re}\times\overrightarrow{CI}=\vec{0} \quad \text{ដោយ} \quad \vec{v}_{C/\Re}=\left(\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right)_{\Re}=\begin{pmatrix} L\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re}$$

$$\begin{pmatrix} L\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\alpha} \end{pmatrix}_{\Re}\times\begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re} \Rightarrow L\dot{\theta}\cos\theta-R\dot{\alpha}=0$$

ខ. ផ្ចិតខណៈនៃរង្វិលរបស់របារ៖

ខ. ១. តាមធរណីមាត្រ៖

ឱ្យ I_b ផ្ចិតខណៈវង្វិល(C.I.R)នៃរបារ។ ទីតាំងរបស់វាត្រូវបានត្រុយដោយគូសបន្ទាត់ពីរ មួយកែងទៅនឹងល្បឿន $\vec{v}(A/\Re)$ ត្រង់ A ហើយមួយទៀតកែងទៅនឹង $\vec{v}(C/\Re)$ ត្រង់ C។ ចំណុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់ទាំងពីជា (C.I.R) នៃរបារ។



ជាលទ្ធផល យើងបាន៖ $\vec{v}_{I_b/\Re} = \vec{v}_{A/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} \times \overrightarrow{AI_b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{A/\Re} = \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} \times \overrightarrow{I_bA}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_{A/\Re} \perp \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} \\ \vec{v}_{A/\Re} \perp \overrightarrow{I_bA} \end{cases}$$

$$\vec{v}_{I_b/\Re} = \vec{v}_{C/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} \times \overrightarrow{CI_b} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{C/\Re} = \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} \times \overrightarrow{I_bA}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_{C/\Re} \perp \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} \\ \vec{v}_{C/\Re} \perp \overrightarrow{I_bC} \end{cases}$$

ខ. តាមវិភាគ៖

$$\overrightarrow{OI_b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\Re} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{CI}_b = \begin{pmatrix} x - L\sin\theta \\ y - R \\ z \end{pmatrix}_{\Re}$$

យើងនិយាយថា $\vec{v}_{I_b/\Re} = \vec{v}_{C/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} \times \overrightarrow{CI}_b = \vec{0}$

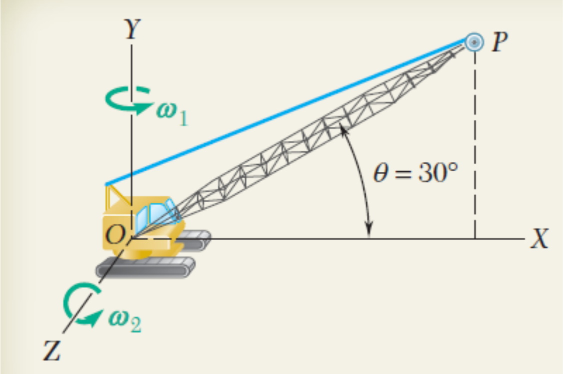
$$\vec{v}_{C/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re_2/\Re} \times \overrightarrow{CI_b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} L\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re} \times \begin{pmatrix} x - L\sin\theta \\ y - R \\ z \end{pmatrix}_{\Re} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re}$$

$$\Rightarrow \quad x = L\sin\theta, \;\; y = R + L\cos\theta, \;\; z = 0$$

ឧទាហរណ៍១៧៖ ដងសន្ទូចវិលជាមួយល្បឿនមុំថេរ $\omega = 0.30\text{rad/s}$។ ទន្ទឹមគ្នាដែរ ដងត្រូវបានលើកឡើងជាមួយល្បឿនមុំថេរ $\omega_2 = 0.50\text{rad/s}$ ធៀបតួម៉ាស៊ីន។ ដោយដឹងថាប្រវែងដង $OP = l = 12\text{m}$ ចូរកំណត់៖

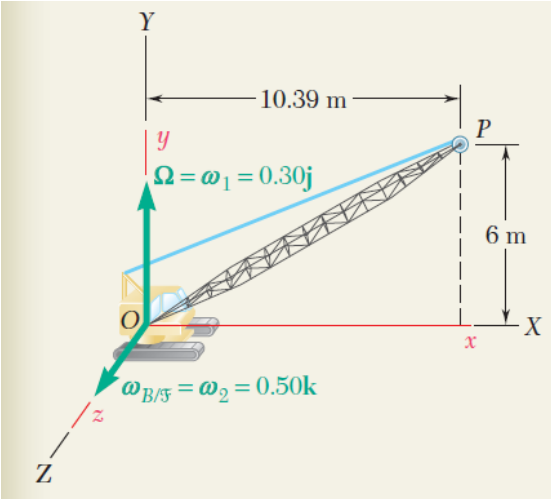
ក. ល្បឿននៅចុងនៃដង។

ខ. សំទុះនៅចុងនៃដង។



ដំណោះស្រាយ

តម្រុយ $\Re(OXYZ)$ នៅនឹង ហើយតម្រុយ $\Re'(0xyz)$ នៅជាប់តួម៉ាស៊ីន។



ក. ល្បឿននៃចុង P ៖

$$\vec{v}_{P/\Re} = \vec{v}_{O'/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{O'P} + \vec{\Omega}_{P/\Re'} \times \overrightarrow{O'P}$$

$$\vec{v}_{P/\Re} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O'P} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{O'P}$$

$$\vec{v}_{P/\Re} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.30 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12\cos 30^0 \\ 12\sin 30^0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.50 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12\cos 30^0 \\ 12\sin 30^0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0.30 \\ 0.50 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10.4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5.2 \\ -3.12 \end{pmatrix}$$

ឬ $\vec{v}_{P/\Re} = -3\vec{i} + 5.20\vec{j} - 3.12\vec{k}$ m/s

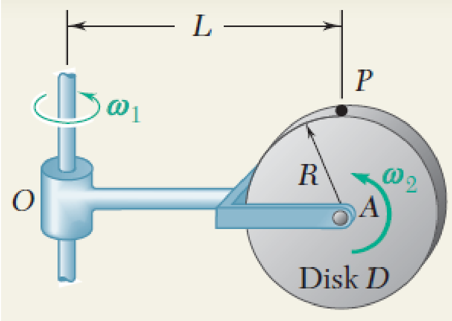
ខ. សំទុះនៃចុង P ៖

$$\vec{a}_{P/\Re} = \vec{\omega}_1 \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}\right) + \vec{\omega}_2 \times \left(\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{OP}\right) + 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{P/\Re'}$$

ជំនួសជាលេខ នោះយើងបាន៖ $\vec{a}_{P/\Re} = -3.54\vec{i} - 1.50\vec{j} + 1.80\vec{k}$ m/s^2

ឧទាហរណ៍១៨៖ ថាស D មានកាំ R ដាក់ឱ្យវិលនៅចុង A នៃដៃ OA មានប្រវែង L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ថាស។ ដៃវិលជុំវិញអ័ក្សឈរកាត់តាម O នៅល្បឿនមុំថេរ $\vec{\omega}_1$ និងថាសវិលជុំវិញ A នៅល្បឿនមុំថេរ $\vec{\omega}_2$ ។ ចូរកំណត់៖

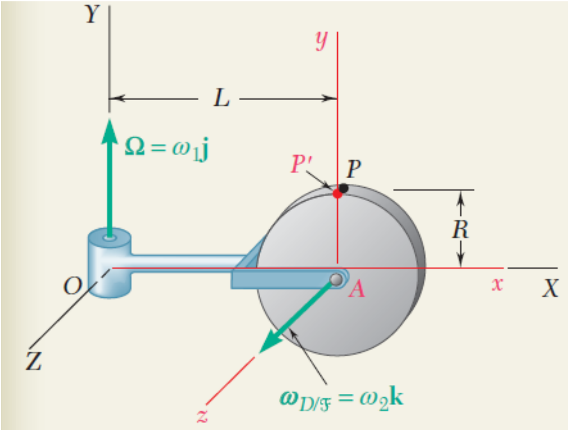
ក. ល្បឿនចំណុច P នៅខាងលើ A ចំ។ ខ. សំទុះនៃចំណុច P ។ គ. ល្បឿនមុំនិងសំទុះមុំនៃថាស។



ដំណោះស្រាយ

$\Re(OXYZ)$ ជាតម្រុយនៅនឹង ហើយ $\Re'$ នៅជាប់អ័ក្សថាស។

ក. ល្បឿននៃចំណុច P ៖



$$\vec{v}_{P/\Re} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{OA} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{v}_{P/\Re} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{P/\Re} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L\omega_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R\omega_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{P/\Re} = -R\omega_2\vec{i} - L\omega_1\vec{j}$$

ខ. សំទុះនៃចំណុច P ៖

$$\vec{a}_{P/\Re} = -\omega_1^2\overrightarrow{OA} - \omega_2^2\overrightarrow{AP} + 2\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AP}) = -\omega_1^2\begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \omega_2^2\begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_{P/\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} -L\omega_1^2 \\ -R\omega_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\omega_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L\omega_1^2 \\ -R\omega_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R\omega_1\omega_2 \end{pmatrix}$$

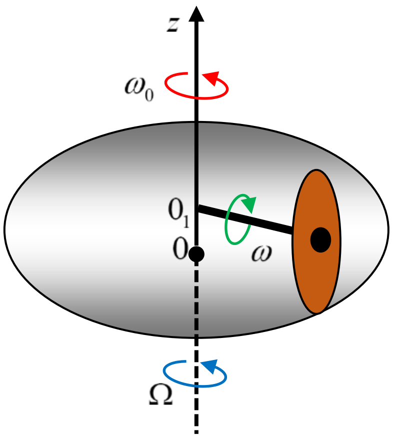
$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{P/\mathfrak{R}} = -L\omega_1^2\,\vec{i} - R\omega_2^2\,\vec{j} + R\omega_1\omega_2\vec{k}$$

គ. ល្បឿនមុំនៃថាស៖

$$\vec{\omega} = \omega_1\vec{j} + \omega_2\vec{k}$$

សំទុះមុំនៃថាស $\left(\dot{\vec{\omega}}\right)_{OXYZ} = \left(\dot{\vec{\omega}}\right)_{Axyz} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega} = \vec{0} + \omega_1\vec{j} \times (\omega_1\vec{j} + \omega_2\vec{k}) = \omega_1\omega_2\vec{i}$

ឧទាហរណ៍១៩៖ ថាសធំមួយមានកាំ R ដាក់ឱ្យវិលជុំវិញអ័ក្ស Oz។ នៅលើថាសនេះមានថាសតូចមួយមានកាំ r រមៀលដោយមិនរអិល ដូចបង្ហាញលើរូប។ អ័ក្សនៃថាសតូចជាជងមួយកាត់តាមចំណុច O_1 នៃ Oz ស្របនឹងថាសធំ ហើយវិលជុំវិញ Oz ជាមួយល្បឿនមុំ ω_0 ។



ក. ចូរបង្កើតទំនាក់ទំនងរវាង ω_0 ល្បឿនមុំនៃថាសធំ Ω និងល្បឿនមុំថាសតូច ω ។

ខ. ចូរសំដែងល្បឿនចំណុច H ខ្ពស់បំផុតនៃថាសតូច។ ករណីពិសេសដែលថាសធំគាំងដំណើរ។

ដំណោះស្រាយ

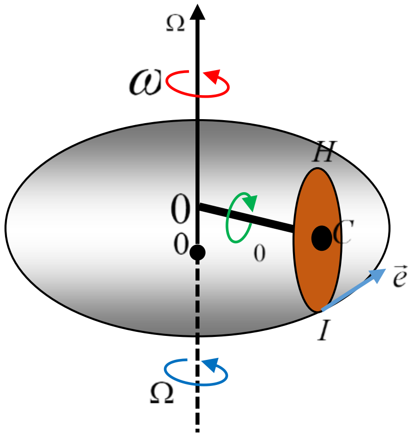
ក. ទំនាក់ទំនងរវាង ω_0 ល្បឿនមុំនៃថាសធំ Ω និងល្បឿនមុំថាសតូច ω ៖

យក I ជាចំណុចប៉ះរវាងថាសទាំងពីរ $\vec{v}_I = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{OI} = R\Omega\vec{e}$

យក C ជាផ្ចិតថាសតូច $\vec{v}_C = \vec{\omega}_0 \times \overrightarrow{O_1C} = R\omega_0\vec{e}$

និង $\vec{v}_I = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CI} = R\omega_0\vec{e} - r\omega\vec{e}$

យើងបាន៖ $R\Omega = R\omega_0 - r\omega \quad \Rightarrow \quad \Omega = \omega_0 - \dfrac{r\omega}{R}$



ខ. ល្បឿនត្រង់ចំណុចខ្ពស់បំផុតនៃគែមថាសតូច៖

$\vec{v}_H = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CH} = R\omega_0\vec{e} + r\omega\vec{e}$

$$\Rightarrow \quad v_H = R\omega_0 + r\omega = R(2\omega_0 - \Omega)$$

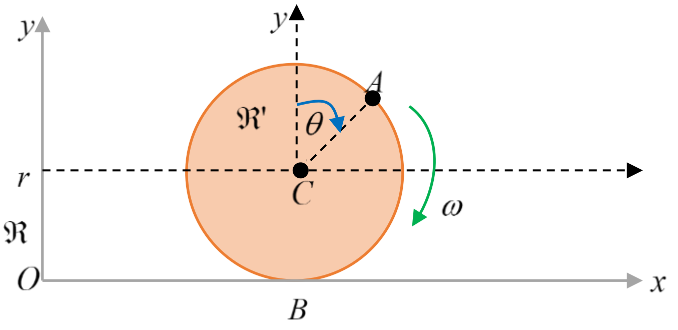
បើថាសធំគាំងដំណើរការ $(\Omega = 0)$ នោះ $\omega_0 = \dfrac{r\omega}{R}$ និង $v_H = 2R\omega_0$

ឧទាហរណ៍២០៖ ថាសមួយមានកាំ r វិលដោយចលនាស្មើជុំវិញអ័ក្សរបស់វាដោយល្បឿនមុំ ω ក្នុងទិសដៅដូចរូប។ ផ្ចិត C របស់វាផ្លាស់ទីលើបន្ទាត់ដេក $y = r$ នៃប្លង់ឈរ Oxy នៃតម្រុយ $\Re = Oxyz$ ។ គេហៅ $\Re'$ ជាតម្រុយ $Cxyz$ មានគល់តម្រុយគឺ C ដែលធ្វើចលនារំកិលធៀបនឹង $\Re$ ហើយគេកំណត់មុំ θ ផ្គុំឡើងរវាង $\overrightarrow{CA}$ និង Cy ។ A ជាចំណុចនៅលើបរិមាត្រនៃថាស។

ក. ចូរសំដែងនៅក្នុងគោល $\Re$ នូវល្បឿន និងសំទុះរបស់ A ធៀបនឹង $\Re'$ ។

ខ. តើគេឱ្យល្បឿនត្រង់ចំណុច C (ធៀបនឹង $\Re$)ប៉ុន្មានដើម្បីឱ្យល្បឿន $\vec{v}_{B/\Re}$ នៃចំណុចទាបបំផុតរបស់ថាសស្មើនឹងសូន្យ ?

គ. បង្ហាញសមីការ $x = x(\theta)$ និង $y = y(\theta)$ នៃចំណុច A ។ ដោយដឹងថា $\theta = 0$, $x = 0$ និង $y = 2r$ ។



ដំណោះស្រាយ

ក. នៅក្នុងគោល $\Re$ នូវល្បឿន និងសំទុះរបស់ A ធៀបនឹង $\Re'$ ៖

ចំណុច A និង C នៅលើអង្គធាតុរឹងតែមួយ យើងបាន៖

$\vec{v}_{A/\Re'} = \vec{v}_{C/\Re'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CA}$ ដោយ C ជាគល់តម្រុយ $\Re'$ នោះ $\vec{v}_{C/\Re'} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{A/\Re'} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix}_{\Re'} \times \begin{pmatrix} r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\omega\cos\theta \\ -r\omega\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'}$$

ឬ $\vec{v}_{A/\Re'} = r\omega\cos\theta\,\vec{i} + r\omega\sin\theta\,\vec{j}$

សំទុះនៃចំណុច A នៅក្នុងតម្រុយ $\Re'$ ៖

$$\vec{a}_{A/\Re'} = \left(\frac{d\vec{v}_{A/\Re'}}{dt}\right)_{\Re'} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \sin\theta \\ r\omega^2 \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re'} \quad \text{ឬ} \quad \vec{a}_{A/\Re'} = -r\omega^2 \sin\theta\,\vec{i} + r\omega^2 \cos\theta\,\vec{j}$$

ខ. ល្បឿននៃចំណុច B ៖ $\vec{v}_{B/\Re} = \vec{v}_{C/\Re} + \vec{\omega}\times\overrightarrow{BC}$

នៅពេល $\vec{v}_{B/\Re'} = \vec{0}$ យើងបាន៖ $\vec{v}_{C/\Re} + \vec{\omega}\times\overrightarrow{BC} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{v}_{C/\Re} = -\vec{\omega}\times\overrightarrow{BC}$

$$\vec{v}_{C/\Re} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix}_{\Re} \times \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re} = \begin{pmatrix} r\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re} \quad \text{ឬ} \quad \vec{v}_{C/\Re} = r\omega\vec{i}$$

គ. សមីការ $x = x(\theta)$ និង $y = y(\theta)$ នៃចំណុច A ៖

តាមច្បាប់បន្សំល្បឿន $\vec{v}_{A/\Re} = \vec{v}_e + \vec{v}_{A/\Re'}$

ដោយ $\vec{v}_e = \left(\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right)_{\Re} = \vec{v}_{C/\Re}$ ដោយសារ ℜ' ធ្វើចលនារំកិល

$$\Rightarrow \vec{v}_{A/\Re} = \vec{v}_{C/\Re} + \vec{v}_{A/\Re'} = (r\omega + r\omega\cos\theta)\vec{\mathrm{i}} - r\omega\sin\theta\,\vec{\mathrm{j}}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = r\omega + r\omega\cos\theta \;\Rightarrow\; dx = r(1+\cos\theta)d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{x} dx = \int_{\theta=0}^{\theta} r(1+\cos\theta)d\theta \;\Rightarrow\; x = x(\theta) = r(1-\sin\theta)$$

និង $\dot{y} = -r\omega\sin\theta \;\Rightarrow\; dy = -r\sin\theta d\theta$

$$\int_{y=2r}^{y} dy = \int_{\theta=0}^{\theta} -r\sin\theta d\theta \;\Rightarrow\; y - 2r = r(\cos\theta - 1) \;\Rightarrow\; y(\theta) = r(1+\cos\theta)$$

ឧទាហរណ៍២១៖ កង់ពីរបិទជាប់គ្នារុំដោយខ្សែពួរ។ នៅខណៈដូចបង្ហាញ វាមានល្បឿនមុំ 3 rad/s និងសំទុះមុំ 4 rad/s ។ ចូរកំណត់សំទុះរបស់ចំណុច B ។

ដំណោះស្រាយ

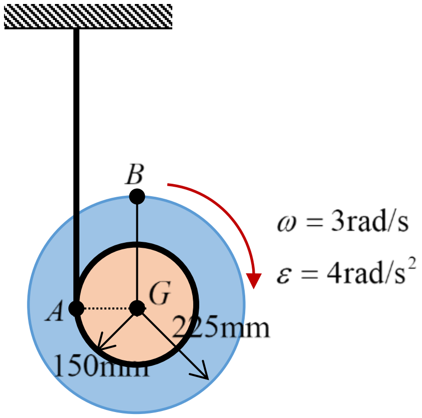
កង់តូចដូចជាធ្វើចលនារមៀលលើខ្សែ ដូចនេះល្បឿនត្រង់ចំណុច A មានល្បឿនសូន្យ $\vec{v}_A = \vec{0}$ ។

ល្បឿននៃចំណុច B ៖ $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\overrightarrow{AB}$ ដោយ $\vec{v}_A = \vec{0}$

សំទុះនៃចំណុច B ៖ $\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{AB} - \omega^2\,\overrightarrow{AB}$ ដោយ $\vec{a}_A = \vec{0}$

យើងបាន៖

$$\begin{pmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \\ a_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.225 \\ 0 \end{pmatrix} - 3^2 \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.225 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ -0.6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.35 \\ 2.025 \\ 0 \end{pmatrix}$$



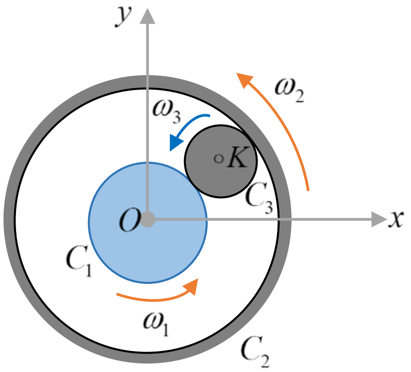
$$\Rightarrow \quad a_{Bx} = 0.9 - 1.35 = -0.45 \text{ m/s}^2 ,$$

$a_{By} = -0.6 - 2.025 = -2.625 \text{m/s}^2$ និង $a_{Bz} = 0$

ដូចនេះ

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2 + a_{Bz}^2} = \sqrt{(-0.45)^2 + (-2.625)^2 + 0^2} =$$

ឧទាហរណ៍២២៖ នៅលើរូបបង្ហាញពីកងបី C_1,C_2,C_3 (ប៉ះរវាងគ្នា) ដែលរមៀលដោយមិនរអិលនៅក្នុងប្លង់របស់វា។ គេកំណត់ r_1 និង r_2 ជាកាំនៃ C_1 និង C_2 ហើយ K ជាផ្ចិតនៃ C_3 ។ ចូរបង្កើតសមីការដែលភ្ជាប់ទៅនឹងល្បឿនមុំរបស់វា ω_1,ω_2 និង ω_3 ដោយធៀបទៅនឹងតំរុយទីពិសោធន៍ $\Re = Oxyz$ ។



ដំណោះស្រាយ

នៅត្រង់កន្លែងប៉ះគ្នាមានល្បឿនប្រវែងដូចគ្នា។ ចំពោះកន្លែងប៉ះរវាង C_1 និង C_3 នៅត្រង់ចំណុច I_1 គឺ

$$\vec{v}_{I_1} = \vec{\omega}_1 \times \vec{OI}_1 = \vec{v}_K + \vec{\omega}_3 \times \vec{KI}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_K = \vec{\omega}_1 \times \vec{OI}_1 - \vec{\omega}_3 \times \vec{KI}_1 \ (1)$$

ចំពោះកន្លែងប៉ះរវាង C_2 និង C_3 នៅត្រង់ចំណុច I_2 គឺ

$$\vec{v}_{I_2} = \vec{\omega}_2 \times \vec{OI}_2 = \vec{v}_K + \vec{\omega}_3 \times \vec{KI}_3 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_K = \vec{\omega}_2 \times \vec{OI}_2 - \vec{\omega}_3 \times \vec{KI}_2 \quad (2)$$

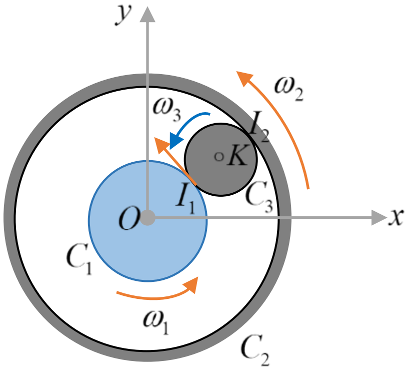
ផ្ទឹម(1)និង(2) យើងបាន៖

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{OI}_1 - \vec{\omega}_3 \times \vec{KI}_1 = \vec{\omega}_2 \times \vec{OI}_2 - \vec{\omega}_3 \times \vec{KI}_2$$

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{OI}_1 - \vec{\omega}_2 \times \vec{OI}_2 = \vec{\omega}_3 \times \vec{KI}_1 - \vec{\omega}_3 \times \vec{KI}_2$$

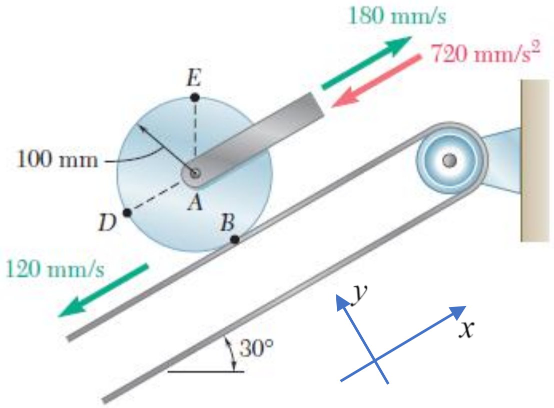
$$\vec{\omega}_1 \times \vec{OI}_1 - \vec{\omega}_2 \times \vec{OI}_2 = -\vec{\omega}_3 \times \vec{I_1 I}_2$$

$$r_1\omega_1 \vec{e} - r_2\omega_2 \vec{e} = -\omega_3 (r_2 - r_1)\vec{e}$$



$$\Rightarrow \omega_3 = \frac{r_2\omega_2 - r_1\omega_1}{r_2 - r_1}$$

ឧទាហរណ៍២៣៖ កង់មានកាំ 100 mm រមៀលមិនរអិលលើកំណាត់ខ្សែពានចលនាចុះក្រោមទៅឆ្វេងជាមួយល្បឿនថេរ 120 mm/s ។ ដោយដឹងថា នៅខណៈដែលឱ្យល្បឿន និងសំទុះនៃផ្ចិត A នៃកង់ត្រូវបានបង្ហាញលើរូប ចូរកំណត់សំទុះនៃចំណុច D ។



ដំណោះស្រាយ

សំទុះនៃចំណុច D ៖

ដោយសារកង់រមៀលមិនរអិលលើខ្សែពាន នោះ $v_B = 120\text{mm/s}$

យើងបាន $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \overrightarrow{BA}$

$$\begin{pmatrix}180\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-120\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\100\\0\end{pmatrix} \text{ ឬ } \begin{pmatrix}180\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-120\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}100\omega\\0\\0\end{pmatrix}$$

$180 = -120 + 100\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = 3 \text{ rad/s}$ (វិលក្នុងទិសដៅច្រាសទ្រនិចនាឡិកា)

និង $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{BA} - \omega^2 \overrightarrow{BA}$, $\vec{a}_B = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix}-720\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\100\\0\end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix}0\\100\\0\end{pmatrix} \text{ ឬ } \begin{pmatrix}-720\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-100\alpha\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\900\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad -720 = -1000\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.72 \text{ rad/s}^2$ (ក្នុងទិសដៅទ្រនិចនាឡិកា)

សំទុះនៃចំណុច D ៖ $\vec{a}_D = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{AD} - \omega^2 \overrightarrow{AD}$

$$\begin{pmatrix} a_{Dx} \\ a_{Dy} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -720 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.72 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ឬ } \begin{pmatrix} a_{Dx} \\ a_{Dy} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -720 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -72 \\ 0 \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \; a_{Dx} = -720 + 900 = 180 \text{ mm/s}^2$ និង $a_{Dy} = -72 \text{ mm/s}^2$

$$\Rightarrow \; a_D = \sqrt{(180)^2 + (-72)^2} = 193.87 \text{ mm/s}^2$$

3. ស៊ីនេទិចនៃអង្គធាតុរឹង

3.1. និយមន័យ

ស៊ីនេទិចសរុប(បរិមាណចលនា) ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច(ម៉ូម៉ង់នៃបរិមាណលចលនា) ឌីណាមិចសរុប(បរិមាណសំទុះ) ម៉ូម៉ង់ឌីណាមិច និងថាមពលស៊ីនេទិច បង្កើតជាគុស៊ីនេទិច។ ស៊ីនេទិចចំពោះវត្ថុសិក្សានូវទំនាក់ទំនងរវាងធាតុនៃស៊ីនេម៉ាទិចនិងធរណីមាត្រនៃម៉ាស។

3.2. ស៊ីនេទិចសរុប ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច

- ស៊ីនេទិចសរុប(បរិមាណចលនា)នៃចំណុចរូបធាតុ M មានម៉ាស m និងល្បឿន $\vec{v}(M)$ ត្រូវបានកំណត់ដោយទំហំវ៉ិចទ័រ៖ $\vec{p} = m\vec{v}(M)$ ។
- ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច $\vec{L}_A$ នៃចំណុច M នៅត្រង់ចំណុច A ដែលលំហាណាមួយត្រូវបានឱ្យដោយម៉ូម៉ង់នៃបរិមាណចលនាត្រង់ A ៖ $\vec{L}_A = \overrightarrow{AM} \times m\vec{v}(M)$ ។

3.3. បរិមាណចលនានៃប្រព័ន្ធចំណុចរូបធាតុ(S)

ក. ប្រព័ន្ធរូបធាតុនៅដាច់ៗពីគ្នា

ប្រព័ន្ធកើតឡើងពីសំណុំនៃចំណុច M_i មានម៉ាស m_i និងល្បឿន $\vec{v}(M_i)$ នៅក្នុងតម្រុយ ℜ ។

- ស៊ីនេទិចសរុប(បរិមាណចលនា)នៃប្រព័ន្ធត្រូវបានឱ្យដោយទំហំវ៉ិចទ័រ៖

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}(M_i)$$

- ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច $\vec{\sigma}_A$ នៃប្រព័ន្ធរូបធាតុ(S) នៅត្រង់ចំណុច A ណាមួយនៃលំហត្រូវបានឱ្យដោយម៉ូម៉ង់នៃបរិមាណចលនាត្រង់ A វាមានទំហំវ៉ិចទ័រ៖

$$\vec{L}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \times m_i \vec{v}(M_i)$$

ខ. ប្រព័ន្ធរូបធាតុនៅជាប់ៗគ្នា

នៅក្នុងប្រព័ន្ធរូបធាតុជាប់ៗគ្នា(S)៖ បន្ទាត់ ផ្ទៃ ឬមាឌ យើងបាន៖

– ស៊ីនេទិចសរុប(បរិមាណចលនា)នៃប្រព័ន្ធរូបធាតុនៅជាប់ៗគ្នា ត្រូវបានឱ្យដោយទំហំរ៉ិចទ័រ៖

$$\vec{p} = \int \vec{v}(M)dm$$

– ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច $\vec{L}_A$ នៃប្រព័ន្ធរូបធាតុនៅជាប់ៗគ្នា(S)នៅត្រង់ចំណុច A ណាមួយនៃលំហត្រូវបានឱ្យដោយម៉ូម៉ង់នៃបរិមាណចលនាត្រង់A វាមានទំហំរ៉ិចទ័រ៖

$$\vec{L}_A = \int \overrightarrow{AM} \times \vec{v}(M)dm$$

3.4. Torseur ស៊ីនេទិច

គេឱ្យអង្គធាតុរឹង(S)មានម៉ាស m និងផ្ចិតនិចលភាព G ចលនាធៀបទៅនឹងតម្រុយនឹង $\Re$ ។ ឱ្យ M ជាចំណុចមួយនៃអង្គធាតុនេះ និងចំណុចពីរ A និង B ណាមួយនៃលំហ ប៉ុន្តែជាប់នៅក្នុងតម្រុយ $\Re$ ។

តាមនិយមន័យយើងបានម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចត្រង់ A និង B ដែលត្រូវបានឱ្យដោយ៖

$$\vec{L}_A = \int \overrightarrow{AM} \times \vec{v}(M)dm \quad \text{និង} \quad \vec{\sigma}_B = \int \overrightarrow{BM} \times \vec{v}(M)dm$$

$$\vec{L}_A - \vec{L}_B = \int \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}\right) \times \vec{v}(M)dm = \int \overrightarrow{AB} \times \vec{v}(M)dm$$

$$\vec{L}_A - \vec{L}_B = \overrightarrow{AB} \times \int \vec{v}(M)dm = \overrightarrow{AB} \times \vec{p}$$

ទំនាក់ទំនងនេះត្រូវបានហៅថា ច្បាប់បម្រែបម្រួលម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច។

យើងសម្គាល់ឃើញថា ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចគោរពច្បាប់បញ្ជូនម៉ូម៉ង់។ អញ្ចឹងយើងអាចបង្កើត torseur ស៊ីនេទិចដែលមានធាតុបង្រួមគឺ៖ ស៊ីនេទិចសរុបនិងម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច។

$$[C]_A = \begin{cases} \vec{p} = \int \vec{v}(M)dm \\ \vec{L}_A = \int \overrightarrow{AM} \times \vec{v}(M)dm \end{cases}$$

$\vec{p} = \int \vec{v}(M)dm$ ៖ ស៊ីនេទិចសរុបឬបរិមាណចលនានៃប្រព័ន្ធ(S) ។

$\vec{L}_A = \int \overrightarrow{AM} \times \vec{v}(M)dm$ ៖ ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៅចំណុច A នៃប្រព័ន្ធ(S)នៅក្នុងតម្រុយ $\Re$ ។

3.5. ការនៀវមស៊ីនេទិចសរុបនៃប្រព័ន្ធរូបធាតុ

គេឱ្យប្រព័ន្ធ(S)មានម៉ាស m និងផ្ចិតនិចលភាព G ចលនាធៀបទៅនឹងតម្រុយអរតូនរមេនឹង $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។ គ្រប់ $M \in S$ យើងបានដោយនិយមន័យផ្ចិតនិចលភាព៖ $\int \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$ ។

ចំណុច G និង M ចល័តនៅក្នុងតម្រុយ $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ យើងអាចសរសេរ៖ $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG}$ និងល្បឿនរបស់វាភ្ជាប់ទៅនឹងទំនាក់ទំនង៖

$$\frac{d\overrightarrow{GM}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}-\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d\overrightarrow{GM}}{dt}=\vec{v}(M)-\vec{v}(G)$$

ដោយធ្វើដេរីវេកន្សោមនេះធៀបនឹងពេលក្រោមសញ្ញាអាំងតេក្រាល យើងបាន៖

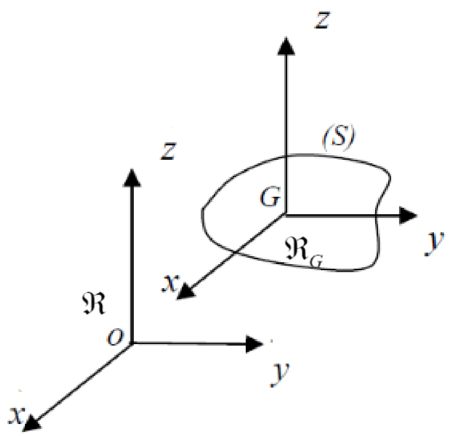
$$\int\frac{d\overrightarrow{GM}}{dt}dm=\int\left(\vec{v}(M)-\vec{v}(G)\right)dm=0$$

$\int\vec{v}(M)dm=\vec{v}(G)\int dm=m\vec{v}(G)$ នាំឱ្យ $\vec{p}=m\vec{v}(G)$

Torseur ស៊ីនេទិចសរុបជាបរិមាណចលនានៃផ្ចិតម៉ាសនៃប្រព័ន្ធ៖ $\vec{p}=m\vec{v}(G)$

3.6. លក្ខណៈនៃម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច

ក. ទ្រឹស្តី Koenig



តម្រុយ $\Re_0(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ នៅនឹង។ តម្រុយ Koenig (ហៅផង ដែរថា តម្រុយបារីសង់) $\Re_G(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ជាតម្រុយភ្ជាប់ទៅនឹងផ្ចិតនិចលនភាពនៃអង្គធាតុដែលមានអ័ក្សស្របជាមួយតម្រុយនឹង។ ល្បឿននៃតម្រុយ $\Re_G$ ធៀបទៅនឹងតម្រុយ $\Re$ គឺសូន្យ $\vec{\Omega}(\Re_G/\Re)=\vec{0}$ ។

យើងនឹងរកទំនាក់ទំនងរវាង៖

- ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធត្រង់ G នៅក្នុងចលនារបស់វាធៀបទៅនឹង $\Re$ ។
- ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធត្រង់G នៅក្នុងចលនារបស់វាធៀបនឹង $\Re_G$ ។

គេឱ្យ M ជាចំណុចនៃប្រព័ន្ធរូបធាតុ។ ល្បឿនរបស់វានៅក្នុង $\Re_0$ ត្រូវបានឱ្យដោយ៖ $\vec{v}_{M/\Re}=\vec{v}_{G/\Re}+\vec{v}_{M/\Re_G}$

ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៅត្រង់ចំណុច G នៅក្នុង $\Re$ ត្រូវបានសរសេរ៖ $\vec{L}_{G/\Re}=\int\overrightarrow{GM}\times\vec{v}_{M/\Re}\,dm$

ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៅត្រង់ចំណុច G នៅក្នុង $\Re_G$ ត្រូវបានសរសេរ៖ $\vec{L}_{G/\Re_G}=\int\overrightarrow{GM}\times\vec{v}_{M/\Re_G}\,dm$

ដូចនេះ យើងបាន៖ $\vec{L}_{G/\Re}=\int\overrightarrow{GM}\times\left(\vec{v}_{G/\Re}+\vec{v}_{M/\Re_G}\right)dm=\int\overrightarrow{GM}\times\vec{v}_{G/\Re}dm+\int\overrightarrow{GM}\times\vec{v}_{M/\Re_G}dm$

ឬយើងបានដោយនិយមន័យនៃផ្ចិតនិចលភាព $\int\overrightarrow{GM}\,dm=\vec{0}$ ជាបញ្ចប់យើងទទួលបាន៖

$$\vec{L}_{G/\Re}=\int\overrightarrow{GM}\,dm\times\vec{v}_{M/\Re}+\int\overrightarrow{GM}\times\vec{v}_{M/\Re_G}dm=\vec{L}_{G/\Re_G}$$

$$\Rightarrow\ \vec{L}_{G/\Re}=\vec{L}_{G/\Re_G}$$

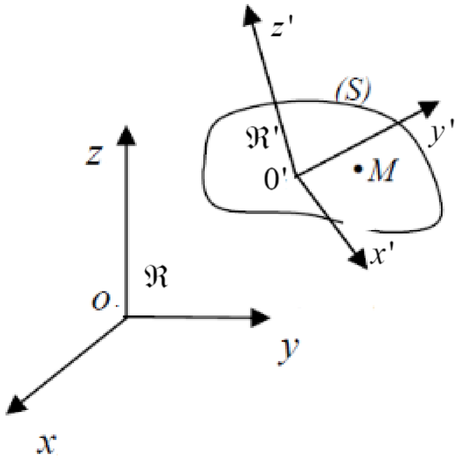
ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចត្រង់ G ផ្ចិតនិចលភាពនៃប្រព័ន្ធគឺដូចគ្នានៅក្នុងតម្រុយ $\Re$ និង $\Re_G$ ។

នៅត្រង់ចំណុច A ណាមួយនៃលំហ យើងនឹងបានរូបមន្តនៃការបញ្ជូន៖

$$\vec{L}_{A/\Re} = \vec{L}_{G/\Re} + \overrightarrow{AG} \times m\vec{v}_{G/\Re}$$

យើងបានទ្រឹស្តី Koenig ចំពោះម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច។

3.7. ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៃអង្គធាតុ(S)មិនខូចរាង ភ្ជាប់ទៅតម្រុយ $\Re'$ ចលនាធៀបទៅនឹងតម្រុយនឹង $\Re$



គេឱ្យ M ជាចំណុចមួយនៃអង្គធាតុ ល្បឿនរបស់វាត្រូវបាន កំណត់ដោយស៊ីនេម៉ាទិចនៃអង្គធាតុដែលមានកន្សោម៖

$$\vec{v}_{M/\Re} = \vec{v}_{O/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{O'M}$$

ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៅចំណុច O' ត្រូវបានឱ្យដោយ៖

$$\vec{L}_{O'/\Re} = \int \overrightarrow{O'M} \times \vec{v}_{M/\Re} dm$$

ដោយជំនួសកន្សោមល្បឿននៅក្នុងកន្សោមនៃម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច យើងទទួលបាន៖

$$\vec{L}_{O'/\Re} = \int \overrightarrow{O'M} \times \left(\vec{v}_{O'/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{O'M}\right) dm$$

$$\vec{L}_{O'/\Re} = \int \overrightarrow{O'M} \times \vec{v}_{O'/\Re} dm + \int \overrightarrow{O'M} \times \left(\vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{O'M}\right) dm = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

ដែល $\vec{L}_1 = \int \overrightarrow{O'M} \times \vec{v}_{O'/\Re} dm$ និង $\vec{L}_2 = \int \overrightarrow{O'M} \times \left(\vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{O'M}\right) dm$

កន្សោម $\vec{L}_1$ ៖ $\vec{L}_1 = \int \overrightarrow{O'M} \times \vec{v}_{O'/\Re} dm = \int \left(\overrightarrow{O'G} + \overrightarrow{GM}\right) \times \vec{v}_{O'/\Re} dm$

$$\vec{L}_1 = \int \overrightarrow{O'G} \times \vec{v}_{O'/\Re} dm + \int \overrightarrow{GM} dm \times \vec{v}_{O'/\Re} = \overrightarrow{O'G} \times \vec{v}_{O'/\Re} \int dm + \int \overrightarrow{GM} dm \times \vec{v}_{O'/\Re}$$

ដោយសារ G ជាផ្ចិតនិចលភាព យើងបាន $\int \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$

នាំឱ្យ $\vec{L}_1 = \overrightarrow{O'G} \times m\vec{v}_{O'/\Re}$

កន្សោម $\vec{L}_2$ ៖ $\vec{L}_2 = \int \overrightarrow{O'M} \times \left(\vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{O'M}\right) dm$

ចុងបញ្ចប់នៃការពន្លាតកន្សោមនេះ យើងនឹងប្រើកូអរដោនេចំណុច M នៅក្នុងតម្រុយ ℜ' និងកុំប៉ូសង់នៃវ៉ិចទ័រល្បឿនមុំ $\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}$ នៅក្នុងតម្រុយ ℜ' ។

$$\overrightarrow{O'M} = \begin{pmatrix} x' \\ y \\ z' \end{pmatrix}_{\Re'} \quad , \quad \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} = \begin{pmatrix} \Omega_{x'} \\ \Omega_{y'} \\ \Omega_{z'} \end{pmatrix}_{\Re'}$$

$$\overrightarrow{O'M} \times \left(\vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{O'M}\right) = \begin{pmatrix} \Omega_{x'}(y'^2 + z'^2) - \Omega_{y'}x'y' - \Omega_{z'}xz \\ -\Omega_{x'}xy + \Omega_{y'}(x'^2 + z'^2) - \Omega_{z'}y'z' \\ -\Omega_{x'}x'z' - \Omega_{y'}y'z' + \Omega_{z'}(x'^2 + z'^2) \end{pmatrix}_{\Re'}$$

$$\vec{L}_2 = \int \overrightarrow{O'M} \times \left(\vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{O'M}\right) dm = \begin{pmatrix} \Omega_{x'}\int (y'^2 + z'^2)dm - \Omega_{y'}\int x'y'dm - \Omega_{z'}\int x'z'dm \\ -\Omega_{x'}\int x'y'dm + \Omega_{y'}\int (x'^2 + z'^2)dm - \Omega_{z'}\int y'z'dm \\ -\Omega_{x'}\int x'z'dm - \Omega_{y'}\int y'z'dm + \Omega_{z'}\int (x'^2 + z'^2)dm \end{pmatrix}_{\Re'}$$

កន្សោមនេះអាចសរសេរក្រោមទម្រង់៖

$$\vec{L}_2 = \begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'} \\ -I_{x'y'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{x'z'} & -I_{y'z'} & I_{z'z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{x'} \\ \Omega_{y'} \\ \Omega_{z'} \end{bmatrix}$$ ឬសរសេរ $\vec{L}_2 = [I_{0'}]\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}$

ជាចុងបញ្ចប់កន្សោម៖ $\vec{L}_{0'/\Re} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ ដែលសរសេរ៖

$$\vec{L}_{O'/\Re} = \overrightarrow{O'G} \times m\vec{v}_{O'/\Re} + [I_{O'}]\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}$$

ករណីពិសេស៖

- បើតម្រុយ ℜ' នៅនឹងធៀបនឹង ℜ នោះ $\vec{v}_{O'/\Re} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{L}_{O'/\Re} = [I_{O'}]\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}$
- បើចំណុច O' នៅត្រួតជាមួយ G នោះ $\overrightarrow{O'G} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{L}_{G/\Re} = [I_G]\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}$ ។

3.8. ទ្រឹស្តី Koenig ចំពោះប្រព័ន្ធរូបធាតុ(S)

ក្រោមទម្រង់ទូទៅ យើងបាន៖

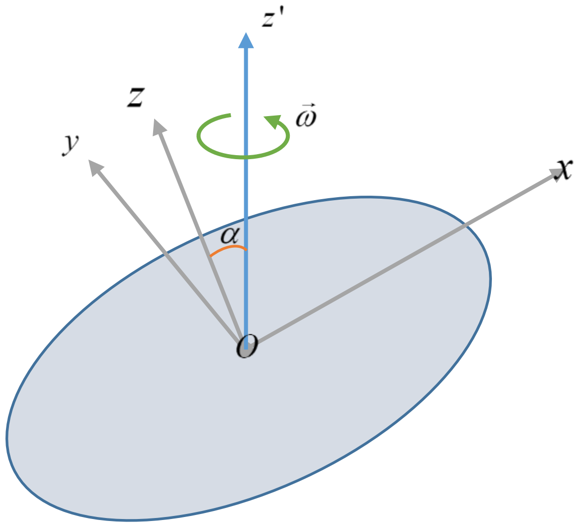
$$\vec{L}_{M/\Re} = \vec{L}_{G/\Re'} + \overrightarrow{MG} \times m\vec{v}_{G/\Re}$$ ដោយ $\vec{L}_{G/\Re} = \vec{L}_{G/\Re'}$

យើងអាចសរសេរទំនាក់ទំនងក្រោមទម្រង់៖

$$\vec{L}_{M/\Re} = [I_G]\vec{\Omega}_{\Re'/\Re} + \overrightarrow{MG} \times m\vec{v}_{M/\Re}$$

I_G ៖ ជាម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃប្រព័ន្ធនៅត្រង់ផ្ចិតនិចលភាពរបស់វា។

ឧទាហរណ៍២៤៖ ថាសស្តើងស្មើសាច់មានកាំ a និងម៉ាស m កំពុងវិលដោយសេរីលើទម្រគ្មានកកិត ជាមួយល្បឿនមុំថេរ ω ជុំវិញអ័ក្សនឹងឈរកាត់តាមផ្ចិតរបស់វា ហើយផ្ទៀងនៅមុំ α ស៊ីមេទ្រីអ័ក្សថាស។ ចូរកំណត់តម្លៃ និងទិសនៃម៉ូម៉ង់ និង កម្លាំងសរុបដែលមានអំពើរវាងថាស និងអ័ក្ស។



ដំណោះស្រាយ

យកតម្រុយ $Oxyz$ ជាប់ទៅនឹងថាសជាមួយគល់នៅផ្ចិតរបស់វា O ។

អ័ក្ស z តាមទិសខ្សែកែងថាស និងអ័ក្ស x នៅក្នុងប្លង់នៃអ័ក្ស z និងអ័ក្សរង្វិល z' ។

អ័ក្ស x, y, z ជាអ័ក្សមេនៃថាស មានម៉ូម៉ង់និចលភាពតាមអ័ក្សមេ៖

$$I_x = \frac{1}{4}ma^2,\ I_y = \frac{1}{4}ma^2,\ I_z = \frac{1}{2}ma^2$$

ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចវិលជុំវិញ O ៖

$$\vec{L}_0 = [I_0]\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}ma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega\sin\alpha \\ 0 \\ \omega\cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{4}ma^2\left(\omega\sin\alpha\,\vec{i} + 2\omega\cos\alpha\,\vec{k}\right)$$

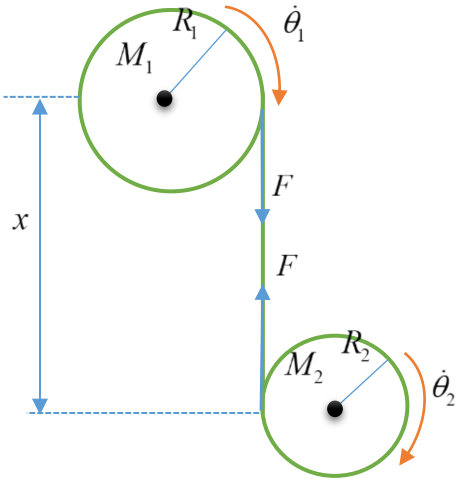
ដូចនេះ ម៉ូម៉ង់នៃកម្លាំងគឺ $\vec{M}_O = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{L}_O = \vec{\omega}\times\vec{L}_O$

$$\overrightarrow{M}_O = \begin{pmatrix} \omega\sin\alpha \\ 0 \\ \omega\cos\alpha \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}ma^2\omega \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ 2\cos\alpha \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}ma^2\omega\sin\alpha\cos\alpha\,\vec{j}$$

ម៉ូម៉ង់ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់នៃថាស ហើយកែងទៅនឹងប្លង់បង្កើតដោយខ្សែកែងថាស និងអ័ក្សវង្វិល។ វាវិលជាមួយថាស។ ផ្ចិតម៉ាសនៃថាសគឺនៅនឹង កម្លាំងសរុបមានលើថាសស្មើសូន្យ។

ឧទាហរណ៍២៥៖ ថាសពីរស្មើសាច់នៅក្នុងប្លង់ឈរមានម៉ាស m_1 និង m_2 មានកាំ R_1 និង R_2 រៀង មានរុំខ្សែជុំវិញ ហើយភ្ជាប់គ្នាដូចរូប។ ថាសទីមួយវិលជុំវិញអ័ក្សដេកនៅនឹងដោយគ្មានកកិត។ ចូរបង្កើតសមីការ ដើម្បីកំណត់សំទុះនៃផ្ចិតម៉ាសថាសទី២ បើវាធ្លាក់ដោយសេរី។

ដំណោះស្រាយ



យក T ជាតំណឹងខ្សែ x ជាចម្ងាយនៃផ្ចិតម៉ាសទី២។

ទៅផ្ចិតថាសទី១ ហើយ $\dot{\theta}_1$ និង $\dot{\theta}_2$ ជាល្បឿនមុំនៃថាសទី១ និងទី២ ។

ច្បាប់គ្រឹះឌីណាមិច ចំពោះប្រព័ន្ធ៖ $m_2\ddot{x} = m_2 g - T$

ចំពោះរ៉កទី១៖ $I_1\ddot{\theta}_1 = R_1 T$

ចំពោះរ៉កទី២៖ $I_2\ddot{\theta}_2 = R_2 T$

ដោយ $I_1 = \frac{1}{2}m_1R_1^2,\ I_2 = \frac{1}{2}m_2R_2^2$ យើងបាន៖

$\dot{x} = R_1\dot{\theta}_1 + R_2\dot{\theta}_2$ ឬ $\ddot{x} = R_1\ddot{\theta}_1 + R_2\ddot{\theta}_2$

ពីសមីការបួន អញ្ញាតិ $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ddot{x}$ និង T អាចត្រូវបានកំណត់។

4. TORSEUR ឌីណាមិច

4.1. និយមន័យ

គេឱ្យ M ជាចំណុចនៃប្រព័ន្ធរូបធាតុ(S)ធ្វើចលនាធៀបទៅនឹងតម្រុយនឹង ℜ ។ សំទុះនៃចំណុចMឱ្យដោយ៖

$$\vec{a}(M) = \frac{d\vec{v}(M)}{dt}$$

– យើងហៅឌីណាមិចសរុបឬ(បរិមាណសំទុះ)នៃចំណុច M ៖

$$\vec{D} = \int \vec{a}(M)dm \text{ ឬ } \vec{D} = \sum_i m_i\vec{a}(M_i)$$

– យើងហៅ ម៉ូម៉ង់ឌីណាមិច ម៉ូម៉ង់នៃឌីណាមិចសរុប(ម៉ូម៉ង់នៃបរិមាណសំទុះ)ធៀបទៅនឹងចំណុច A នៃ តម្រុយ $\Re$៖

$$\overrightarrow{M}_A = \int \overrightarrow{AM} \times \vec{a}(M)dm \text{ ឬ } \overrightarrow{M}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \times m_i\vec{a}(M_i)$$

យើងបង្កើត torseur ឌីណាមិចជាមួយទំហំពីរដូចជាគុនៃការបង្រួមរបស់ torseur នេះ។ torseur ឌីណាមិចត្រង់ចំណុច A នៃតម្រុយ $\Re$ ត្រូវបានសំដែងក្រោមទម្រង់៖

$$[D]_A = \begin{cases} \vec{D} = \int \vec{a}(M)dm \\ \overrightarrow{M}_A = \int \overrightarrow{AM} \times \vec{a}(M)dm \end{cases} \text{ ឬ } [D]_A = \begin{cases} \vec{D} = \sum_i m_i\vec{a}(M) \\ \overrightarrow{M}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \times m_i\vec{a}(M_i) \end{cases}$$

ប្រព័ន្ធសិក្សាមិនចាំបាច់មិនខូចរាងដូច torseur ស៊ីនេទិច។ ម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចគោរពបែបផែនដូចគ្នាទៅនឹងរូបមន្តបញ្ជូននៃម៉ូម៉ង់។ ម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចត្រង់ចំណុចពីរ A និង B ត្រូវបានភ្ជាប់ដោយ៖

$$\overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{M}_B + \overrightarrow{AB} \times \vec{D}$$

4.2. ការគណនាឌីណាមិចសរុប

គេឱ្យ G ជាផ្ចិតនិចលភាពនៃប្រព័ន្ធនៅក្នុងតម្រុយ $\Re$ ឌីណាមិចសរុបត្រូវបានសរសេរ៖

$$\vec{D} = \int \vec{a}(M)dm = \int \frac{d\vec{v}(M)}{dt}dm = \frac{d}{dt}\int \vec{v}(M)dm = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v}(G))}{dt} = m\vec{a}(G)$$

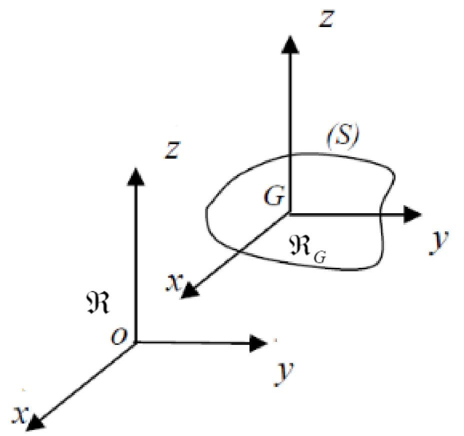
បើម៉ាសនៃប្រព័ន្ធថេរ ឌីណាមិចសរុបស្មើនឹងផលគុណម៉ាសនិងសំទុះនៃផ្ចិតនិចលភាពរបស់វា។

$$\vec{D} = m\vec{a}(M)$$

Torseur ឌីណាមិចសរុបស្មើនឹងបរិមាណនៃសំទុះផ្ចិតនិចលភាពនៃប្រព័ន្ធគុណនឹងម៉ាសសរុបនៃប្រព័ន្ធ។

4.3. ទ្រឹស្តី Koenig ទាក់ទងទៅនឹងម៉ូម៉ង់ឌីណាមិច

គេឱ្យតម្រុយ $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ជាតម្រុយនៅនឹង។ តម្រុយ Koenig (ហៅថាតម្រុយផ្ចិតនិចលភាព) $\Re(G,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ជាតម្រុយភ្ជាប់ទៅផ្ចិតនិចលភាពនៃអង្គធាតុដែលមានអ័ក្សស្របទៅនឹងតម្រុយនឹង។ ល្បឿនមុំនៃ $\Re_G$ ធៀបនឹងតម្រុយ $\Re$ គឺសូន្យ៖ $\vec{\Omega}_{R_G/\Re} = \vec{0}$ ។



យើងនឹងរកទំនាក់ទំនងរវាង៖

- ម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចនៃប្រព័ន្ធត្រង់ G នៅក្នុងចលនារបស់វាធៀបនឹង $\Re$ ។
- ម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចនៃប្រព័ន្ធត្រង់ G នៅក្នុងចលនារបស់វាធៀបនឹង $\Re_G$ ។

គេឱ្យ M ជាចំណុចមួយនៃប្រព័ន្ធរូបធាតុ៖

- សំទុះរបស់វានៅក្នុងតម្រុយ $\Re$ ត្រូវបានឱ្យដោយ៖ $\vec{a}_{M/\Re} = \vec{a}_{G/\Re} + \vec{a}_{M/\Re_G}$
- ម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចរបស់វានៅចំណុច G នៅក្នុង $\Re$ ត្រូវបានសរសេរ៖ $\overrightarrow{M}_{G/\Re} = \int \overrightarrow{GM} \times \vec{a}_{M/\Re} dm$
- ម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចរបស់វានៅចំណុចG នៅក្នុង $\Re_G$ ត្រូវបានសរសេរ៖ $\overrightarrow{M}_{G/\Re_G} = \int \overrightarrow{GM} \times \vec{a}_{M/\Re_G} dm$

ដូចនេះ៖ $\overrightarrow{M}_{G/\Re} = \int \overrightarrow{GM} \times \left(\vec{a}_{G/\Re} + \vec{a}_{M/\Re_G}\right) dm = \int \overrightarrow{GM} \times \vec{a}(\mathrm{G}/\Re)\,\mathrm{dm} + \int \overrightarrow{GM} \times \vec{a}_{M/\Re_G} dm$

$$\overrightarrow{M}_{G/\Re_G} = \int \overrightarrow{GM} dm \times \vec{a}_{G/\Re} + \int \overrightarrow{GM} \times \vec{a}_{M/\Re_G} dm$$

តាមនិយមន័យផ្ចិតនិចលភាព $\int \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$ ជាចុងបញ្ចប់ យើងទទួលបាន៖

$$\overrightarrow{M}_{G/\Re} = \int \overrightarrow{GM} \times \vec{v}_{M/\Re_G} dm = \overrightarrow{M}_{G/\Re_G}$$

ដូចនេះ៖ $\overrightarrow{M}_{G/\Re} = \overrightarrow{M}_{G/\Re_G}$

ម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចត្រង់ G ផ្ចិតនិចលភាពនៃប្រព័ន្ធគឺដូចគ្នានៅក្នុង $\Re$ និង $\Re_0$ ។ នៅត្រង់ចំណុច A ណាមួយនៃលំហ យើងនឹងបានតាមរូបមន្តបញ្ជូន៖

$$\overrightarrow{M}_{A/\Re} = \overrightarrow{M}_{G/\Re_0} + \overrightarrow{AG} \times m\vec{v}_{G/\Re}$$

យើងបានផងដែរនូវទ្រឹស្តី Koenig ចំពោះម៉ូម៉ង់ឌីណាមិច។

4.4. ទំនាក់ទំនងរវាង torseur ស៊ីនេទិចនិង torseurឌីណាមិច

គេឱ្យ A ជាចំណុចណាមួយនៃតម្រុយ $\Re$ មិនសំខាន់នូវចំណុចនៃប្រព័ន្ធរូបធាតុនិងចំណុច M នៃប្រព័ន្ធរូបធាតុ។ យើងបានម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៅចំណុច A ត្រូវបានឱ្យដោយ៖

$$\vec{M}_A = \int \overrightarrow{AM} \times \vec{v}_{M/\Re} dm$$

យើងធ្វើដេរីវេកន្សោមនេះ

$$\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_\Re = \int \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AM} \times \vec{v}_{M/\Re}\right) dm = \int \left(\frac{\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_\Re \times \vec{v}_{M/\Re} dm + \int \overrightarrow{AM} \times \left(\frac{d\vec{v}_{M/\Re}}{dt}\right)_\Re dm$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_\Re = \int \left(\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_\Re \times \vec{v}_{M/\Re} dm + \vec{M}_A$$

យើងបាន៖ $\left(\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_\Re = \vec{v}_{M/\Re} - \vec{v}_{A/\Re}$

$$\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_\Re = \int \left(\vec{v}_{M/\Re} - \vec{v}_{A/\Re}\right) \times \vec{v}_{M/\Re} dm + \vec{M}_A$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_\Re = -\vec{v}_{A/\Re} \times m\vec{v}_{G/\Re} + \vec{M}_A$$

យើងទទួលបានផងដែរនូវទំនាក់ទំនងចុងក្រោយរវាងម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនិងម៉ូម៉ង់ឌីណាមិច

$$\vec{M}_A = \left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_\Re + \vec{v}_{A/\Re} \times m\vec{v}_{G/\Re}$$

ទំនាក់ទំនងនេះមិនត្រូវច្រឡំជាមួយរូបមន្តបញ្ជូនទេ។

4.5. ករណីពិសេស

នៅក្នុងករណីពិសេសខ្លះ ដេរីវេនៃ torseur ស៊ីនេទិចស្មើនឹង torseur ឌីណាមិច៖

$$\vec{M}_A = \left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_\Re \quad \text{បើ}$$

ក. A នៅក្នុង $\Re \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_{A/\Re} = \vec{0}$

ខ. A ត្រួតជាមួយ G $\quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_{A/\Re} \times \vec{v}_{G/\Re} = \vec{0}$

គ. $\vec{v}_{A/\Re} // \vec{v}_{G/\Re} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_{A/\Re} \times \vec{v}_{G/\Re} = \vec{0}$

នៅក្នុងករណីពិសេសទាំងបី យើងអាចសរសេរ៖

$$\vec{D} = \frac{d\vec{C}_A}{dt} \quad \text{ជាមួយ} \quad [D]_A = \begin{cases} \vec{D} \\ \vec{M}_A \end{cases} \quad \text{និង} \quad [C]_A = \begin{cases} \vec{p} \\ \vec{L}_A \end{cases}$$

5. ថាមពលស៊ីនេទិច

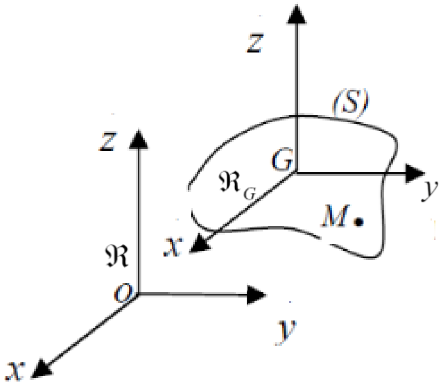
5.1. និយមន័យ

ថាមពលស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធរូបធាតុជាប់ៗគ្នា(S)ចលនាធៀបទៅនឹងតម្រុយនឹង $\Re$ ត្រូវបានឱ្យនិយមន័យដោយបរិមាណស្កាលែសំដែងដោយទំនាក់ទំនង៖

$$E_{C/\Re} = \int \frac{1}{2} (\vec{v}_{M/\Re})^2 \, dm$$

5.2. ទ្រឹស្តី Koenig ទាក់ទងទៅថាមពលស៊ីនេទិច

គេឱ្យតម្រុយ $\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ជាតម្រុយនៅនឹង។ តម្រុយ Koenig $\Re_G(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ជាតម្រុយភ្ជាប់ទៅនឹងផ្ចិតនិចលភាពនៃប្រព័ន្ធ ហើយមានអ័ក្សស្របទៅនឹងតម្រុយនឹង។



ល្បឿនមុំនៃ $\Re_G$ ធៀបទៅនឹង $\Re$ គឺសូន្យ៖ $\vec{\Omega}_{\Re_G/\Re} = \vec{0}$

យើងនឹងរកទំនាក់ទំនងរវាង៖

– ថាមពលស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធនៅក្នុងចលនារបស់វាធៀបទៅនឹង $\Re$
– ថាមពលស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធនៅក្នុងចលនារបស់វាធៀបនឹង $\Re_0$ ។

គេឱ្យ M ជាចំណុចមួយនៃប្រព័ន្ធរូបធាតុ។ ច្បាប់បន្សំល្បឿនឱ្យដោយ៖

$$\vec{v}_{M/\Re} = \vec{v}_{G/\Re} + \vec{v}_{M/\Re_G}$$

ដោយជំនួសកន្សោមនេះទៅក្នុងកន្សោមថាមពលស៊ីនេទិច យើងបាន៖

$$E_{C/\Re} = \int \frac{1}{2} \left(\vec{v}_{G/\Re} + \vec{v}_{M/\Re_G}\right)^2 dm = \frac{1}{2}(\vec{v}_{G/\Re})^2 \int dm + \int \vec{v}_{G/\Re} \cdot \vec{v}_{M/\Re_G} dm + \frac{1}{2}\int \left(\vec{v}_{M/\Re_G}\right)^2 dm$$

ដោយ $\vec{v}_{M/\Re_G} = \left(\frac{d\overrightarrow{GM}}{dt}\right)_{\Re_G}$ នៅក្នុងតម្រុយ $\Re_G$

$$E_{C/\Re} = \frac{1}{2}\left(\vec{v}_{G/\Re}\right)^2 \int dm + \vec{v}_{G/\Re} \cdot \frac{d}{dt}\int \overrightarrow{GM}\, dm + \frac{1}{2}\int \left(\vec{v}_{M/\Re_G}\right)^2 dm$$

តាមនិយមន័យផ្ចិតម៉ាស យើងបាន៖ $\int \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$

កន្សោមថាមពលស៊ីនេទិចក្លាយជា៖ $E_{C/\Re} = \frac{1}{2}\left(\vec{v}_{G/\Re}\right)^2 \int dm + \frac{1}{2}\int \left(\vec{v}_{M/\Re_G}\right)^2 dm$

ដែលសរសេរក្រោមទម្រង់ផងដែរ: $E_{C/\Re} = \frac{1}{2}\left(\vec{v}_{G/\Re}\right)^2 \int dm + E_{C/\Re_G}$

ថាមពលស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធ(S)ធ្វើចលនាណាមួយធៀបទៅនឹងតម្រុយ $\Re$ ស្មើនឹងថាមពលស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធនៅក្នុងចលនារបស់វាជុំវិញផ្ចិតនិចលភាពGរបស់វាបូកនឹងថាមពលស៊ីនេទិចនៃផ្ចិតនិចលភាពនៃម៉ាសសរុបរបស់ប្រព័ន្ធ។ ទំនាក់ទំនងនេះបង្កើតទ្រឹស្តី Koenig ចំពោះថាមពលស៊ីនេទិច។

5.3. អង្គធាតុមិនខូចរាងក្នុងចលនាណាមួយ

តម្រុយ $\Re$ នៅនឹង ហើយ $\Re'$ ជាតម្រុយភ្ជាប់នឹងអង្គធាតុមិនខូចរាងនិងមានផ្ចិតនិចលភាព G ។ M ជាចំណុចណាមួយនៃអង្គធាតុ តាមស៊ីនេម៉ាទិចនៃអង្គធាតុ៖

$$\vec{v}_{M/\Re} = \vec{v}_{O'/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{O'M}$$

ថាមពលស៊ីនេទិចនៃអង្គធាតុ(S)ត្រូវបានឱ្យដោយ៖

$$E_{C/\Re} = \int \frac{1}{2}\left(\vec{v}_{M/\Re}\right)^2 dm = \int \frac{1}{2}\left(\vec{v}_{O'/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{O'M}\right)^2 dm$$

$$E_{C/\Re} = \int \frac{1}{2}\left(\vec{v}_{M/\Re}\right) \cdot \left(\vec{v}_{O'/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{O'M}\right) dm$$

$$= \vec{v}_{O'/\Re} \cdot \int \frac{1}{2}\left(\vec{v}_{M/\Re}\right) dm + \int \frac{1}{2}\vec{v}_{M/\Re} \cdot \left(\vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \times \overrightarrow{O'M}\right) dm$$

$$= \frac{1}{2}\vec{v}_{O'/\Re} \cdot m\vec{v}_{G/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \cdot \int \frac{1}{2}\overrightarrow{O'M} \times \vec{v}_{M/\Re} dm$$

កន្សោមនៃម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច៖ $\vec{L}_{O'/\Re} = \int \overrightarrow{O'M} \times \vec{v}_{M/\Re} dm$

អញ្ចឹងយើងបានថាមពលស៊ីនេទិចជាអនុគមន៍នៃម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៃអង្គធាតុ៖

$$E_{C/\Re} = \frac{1}{2}\vec{v}_{O'/\Re} \cdot m\vec{v}_{G/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} \cdot \vec{L}_{O'/\Re}$$

បើ O' ត្រួតជាមួយផ្ចិតនិចលភាពG នៃអង្គធាតុ៖ $E_{C/\Re} = \frac{1}{2}m\left(\vec{v}_{G/\Re}\right)^2 + \vec{\Omega}_{\Re'/\Re} \cdot \vec{L}_{G/\Re}$

ដោយ $\vec{L}_{G/\Re} = I_G \vec{\Omega}_{\Re'/\Re}$ នោះទំនាក់ទំនងចុងក្រោយ៖ $E_{C/\Re} = \frac{1}{2}m\left(\vec{v}_{G/\Re}\right)^2 + \vec{\Omega}^T_{\Re'/\Re}\cdot I_G \vec{\Omega}_{\Re'/\Re}$

$\frac{1}{2}m\left(\vec{v}_{G/\Re}\right)^2$: ជាថាមពលស៊ីនេទិចនៃចលនារំកិលរបស់អង្គធាតុ។

$\vec{\Omega}^T_{\Re'/\Re}\cdot I_G \vec{\Omega}_{\Re'/\Re}$: ជាថាមពលស៊ីនេទិចនៃចលនារង្វិលជុំវិញផ្ចិតនិចលភាពG។

ថាមពលស៊ីនេទិចសរុបនៃអង្គធាតុដោយធ្វើចលនាណាមួយនៅក្នុងលំហស្មើនឹងផលបូកថាមពលស៊ីនេទិចនៃចលនារំកិលរបស់ផ្ចិតនិចលភាពនិងថាមពលស៊ីនេទិចនៃចលនារង្វិលជុំវិញផ្ចិតនិចលភាព។ ទំនាក់ទំនងនេះបង្កើតទ្រឹស្តី Koenig ចំពោះថាមពលស៊ីនេទិច។ ថាមពលស៊ីនេទិចសរុបអាចសំដែងជាអនុគមន៍នៃ torseur ស៊ីនេម៉ាទិច និងស៊ីនេទិចត្រង់O' ដាក់ក្រោមទម្រង់៖

$$E_{C/\Re} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}\\ \vec{v}_{M/\Re}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}m\vec{v}_{G/\Re}\\ \vec{L}_{O'/\Re}\end{pmatrix}$$

ថាមពលស៊ីនេទិចសរុបនៃអង្គធាតុស្មើនឹងកន្លះផលគុណស្កាលែនៃ torseur ស៊ីនេម៉ាទិចដោយ torseur ស៊ីនេទិចនៅចំណុច 0' សំដែងក្នុងតម្រុយ $\Re$ ។

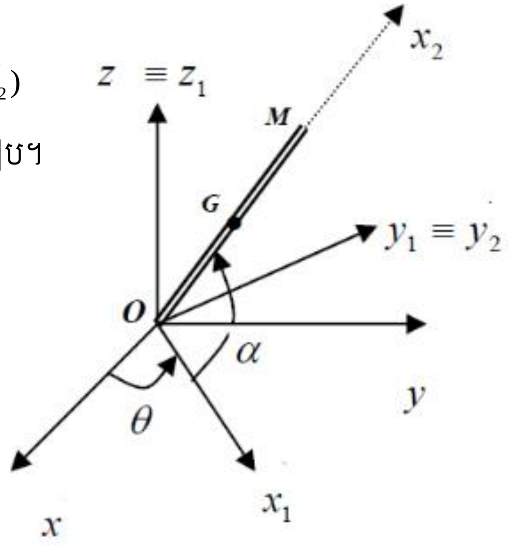
$$E_{C/\Re} = \frac{1}{2}[V]_{O'}\cdot[C]_{O'}$$

ឧទាហរណ៍២៦៖ របារស្មើសាច់មានប្រវែល 0M = L មានផ្ចិត G ធ្វើចលនានៅក្នុងតម្រុយនឹង $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។ គេឱ្យតម្រុយពីរទៀត $\Re_1(O,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ និង $\Re_2(O,\vec{i}_2,\vec{j}_2,\vec{k}_2)$ ដែល៖

$\Re_1(O,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ តម្រុយចល័ត $\vec{k}=\vec{k}_1,\ \theta=(\vec{i},\vec{i}_1)=(\vec{j},\vec{j}_1)$

$\Re_2(O,\vec{i}_2,\vec{j}_2,\vec{k}_2)$ ជាប់ទៅនឹងរបារដែល $\vec{j}_1=\vec{j}_2,\ \alpha=(\vec{i}_1,\vec{i}_2)=(\vec{k}_1,\vec{k}_2)$

យកតម្រុយ $\Re_1(O,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ ជួចតម្រុយនៃចំណោល និងជួចតម្រុយធៀប។



ចូរកំណត់៖

ក. ល្បឿនរង្វិល $\vec{\Omega}_{\Re_2/\Re}$ ។

ខ. ល្បឿន $\vec{v}_{M/\Re}$ និងសំទុះ $\vec{a}_{M/\Re}$ ។

គ. ល្បឿន $\vec{v}_{G/\Re}$ និងសំទុះ $\vec{a}_{M/\Re}$ ។

ឃ. ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច $\vec{L}_{O/\Re}$ នៅចំណុចOសំដែងក្នុង $\Re_1$ ។

ង. ម៉ូម៉ង់ឌីណាមិច $\overrightarrow{M}_{O/\Re}$ នៅចំណុចOសំដែងក្នុង $\Re_1$ ។

ច. គណនាថាមពលស៊ីនេទិចនៃរបារ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ល្បឿនរង្វិល $\vec{\Omega}_{\Re_2/\Re}$ ៖

$$\vec{\Omega}_{\Re_2/\Re}=\vec{\Omega}_{\Re_2/\Re_1}+\vec{\Omega}_{\Re_1/\Re}=-\dot{\alpha}\,\vec{i}_1+\dot{\theta}\vec{k}_1=\begin{pmatrix}0\\-\dot{\alpha}\\\dot{\theta}\end{pmatrix}_{\Re_1}\quad,\ \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re}=-\dot{\alpha}\,\vec{j}_1$$

ខ. ល្បឿន $\vec{v}_{M/\Re}$ និងសំទុះ $\vec{a}_{M/\Re}$ ៖

ល្បឿន $\vec{v}_{M/\Re}=\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\Re}=\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\Re_1}+\vec{\Omega}_{\Re_1/\Re}\times\overrightarrow{OM}$

យើងបាន $\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}2L\cos\alpha\\0\\2L\sin\alpha\end{pmatrix}_{\Re_1}\Rightarrow\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\Re_1}=\begin{pmatrix}-2l\dot{\alpha}\sin\alpha\\0\\2L\dot{\alpha}\cos\alpha\end{pmatrix}$

$$\vec{v}_{M/\Re}=\begin{pmatrix}-2L\dot{\alpha}\sin\alpha\\0\\2L\dot{\alpha}\cos\alpha\end{pmatrix}_{\Re_1}+\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{pmatrix}_{\Re_1}\times\begin{pmatrix}2L\cos\alpha\\0\\2L\sin\alpha\end{pmatrix}_{\Re_1}=\begin{pmatrix}-2L\dot{\alpha}\sin\alpha\\2L\dot{\theta}\cos\alpha\\2L\dot{\alpha}\cos\alpha\end{pmatrix}_{\Re_1}$$

សំទុះ $\vec{a}_{M/\Re}=\left(\dfrac{d\vec{v}_{M/\Re}}{dt}\right)_{\Re}+\vec{\Omega}_{\Re_1/\Re}\times\vec{v}_{M/\Re}$

$$\vec{a}_{M/\Re}=\begin{pmatrix}-2L(\ddot{\alpha}\sin\alpha+\dot{\alpha}^2\cos\alpha)\\2L(\ddot{\theta}\cos\alpha-\dot{\theta}\dot{\alpha}\sin\alpha)\\2L(\ddot{\alpha}\cos\alpha-\dot{\alpha}^2\sin\alpha)\end{pmatrix}_{\Re_1}+\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{pmatrix}_{\Re_1}\times\begin{pmatrix}-2L\dot{\alpha}\sin\alpha\\2L\dot{\theta}\cos\alpha\\2L\dot{\alpha}\cos\alpha\end{pmatrix}_{\Re_1}$$

$$\Rightarrow\quad\vec{a}_{M/\Re}=\begin{pmatrix}-2L(\ddot{\alpha}\sin\alpha+(\dot{\alpha}^2+\dot{\theta}^2)\cos\alpha\\2L(\ddot{\theta}\cos\alpha-2\dot{\theta}\dot{\alpha}\sin\alpha)\\2L(\ddot{\alpha}\cos\alpha-\dot{\alpha}^2\sin\alpha)\end{pmatrix}_{\Re_1}$$

គ. ល្បឿន $\vec{v}_{G/\Re}$ និងសំទុះ $\vec{a}_{G/\Re}$ ៖

ល្បឿន $\vec{v}_{G/\Re}=\vec{v}_{G/\Re_1}+\vec{v}_{\Re_1/\Re}(G)$

ដោយ $\overrightarrow{OG}=\begin{pmatrix}L\cos\alpha\\0\\L\sin\alpha\end{pmatrix}_{\Re_1}\Rightarrow\vec{v}_{G/\Re_1}=\left(\dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{\Re_1}=\begin{pmatrix}-L\dot{\alpha}\sin\alpha\\0\\L\dot{\alpha}\cos\alpha\end{pmatrix}_{\Re_1}$

$$\vec{v}_{\Re_1/\Re}(G) = \vec{v}_{O/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} \times \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re_1} \times \begin{pmatrix} L\cos\alpha \\ 0 \\ L\sin\alpha \end{pmatrix}_{\Re_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ L\dot{\theta}\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_1}$$

$$\vec{v}_{G/\Re} = \begin{pmatrix} -L\dot{\alpha}\sin\alpha \\ 0 \\ L\dot{\alpha}\cos\alpha \end{pmatrix}_{\Re_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ L\dot{\theta}\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_1} = \begin{pmatrix} -L\dot{\alpha}\sin\alpha \\ L\dot{\theta}\cos\alpha \\ L\dot{\alpha}\cos\alpha \end{pmatrix}_{\Re_1}$$

សំទុះ $\vec{a}_{G/\Re} = \vec{a}_{G/\Re_1} + \vec{a}_{\Re_1/\Re}(G) + \vec{a}_c(G)$

$$\vec{a}_{G/\Re_1} = \left(\frac{d\vec{v}_{G/\Re_1}}{dt}\right)_{\Re_1} = \begin{pmatrix} -L(\ddot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha \\ 0 \\ L(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha) \end{pmatrix}_{\Re_1}$$

$$\vec{a}_{\Re_1/\Re}(G) = \vec{a}_{O/\Re} + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\Re_1/\Re}}{dt}\right)_{\Re} \times \overrightarrow{OG} + \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} \times \left(\vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} \times \overrightarrow{OG}\right)$$

$$\vec{a}_{O/\Re} = \vec{0}, \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\Re_1/\Re}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\Re_1/\Re}}{dt}\right)_{\Re_1}$$

$$\vec{a}_{\Re_1/\Re}(G) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re_1} \times \begin{pmatrix} L\cos\alpha \\ 0 \\ L\sin\alpha \end{pmatrix}_{\Re_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re_1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re_1} \times \begin{pmatrix} L\cos\alpha \\ 0 \\ L\sin\alpha \end{pmatrix}_{\Re_1} = \begin{pmatrix} -L\dot{\theta}^2\cos\alpha \\ L\ddot{\theta}\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_1}$$

$$\vec{a}_c(G) = 2\left(\vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} \times \vec{v}_{G/\Re_1}\right) = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re_1} \times \begin{pmatrix} -L\dot{\alpha}\sin\alpha \\ 0 \\ L\dot{\alpha}\cos\alpha \end{pmatrix}_{\Re_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2L\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_1}$$

ផលបូកគ្រប់តួឱ្យ៖

$$\vec{a}_{G/\Re} = \begin{pmatrix} -L(\ddot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha) \\ 0 \\ L(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha) \end{pmatrix}_{\Re_1} + \begin{pmatrix} -L\dot{\theta}^2\cos\alpha \\ L\ddot{\theta}\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2L\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_1}$$

$$\vec{a}_{M/\Re} = \begin{pmatrix} -L(\ddot{\alpha}\sin\alpha + (\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2)\cos\alpha \\ L(\ddot{\theta}\cos\alpha - 2\dot{\theta}\dot{\alpha}\sin\alpha) \\ L(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha) \end{pmatrix}_{\Re_1}$$

ឃ. ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច $\vec{L}_{O/\Re}$ ត្រង់ O សំដែងក្នុង $\Re_1$ ៖

ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៅចំណុចOនៅក្នុងតម្រុយ $\Re$ ត្រូវបានឱ្យដោយ

$$\vec{L}_{O/\Re} = I_G\vec{\Omega}_{\Re_2/\Re} + \overrightarrow{OG}\times m\vec{v}_{G/\Re} \quad \text{ដោយ} \quad I_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix} \quad \text{និង} \quad \vec{\Omega}_{\Re_2/\Re} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re_1}$$

$$\vec{L}_{O/\Re} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}_{\Re_1} \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re_1} + \begin{pmatrix} L\cos\alpha \\ 0 \\ L\sin\alpha \end{pmatrix}_{\Re_1} \times m \begin{pmatrix} -L\dot{\alpha}\sin\alpha \\ L\dot{\theta}\cos\alpha \\ L\dot{\alpha}\cos\alpha \end{pmatrix}_{\Re_1}$$

$$\vec{L}_{O/\Re} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{mL^2}{3}\dot{\alpha} \\ \frac{mL^2}{3}\dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re_1} + \begin{pmatrix} -mL^2\dot{\theta}\cos\alpha\sin\alpha \\ -mL^2\alpha \\ mL^2\dot{\theta}\cos^2\alpha \end{pmatrix}_{\Re_1} = \begin{pmatrix} -mL^2\dot{\theta}\cos\alpha\sin\alpha \\ -\frac{4mL^2}{3}\dot{\alpha} \\ mL^2\dot{\theta}\left(\frac{1}{3}+\cos^2\alpha\right) \end{pmatrix}_{\Re_1}$$

ង. ម៉ូម៉ង់ឌីណាមិច $\overrightarrow{M}_{O/\Re}$ នៅចំណុច O សំដែងក្នុង $\Re_1$ ៖

វាត្រូវបានកំណត់ចេញពីម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចតាមទំនាក់ទំនង៖

$$\overrightarrow{M}_{O/\Re} = \left(\frac{d\vec{L}_{O/\Re}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d\vec{L}_{O/\Re}}{dt}\right)_{\Re_1} + \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re}\times\vec{L}_{O/\Re}$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O/\Re}}{dt}\right)_{\Re_1} = \begin{pmatrix} -mL^2(\ddot{\theta}\cos\alpha\sin\alpha - \dot{\theta}\dot{\alpha}\sin^2\alpha + \dot{\theta}\dot{\alpha}\cos^2\alpha) \\ -\frac{4mL^2}{3}\ddot{\alpha} \\ mL^2\left(\ddot{\theta}\left(\frac{1}{3}+\cos^2\alpha\right) - 2\dot{\theta}\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha\right) \end{pmatrix}_{\Re_1}$$

$$\vec{\Omega}_{\Re_1/\Re}\times\vec{L}_{O/\Re} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re_1} \times \begin{pmatrix} -mL^2\dot{\theta}\cos\alpha\sin\alpha \\ -\frac{4mL^2}{3}\dot{\alpha} \\ mL^2\dot{\theta}\left(\frac{1}{3}+\cos^2\alpha\right) \end{pmatrix}_{\Re_1} = \begin{pmatrix} -\frac{4mL^2}{3}\dot{\alpha}\dot{\theta} \\ -mL^2\dot{\theta}^2\cos\alpha\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_1}$$

យើងទាញបាន៖ $\vec{L}_{O/\Re} = \begin{pmatrix} -mL^2\left(\ddot{\theta}\cos\alpha\sin\alpha - \dot{\theta}\dot{\alpha}\sin^2\alpha + \dot{\theta}\dot{\alpha}\cos^2\alpha - \frac{4}{3}\dot{\alpha}\dot{\theta}\right) \\ -mL^2\left(\frac{4}{3}\ddot{\alpha} + \dot{\theta}^2\cos\alpha\sin\alpha\right) \\ mL^2\left(\ddot{\theta}\left(\frac{1}{3}+\cos^2\alpha\right) - 2\dot{\theta}\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha\right) \end{pmatrix}_{\Re_1}$

ច.ថាមពលស៊ីនេទិចនៃរបារ៖

ថាមពលស៊ីនេទិចសរុបមានចំពោះកន្សោម៖

$$E_C = \frac{1}{2}m\left(\vec{v}_{G/\Re}\right)^2 + \vec{\Omega}_{\Re_2/\Re} I_G \vec{\Omega}_{\Re_2/\Re}$$

$$E_C = \frac{1}{2}mL^2\left(\dot{\alpha}^2\sin^2\alpha + \dot{\theta}^2\cos^2\alpha + \dot{\alpha}^2\cos^2\alpha\right) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -\dot{\alpha} & \dot{\theta}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & mL^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & mL^2/3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ -\dot{\alpha} \\ \dot{\theta}\end{pmatrix}$$

$$E_C = \frac{1}{2}mL^2\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2\cos^2\alpha\right) + \frac{mL^2}{6}\dot{\alpha}^2 + \frac{mL^2}{6}\dot{\theta}^2$$

ដូចនេះ $E_C = \frac{2}{3}mL^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{3}+\cos^2\alpha\right)$

ឧទាហរណ៍២៧៖ យើងពិនិត្យប្រព័ន្ធរូបធាតុដូចទៅ (Σ) មានអង្គធាតុ៖ (S_1)ជាកង់វិលមានម៉ាសm$_1$ និងផ្ចិតម៉ាស G$_1$ ភ្ជាប់ទៅនឹងតម្រុយ $\Re_1$ ធ្វើចលនារំកិលធៀបទៅនឹងតម្រុយនឹង $\Re$ តាមអ័ក្ស z ។ (S_2)ជារបារស្មើសាច់មានប្រវែង 2b មានម៉ាស m$_2$ ផ្ចិតម៉ាស G$_2$ ភ្ជាប់ទៅតម្រុយ $\Re_2$ ។ (S_3)ជាថាសស្មើសាច់មានកាំ R មានម៉ាស m$_3$ ផ្ចិតម៉ាស G$_3$ ភ្ជាប់ទៅតម្រុយ $\Re_3$ ។ យើងកំណត់ tenseur និចលភាព៖

$$I_{G2}(S_2) = \begin{bmatrix}A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2\end{bmatrix}_{\Re_2}, \quad I_{G3}(S_3) = \begin{bmatrix}A_3 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3\end{bmatrix}_{\Re_3}$$

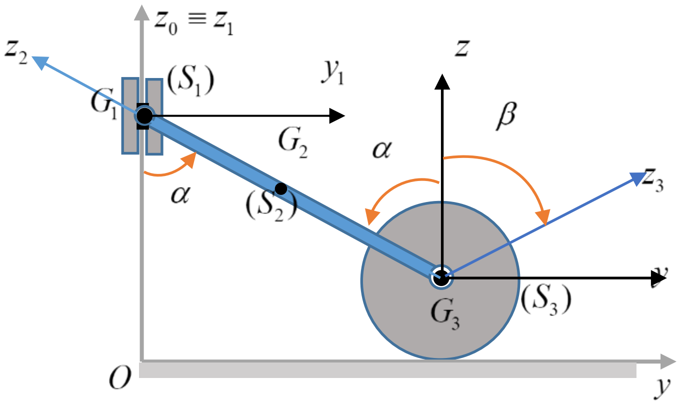
ក. ចូរកំណត់ល្បឿននិងសំទុះនៃចំណុច G_i ដោយ $i = 1,2,3$ ។

ខ. ចូរគណនាម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច $\vec{L}_{Gi}(S_i/\Re)$ នៃ (S_i) ត្រង់ G_i ដោយ $i = 1,2,3$ ។

គ. គណនាម៉ូម៉ង់ឌីណាមិច $\overrightarrow{M}_{Gi}(S_i/\Re)$ នៃ (S_i) ត្រង់ G_i ដោយ $i = 1,2,3$ ។

ឃ. ចូរទាញរកម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចនៃប្រព័ន្ធនៅចំណុច $G_1 : \overrightarrow{M}_{G1}(\Sigma/\Re)$ សំដែងនៅក្នុង $\Re$ ។

ង. ចូរគណនាថាមពលស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធ $E_C(\Sigma/\Re)$ ធៀបនឹង $\Re$ ។



ដំណោះស្រាយ

$\Re$ ជាតម្រុយនៅនឹង និងតម្រុយនៃចំនោលគឺ

$\Re_1 : \vec{k}_1 = \vec{k}$ និង $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \vec{0}$

$\Re_2 : \vec{i}_2 = \vec{i}$ និង $\vec{\Omega}(\Re_2/\Re) = \dot{\alpha}\,\vec{i}$

$\Re_3 : \vec{i}_3 = \vec{i}$ និង $\vec{\Omega}(\Re_3/\Re) = -\dot{\beta}\,\vec{i}$

$$\overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} 0 \\ b\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re} , \overrightarrow{OG_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R + 2b\cos\alpha \end{pmatrix}_{\Re} , \overrightarrow{OG_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ b\sin\alpha \\ R + b\cos\alpha \end{pmatrix}_{\Re} , \overrightarrow{OG_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b\sin\alpha \\ R \end{pmatrix}_{\Re}$$

ក. ល្បឿននិងសំទុះដាច់ខាតនៃចំណុច G_i ដោយ $i = 1,2,3$ ៖

ល្បឿនដាច់ខាត៖

$$\vec{v}_{G_1/\Re} = \left(\frac{d\overrightarrow{OG_1}}{dt}\right)_{\Re} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2b\dot{\alpha}\sin\alpha \end{pmatrix}_{\Re} , \vec{v}_{G_2/\Re} = \left(\frac{d\overrightarrow{OG_2}}{dt}\right)_{\Re} = \begin{pmatrix} 0 \\ b\dot{\alpha}\cos\alpha \\ -b\dot{\alpha}\sin\alpha \end{pmatrix}_{\Re} ,$$

$$\vec{v}_{G_3/\Re} = \left(\frac{d\overrightarrow{OG_3}}{dt}\right)_{\Re} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b\dot{\alpha}\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re}$$

សំទុះដាច់ខាត៖

$$\vec{a}_{G_1/\Re} = \left(\frac{d\vec{v}_{G_1/\Re}}{dt}\right)_{\Re} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2b\ddot{\alpha}\sin\alpha - 2b\dot{\alpha}^2\cos\alpha \end{pmatrix}_{\Re}$$

$$\vec{a}_{G_2/\Re} = \left(\frac{d\vec{v}_{G_2/\Re}}{dt}\right)_{\Re} = \begin{pmatrix} 0 \\ b\ddot{\alpha}\cos\alpha - b\dot{\alpha}^2\sin\alpha \\ -b\ddot{\alpha}\sin\alpha - b\dot{\alpha}^2\cos\alpha \end{pmatrix}_{\Re}$$

$$\vec{a}_{G_3/\Re} = \left(\frac{d\vec{v}_{G_3/\Re}}{dt}\right)_{\Re} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b\ddot{\alpha}\cos\alpha - 2b\dot{\alpha}^2\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re}$$

ខ. ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច $\vec{L}_{Gi}(S_i/\Re)$ នៃ(S_i)ត្រង់ G_i ដោយ $i=1,2,3$ ៖

ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៃអង្គធាតុទាំងបីត្រង់ផ្ចិតនិចលភាពរបស់វាត្រូវបានឱ្យដោយ៖

$$\vec{L}_{G1}(S_1/\Re) = \overrightarrow{G_1G_1} \times m_1\vec{v}_{G_1/\Re} + \mathrm{I}_1\vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} = \vec{0}$$

$$\vec{L}_{G2}(S_2/\Re) = \overrightarrow{G_2G_2} \times m_2\vec{v}_{G_2/\Re} + I_2\vec{\Omega}_{\Re_2/\Re} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2\dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A_2\dot{\alpha}\,\vec{i}$$

$$\vec{L}_{G3}(S_3/\Re) = \overrightarrow{G_3G_3} \times m_3\vec{v}_{G_3/\Re} + I_3\vec{\Omega}_{\Re_3/\Re} = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -\dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2\dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -A_3\dot{\beta}\,\vec{i}$$

គ. ម៉ូម៉ង់ឌីណាមិច $\overrightarrow{M}_{Gi}(S_i/\Re)$ នៃ (S_i) ត្រង់ G_i ដោយ $i=1,2,3$ ៖

ម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចទាញចេញពីដេរីវេម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច៖

$$\overrightarrow{M}_{G1}(S_1/\Re) = \left(\frac{d\vec{v}_{G_1/\Re}}{dt}\right)_{\Re} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M}_{G2}(S_2/\Re) = \left(\frac{d\vec{v}_{G_2/\Re}}{dt}\right)_{\Re} = A_2\ddot{\alpha}\,\vec{i}$$

$$\overrightarrow{M}_{G3}(S_3/\Re) = \left(\frac{d\vec{v}_{G_3/\Re}}{dt}\right)_{\Re} = -A_3\ddot{\beta}\,\vec{i}$$

ឃ. ម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចនៅចំណុច $G_1 : \overrightarrow{M}_{G1}(\Sigma/\Re)$ សំដែងនៅក្នុង $\Re$ ៖

ម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចនៃប្រព័ន្ធត្រង់ចំណុច G_1 ស្មើផលបូកនៃម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចនៃអង្គធាតុទាំងបីនៅចំណុចតែមួយ។

$$\overrightarrow{M}_{G1}(\Sigma/\Re)=\overrightarrow{M}_{G1}(S_1/\Re)+\overrightarrow{M}_{G2}(S_2/\Re)+\overrightarrow{M}_{G3}(S_3/\Re)$$

$$\overrightarrow{M}_{G1}(\Sigma/\Re)=\left(\frac{d\vec{L}_{G1}(S_1/\Re)}{dt}\right)_{\Re}+\left(\frac{d\vec{\sigma}_{G2}(S_2/\Re)}{dt}\right)_{\Re}+\left(\frac{d\vec{L}_{G3}(S_3/\Re)}{dt}\right)_{\Re}$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_{G1}(S_1/\Re)}{dt}\right)_{\Re}=\vec{0}$$

ដំបូង យើងគណនាម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៃអង្គធាតុ (S_2) និង (S_3) ត្រង់ G_1 ដោយប្រើរូបមន្តបញ្ជូន៖

$$\vec{L}_{G1}(S_2/\Re)=\vec{L}_{G2}(S_2/\Re)+\overrightarrow{G_1G_2}\times m_2\vec{v}_{G_2/\Re}$$

$$\vec{L}_{G1}(S_2/\Re)=A_2\dot{\alpha}\,\vec{i}+\begin{pmatrix}0\\ b\sin\alpha\\ -b\cos\alpha\end{pmatrix}\times m_2\begin{pmatrix}0\\ b\dot{\alpha}\cos\alpha\\ -b\dot{\alpha}\sin\alpha\end{pmatrix}=\left(A_2\dot{\alpha}+m_2b^2\dot{\alpha}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\vec{i}$$

ដូចនេះ $\vec{L}_{G1}(S_2/\Re)=\left(A_2\dot{\alpha}+m_2b^2\dot{\alpha}\cos 2\alpha\right)\vec{i}$

$$\vec{L}_{G1}(S_3/\Re)=\vec{L}_{G3}(S_3/\Re)+\overrightarrow{G_1G_3}\times m_3\vec{v}(G_3/\Re)$$

$$\vec{L}_{G1}(S_3/\Re)=-A_3\dot{\beta}\,\vec{i}+\begin{pmatrix}0\\ 2b\sin\alpha\\ -2b\cos\alpha\end{pmatrix}\times m_3\begin{pmatrix}0\\ 2b\dot{\alpha}\cos\alpha\\ 0\end{pmatrix}=\left(-A_3\dot{\beta}+4m_3b^2\dot{\alpha}\cos^2\alpha\right)\vec{i}$$

ដូចនេះ $\vec{L}_{G1}(S_3/\Re)=\left(-A_3\dot{\beta}+4m_3b^2\dot{\alpha}\cos^2\alpha\right)\vec{i}$

ម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចត្រូវបានទាញចេញពីដេរីវេម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចយ៉ាងងាយស្រួល៖

$$\left(\frac{d\vec{L}_{G1}(S_2/\Re)}{dt}\right)_{\Re}=\left(A_2\ddot{\alpha}+m_2b^2(\ddot{\alpha}\cos 2\alpha-2\dot{\alpha}^2\sin 2\alpha\right)\vec{i}$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_{G1}(S_3/\Re)}{dt}\right)_{\Re}=\left(-A_3\ddot{\beta}+4m_3b^2\ddot{\alpha}\cos^2\alpha-8m_3\dot{\alpha}^2\sin\alpha\cos\alpha\right)\vec{i}$$

$$=\left(-A_3\ddot{\beta}+4m_3b^2\ddot{\alpha}\cos^2\alpha-4m_3b^2\dot{\alpha}^2\sin 2\alpha\right)\vec{i}$$

ម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចនៃប្រព័ន្ធជាផលបូកកន្សោមទាំងពីរ៖

$$\overrightarrow{M}_{G1}(\Sigma/\Re)=\left(A_2\ddot{\alpha}+m_2b^2(\ddot{\alpha}\cos 2\alpha-2\dot{\alpha}^2\sin 2\alpha\right)\vec{i}+\left(-A_3\ddot{\beta}+4m_3b^2\ddot{\alpha}\cos^2\alpha-4m_3b^2\dot{\alpha}^2\sin 2\alpha\right)\vec{i}$$

$$\overrightarrow{M}_{G1}(\Sigma/\Re)=\left(A_2\ddot{\alpha}-A_3\ddot{\beta}+m_2b^2(\ddot{\alpha}\cos 2\alpha-2\dot{\alpha}^2\sin 2\alpha)+4m_3b^2(\ddot{\alpha}\cos^2\alpha-\dot{\alpha}^2\sin 2\alpha\right)\vec{i}$$

ង.ថាមពលស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធ $E_C(\Sigma/\Re)$ ធៀបទៅនឹង $\Re$ ៖

$$E_C(\Sigma/\Re)=E_C(S_1/\Re)+E_C(S_2/\Re)+E_C(S_3/\Re)$$

$$E_C(S_1/\Re)=\frac{1}{2}m_1\left(\vec{v}(G_1/\Re)\right)^2+\frac{1}{2}\vec{\Omega}^T(\Re_1/\Re)I_{G1}\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)=\frac{1}{2}m_1 4b^2\dot{\alpha}^2\sin^2\alpha$$

$$E_C(S_2/\Re)=\frac{1}{2}m_2\left(\vec{v}(G_2/\Re)\right)^2+\frac{1}{2}\vec{\Omega}^T(\Re_2/\Re)I_{G2}\vec{\Omega}(\Re_2/\Re)=\frac{1}{2}m_2b^2\dot{\alpha}^2+\frac{1}{2}\mathrm{A}_2\,\dot{\alpha}^2$$

$$E_C(S_3/\Re)=\frac{1}{2}m_3\left(\vec{v}(G_3/\Re)\right)^2+\frac{1}{2}\vec{\Omega}^T(\Re_3/\Re)I_{G3}\vec{\Omega}(\Re_3/\Re)=\frac{1}{2}m_3 4b^2\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha+\frac{1}{2}A_3\dot{\beta}^2$$

$$E_C(\Sigma/\Re)=\frac{1}{2}\left(b^2(4m_1\dot{\alpha}^2\sin^2\alpha+m_2\dot{\alpha}^2+4m_3\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha+A_2\dot{\alpha}^2+A_3\dot{\beta}^2\right)$$

ឧទាហរណ៍២៨៖ ប្រព័ន្ធមេកានិចដូចបង្ហាញផ្សំឡើងពីអង្គធាតុពីរ។ (S₁)៖ ជារបារមានប្រវែង $OO_1=L$ ម៉ាស មិនគិត ចុងទាំងពីរត្រូវបានភ្ជាប់៖ ស្វ៊ែ O និងស៊ីឡាំងត្រង់ O₁ (អ័ក្ស $\vec{i}_1$)។ ថាស(S₂)មានកាំ R និងម៉ាស m។ របារភ្ជាប់តម្រុយ $\Re_1(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ វិលនៅក្នុងប្លង់ឈរនៅល្បឿនមុំ $\dot{\theta}$ ធៀបទៅនឹងតម្រុយនឹង $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ជុំវិញអ័ក្ស $\vec{k}=\vec{k}_1$ ។ ថាសភ្ជាប់ទៅនឹងតម្រុយ $\Re_2(\vec{i}_2,\vec{j}_2,\vec{k}_2)$ វិលជុំវិញអ័ក្ស $\vec{i}_1=\vec{i}_2$ នៅល្បឿនមុំ $\dot{\varphi}$ ។ Tenseur និចលភាពនៃថាស(S₂)នៅចំណុច O₁ នៅក្នុង $\Re_1$ ត្រូវបានឱ្យដោយ៖

$$I_{O1}(S_2)=\begin{bmatrix}A&0&0\\0&C&0\\0&0&C\end{bmatrix}_{\Re_1}$$ យើងយក $\Re_1$ ដូចតម្រុយចំណោល។ ចូរកំណត់៖

ក. ល្បឿនមុំ $\vec{\Omega}(\Re_2/\Re)$ នៃថាសធៀបទៅនឹងតម្រុយនឹង។

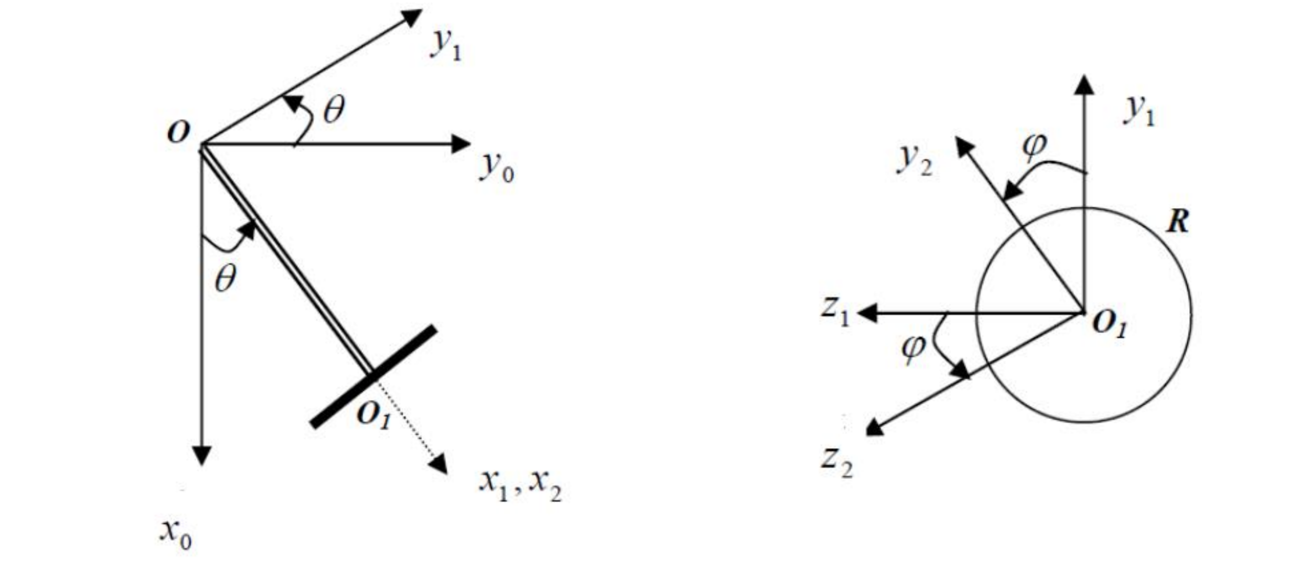
ខ. ល្បឿននិងសំទុះនៃចំណុច O₁ ធៀបទៅនឹងស៊ីនេម៉ាទិចនៃអង្គធាតុ។

គ. ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនិងម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចនៅចំណុច O₁ និង O ធៀបទៅនឹង $\Re$ ។

ឃ. ថាមពលស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធ។

ង. អនុវត្តទ្រឹស្តីឌីណាមិចសរុបចំពោះប្រព័ន្ធ។

ច. អនុវត្តទ្រឹស្តីម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចចំពោះប្រព័ន្ធនៅចំណុច O។



ដំណោះស្រាយ

ក. ល្បឿនមុំ $\vec{\Omega}(\Re_2/\Re)$ នៃថាសធៀបទៅនឹងតម្រុយនឹង $\Re$ និងសំដែងក្នុង $\Re_1$ ៖

$$\vec{\Omega}_{\Re_2/\Re} = \vec{\Omega}_{\Re_2/\Re_1} + \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re_1}$$

ខ. ល្បឿននិងសំទុះនៃចំណុច O_1 ធៀបទៅនឹងស៊ីនេម៉ាទិចនៃអង្គធាតុ

$$\vec{v}_{O_1/\Re} = \vec{v}_{O/\Re} + \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} \times \overrightarrow{OO_1}$$

$$\vec{v}_{O_1/\Re} = \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re_1} \times \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_1}$$

សំទុះ៖ $\vec{a}_{O_1/\Re} = \vec{a}_{O/\Re} + \left(\dfrac{d\vec{\Omega}_{\Re_1/\Re}}{dt} \right)_{\Re} \times \overrightarrow{OO_1} + \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} \times \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} \times \overrightarrow{OO_1}$

ដោយ $\left(\dfrac{d\vec{\Omega}_{\Re_1/\Re}}{dt} \right)_{\Re} = \left(\dfrac{d\vec{\Omega}_{\Re_1/\Re}}{dt} \right)_{\Re_1}$ យើងបាន៖

$$\vec{a}_{O_1/\Re} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re 1} \times \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re 1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re 1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ L\dot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re 1} = \begin{pmatrix} -L\dot{\theta}^2 \\ L\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re 1}$$

គ. ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនិងម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចនៅចំណុច O_1 និង O ធៀបទៅនឹង $\Re$ ៖

ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនិងម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចត្រង់ O_1 ៖

$$\vec{L}_{O_1/\Re} = I_{O1}\cdot\vec{\Omega}_{\Re_2/\Re} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\Re 1} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re 1} = \begin{pmatrix} A\dot{\varphi} \\ 0 \\ C\dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re 1}$$

$$\overrightarrow{M}_{O_1/\Re} = \left(\frac{d\vec{L}_{O_1/\Re}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d\vec{L}_{O_1/\Re}}{dt}\right)_{\Re 1} + \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re}\times\vec{L}_{O_1/\Re}$$

$$\vec{L}_{O_1/\Re} = \begin{pmatrix} A\ddot{\varphi} \\ 0 \\ C\ddot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re 1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re 1} \times \begin{pmatrix} A\dot{\varphi} \\ 0 \\ C\dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re 1} = \begin{pmatrix} A\ddot{\varphi} \\ A\dot{\varphi}^2 \\ C\ddot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re 1}$$

ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនិងម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចត្រង់ O ៖

$$\vec{L}_{O/\Re} = I_{O1}\cdot\vec{\Omega}_{\Re_2/\Re} + \overrightarrow{OO_1}\times m\vec{v}_{O_1/\Re}$$

$$\vec{L}_{O/\Re} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\Re 1} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re_1} + \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re 1} \times m \begin{pmatrix} o \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re 1} = \begin{pmatrix} A\dot{\varphi} \\ 0 \\ (C+mL^2)\dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re 1}$$

$$\overrightarrow{M}_{O/\Re} = \left(\frac{d\vec{L}_{O/\Re}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d\vec{L}_{O/\Re}}{dt}\right)_{\Re 1} + \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re}\times\vec{L}_{O/\Re}$$

$$\overrightarrow{M}_{O/\Re} = \begin{pmatrix} A\ddot{\varphi} \\ 0 \\ (C+mL^2)\ddot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re 1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re 1} \times \begin{pmatrix} A\dot{\varphi} \\ 0 \\ (C+mL^2)\dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re 1} = \begin{pmatrix} A\ddot{\varphi} \\ A\dot{\varphi}\dot{\theta} \\ (C+mL^2)\ddot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re 1}$$

ឃ. ថាមពលស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធ៖

$$E_C = \frac{1}{2}m\left(\vec{v}_{O_1/\Re}\right)^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^T_{\Re_2/\Re}\cdot I_{O1}\vec{\Omega}_{\Re_2/\Re} = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}\ 0\ \dot{\theta}\right)\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$E_C = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}C\dot{\theta}^2$$

ង. ទ្រឹស្តីឌីណាមិចសរុបចំពោះប្រព័ន្ធ៖

ផលបូកកម្លាំងអនុវត្តន៍ចំពោះប្រព័ន្ធស្មើនឹងម៉ាសនៃប្រព័ន្ធគុណនឹងសំទុះនិចលភាពរបស់វា។

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{O_1/\Re} \quad \text{ដោយ} \quad \vec{a}_{O_1/\Re} = \begin{pmatrix} -L\dot{\theta}^2 \\ L\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re 1}$$

$$\vec{R}_0 + m\vec{g} = m\vec{a}_{O_1/\Re} \Rightarrow R_{Ox} + mg\cos\theta = -mL\dot{\theta}^2,\ R_{Oy} + R_{O1y} - mg\sin\theta = L\ddot{\theta} \quad \text{និង}$$

$$R_{Oz} + R_{O1z} = 0$$

ច. ទ្រឹស្តីម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចនៃប្រព័ន្ធនៅចំណុច O ៖

ម៉ូម៉ង់នៃកម្លាំងក្រៅស្មើនឹងម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចដូចគ្នានៅចំណុច O ។

$$\sum \overrightarrow{M}_0(\vec{F}_{ext}) = \overrightarrow{M}_{O/\Re} \Leftrightarrow \overrightarrow{OO_1} \times \vec{R}_{O1} + \overrightarrow{OO} \times m\vec{g} = \overrightarrow{M}_{O/\Re}$$

$$\begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R_{O1y} \\ R_{O1z} \end{pmatrix}_{\Re 1} + \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re 1} \times \begin{pmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re 1} = \begin{pmatrix} A\ddot{\varphi} \\ A\dot{\varphi}\dot{\theta} \\ (C+mL^2)\ddot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re 1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -LR_{O1z} \\ LR_{O1y} - mgL\sin\theta \end{pmatrix}_{\Re 1} = \begin{pmatrix} A\ddot{\varphi} \\ A\dot{\varphi}\dot{\theta} \\ (C+mL^2)\dot{\theta} \end{pmatrix}_{\Re 1} \Leftrightarrow \begin{cases} A\ddot{\varphi} = 0 \\ -LR_{O1z} = A\dot{\varphi}\dot{\theta} \\ -mgL\sin\theta + LR_{O1y} = (C+mL^2)\ddot{\theta} \end{cases}$$

យើងបាន៖ $\dot{\varphi} = \text{ថេរ}$, $R_{O1z} = -\dfrac{A}{L}\dot{\varphi}\dot{\theta}$ និង $R_{O1y} = \dfrac{(C+mL^2)}{L}\ddot{\theta} + mg\sin\theta$

ឧទាហរណ៍២៩៖ ថាសស្មើសាច់មួយមានកាំ a ម៉ាស m រមៀលមិនរអិលលើដោយសារទំនាញដីលើប្លង់ទេរមានមុំ α ធៀបនឹងទិសដេក។ តម្រុយ $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ជាតម្រុយនឹងជាប់នឹងប្លង់ទេរ $\Re_1(G,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ ជាប់ទៅផ្ចិតថាស G និង $\Re_2(G,\vec{i}_2,\vec{j}_2,\vec{k}_2)$ ជាតម្រុយវិលធៀបទៅនឹងអ័ក្ស $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$ ដែល $(\vec{i}_1,\vec{i}_2) = (\vec{j}_1,\vec{j}_2) = \varphi$ ។ នៅខណៈដើម ថាសនៅនឹង។ ប្រតិកម្មនៅចំណុចប៉ះរវាងថាសនិងប្លង់ទេរមានកុំប៉ូសង់ពីរ មួយ $\vec{N}$ កែងទៅនឹងប្លង់ទេរ មួយទៀត $\vec{f}$ ប៉ះទៅនឹងប្លង់នេះ។ Tenseur ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃថាសត្រង់ផ្ចិតនិចលភាព G របស់វានៅក្នុងតម្រុយ $\Re_2$ ត្រូវបានឱ្យដោយ៖

$$I_{C/\Re_2} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 2A \end{bmatrix} \quad \text{ជាមួយ} \quad A = \frac{Ma^2}{4} \quad \text{យក } \Re_1 \text{ ដូចតម្រុយចំណោល។}$$

ក. ចូរកំណត់ល្បឿន $\vec{v}(G/\Re)$ និងសំទុះ $\vec{a}(G/\Re)$ នៃចំណុច G។

ខ. ចូរអនុវត្តទ្រឹស្តីឌីណាមិចសរុបចំពោះថាស។

គ. ចូរអនុវត្តទ្រឹស្តីម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចចំពោះថាស។

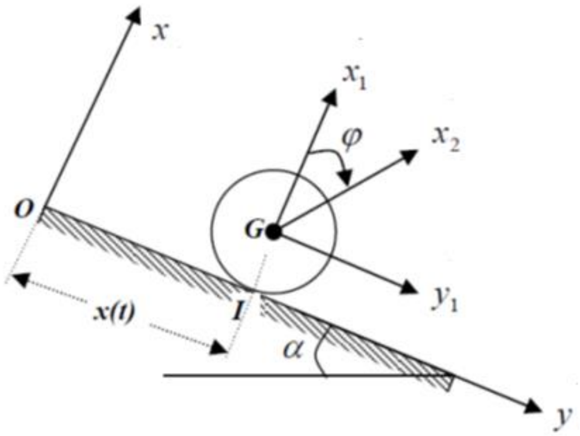
ឃ. ចូរបង្ហាញសមីការស្ពាលែដែលភ្ជាប់ប៉ារ៉ាម៉ែតស៊ីនេម៉ាទិច $\dot{y}$, $\dot{\theta}$ និង a និងបកស្រាយលក្ខខណ្ឌនៃការរមៀលមិនរអិលនៃថាសលើប្លង់ទេរ។

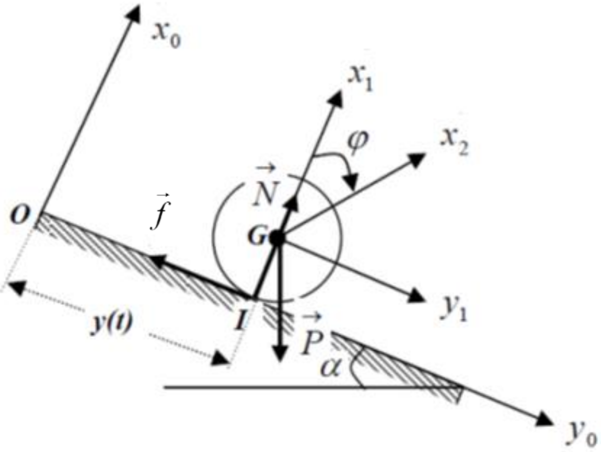
ង. ចូរទាញរកកន្សោម $N, f, \ddot{y}$ និង $\ddot{\varphi}$ ជាអនុគមន៍នៃ m, g, α និង a។

ច. ចូរកំណត់ថាមពលស៊ីនេទិចនៃថាសជាអនុគមន៍នៃ m, a, $\dot{y}$ និង $\dot{\varphi}$ ។

ឆ. ចូរសំដែងថាមពលស៊ីនេទិចនៃថាសជាអនុគមន៍នៃ m និង $\dot{y}$ ដោយរាប់បញ្ចូលលក្ខខណ្ឌនៃការរមៀលមិនរអិល។

ឈ. ដោយអនុវត្តទ្រឹស្តីថាមពលស៊ីនេទិចចំពោះថាស ចូររកឡើងវិញនូវកន្សោមសំទុះលីនេអ៊ែ $\ddot{y}$ ។





ដំណោះស្រាយ

$\Re$ ជាតម្រុយនៅនឹង។ $\Re_1$ ធ្វើចលនារំកិលធៀប $\Re \Rightarrow \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} = \vec{0}$

$\Re_2 : (\vec{i}_1, \vec{i}_2) = (\vec{j}_1, \vec{j}_2) = \varphi$ និង $\vec{\Omega}(\Re_2/\Re_1) = \dot{\varphi}\vec{k}_1 = \dot{\varphi}\vec{k}$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IG} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_1} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_1} = \begin{pmatrix} a \\ y \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_1}$$

ក. កំណត់ល្បឿន $\vec{v}_{G/\Re}$ និងសំទុះ $\vec{a}_{G/\Re}$ នៃចំណុច G ។

ដោយធ្វើដេរីវេ៖

$$\vec{v}_{G/\Re} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{\Re_1} + \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} \times \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_1}$$ ដោយ $\vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} = \vec{0}$

$$\vec{a}_{G/\Re} = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d\vec{v}_{G/\Re}}{dt}\right)_{\Re_1} + \vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} \times \vec{v}_{G/\Re} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{y} \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_1}$$ ដោយ $\vec{\Omega}_{\Re_1/\Re} = \vec{0}$

ខ. ទ្រឹស្តីឌីណាមិចសរុបអនុវត្តចំពោះថាស៖

កម្លាំងសរុបក្រៅអនុវត្តចំពោះថាសស្មើនឹងម៉ាសនៃថាសគុណនឹងសំទុះផ្ចិតនិចលភាពរបស់វា៖

$$\sum_i \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{G/\Re} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{f} + \vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}_{G/\Re} \qquad (1)$$

ចំណោលសមីការនេះលើអ័ក្សនៃតម្រុយ $\Re_1$ ឱ្យសមីការស្កាលែពីរ៖

$$N - mg\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$-T + mg\sin\alpha = m\ddot{y} \qquad (3)$$

គ. ទ្រឹស្តីម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចអនុវត្តន៍ចំពោះថាស៖

ម៉ង់សរុបនៃកម្លាំងក្រៅអនុវត្តន៍ចំពោះថាសស្មើនឹងម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចនៃថាសជុំចំណុច G ។

$$\sum_i \overrightarrow{M}(\vec{F}_{ext})/G = \overrightarrow{M}_{G/\Re} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GI} \times \vec{f} + \overrightarrow{GI} \times \vec{N} = \overrightarrow{M}_{G/\Re}$$ ដោយ $\overrightarrow{GI} // \vec{N}$ វាក្លាយជា៖

$$\overrightarrow{GI} \times \vec{f} = \overrightarrow{M}_{G/\Re} \qquad (4)$$

យើងសំដែងតួនីមួយៗនៃសមីការនេះ $\overrightarrow{GI} \times \vec{f} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -f \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ af \end{pmatrix}_{\Re_1} = aT\,\vec{k}_1$

ម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចស្មើនឹងដេរីវេនៃម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច $\overrightarrow{M}_{G/\Re} = \left(\frac{d\vec{L}_{G/\Re}}{dt}\right)_{\Re}$

ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៃថាសត្រូវបានឱ្យដោយ៖ $\vec{L}_{G/\Re} = I_{C/\Re_2}\vec{\Omega}_{\Re_2/\Re}$

$$\vec{L}_{G/\Re} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{\Re_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A\dot{\varphi} \end{pmatrix} = A\dot{\varphi}\vec{k}_1 = A\dot{\varphi}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M}_{G/\Re} = \left(\frac{d\vec{L}_{G/\Re}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d\vec{L}_{G/\Re}}{dt}\right)_{\Re_1} = A\ddot{\varphi}\vec{k}_1 = \frac{ma^2}{2}\ddot{\varphi}\vec{k}_1$$ ដោយ $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \vec{0}$

ដោយឱ្យកន្សោមទាំងពីរស្មើគ្នា យើងទទួលបាន៖

$$af = \frac{ma^2}{2}\ddot{\varphi} \;\Rightarrow\; f = \frac{ma}{2}\ddot{\varphi} \qquad (5)$$

ឃ. សមីការស្តាលៃភ្ជាប់ទៅប៉ារ៉ាម៉ែតស៊ីនេម៉ាទិច $\dot{x}, \dot{\theta}$ និង a ហើយបកស្រាយលក្ខខណ្ឌនៃការរមៀលមិនរអិលនៃថាសលើប្លង់ទេរ៖

លក្ខខណ្ឌរមៀលមិនរអិលត្រូវបានផ្ទៀងផ្ទាត់ បើល្បឿននៃចំណុចប៉ះនៃថាសនិងប្លង់ទេរគឺសូន្យ៖

$\vec{v}_g(I) = \vec{v}_s(I/\Re) - \vec{v}_P(I/\Re) = \vec{0}$ រីឯ $\vec{v}_P(I/\Re) = \vec{0}$

អញ្ចឹង $\vec{v}_s(I/\Re) = \vec{v}(G/\Re) + \vec{\Omega}(\Re_2/\Re)\times\overrightarrow{GI} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix}0\\ \dot{y}\\ 0\end{pmatrix}_{\Re_1} + \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix}_{\Re_1} \times \begin{pmatrix}-a\\ 0\\ 0\end{pmatrix}_{\Re_1} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}_{\Re_1} \;\Leftrightarrow\; \dot{y} - a\dot{\varphi} = 0 \qquad (6)$$

ង. កន្សោម $N, f, \ddot{y}$ និង $\ddot{\varphi}$ ជាអនុគមន៍នៃ m, g, α និង a ៖

សមីការ(3) ឱ្យ $N = mg\cos\alpha$

សមីការ(6) $\ddot{y} = a\ddot{\varphi} \;\Rightarrow\; \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{y}}{a}$ សមីការ(4)ក្លាយជា $-\frac{ma}{2}\frac{\ddot{y}}{a} + mg\sin\alpha = m\ddot{y}$

យើងទាញបាន៖ $\ddot{y} = \frac{2}{3}g\sin\alpha \;\Rightarrow\; \ddot{\varphi} = \frac{2}{3a}g\sin\alpha$

សមីការ(5)ឱ្យ $f = \frac{mg}{3}\sin\alpha$

ច. ថាមពលស៊ីនេទិចនៃថាសជាអនុគមន៍នៃ m, a, $\dot{y}$ និង $\dot{\varphi}$ ៖

ថាមពលស៊ីនេទិចសរុបស្មើនឹងថាមពលស៊ីនេទិចនៃចលនារំកិលបូកថាមពលស៊ីនេទិចចលនារំកិល៖

$$E_C = \frac{1}{2}m\left(\vec{v}(G/\Re)\right)^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^T_{\Re_1/\Re}\cdot I_G(S/\Re_2)\vec{\Omega}_{\Re_1/\Re}$$

$$E_C = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & \dot{\varphi}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & A\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2$$

ឆ. ថាមពលស៊ីនេទិចនៃថាសជាអនុគមន៍នៃ m និង $\dot{y}$ ដោយរាប់បញ្ចូលលក្ខខណ្ឌនៃការរមៀលមិនរអិល៖

យើងបាននៅក្នុងសមីការ(6)ដែលសំដែងការរមៀលមិនរអិល៖ $\dot{y} = a\dot{\varphi}$

យើងទាញបានថា៖ $\dot{\varphi}=\dfrac{\dot{y}}{a}$ កន្សោមនៃថាមពលស៊ីនេទិចក្លាយជា៖

$$E_C=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\frac{\dot{y}^2}{a^2}=\frac{3}{4}m\dot{y}^2$$

ឈ. អនុវត្តទ្រឹស្តីថាមពលស៊ីនេទិចចំពោះថាស ចូររកឡើងវិញនូវកន្សោមសំទុះលីនេអ៊ែ $\ddot{y}$ ៖

បម្រែបម្រួលថាមលស៊ីនេទិចស្មើនឹងកម្មន្តនៃកម្លាំងក្រៅ៖ $\dfrac{dE_C}{dt}=\dfrac{\delta W}{dt}$

$$E_C=\frac{3}{4}m\dot{y}^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{dE_C}{dt}=\frac{3}{2}m\dot{y}\ddot{y}$$

$$\frac{\delta W}{dt}=\frac{\delta W(\vec{f})}{dt}+\frac{\delta W(\vec{N})}{dt}+\frac{\delta W(\vec{P})}{dt}=\vec{f}\cdot\frac{d\overrightarrow{OI}}{dt}+\vec{N}\cdot\frac{d\overrightarrow{OI}}{dt}+m\vec{g}\cdot\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}=m\vec{g}\cdot\vec{v}_{G/\Re}$$

$$\frac{\delta W}{dt}=\vec{f}\cdot\vec{v}_{I/\Re}+\vec{N}\cdot\vec{v}_{I/\Re}+m\vec{g}\cdot\vec{v}_{G/\Re}=m\vec{g}\cdot\vec{v}_{G/\Re}$$ ដោយ $\vec{v}_{I/\Re}=\vec{0}$

$$\frac{\delta W}{dt}=m\vec{g}\cdot\vec{v}_{G/\Re}=\begin{pmatrix}-mg\cos\alpha\\ mg\sin\alpha\\ 0\end{pmatrix}_{\Re_1}\cdot\begin{pmatrix}0\\ \dot{y}\\ 0\end{pmatrix}_{\Re_1}=mg\dot{y}\sin\alpha$$

សមភាពនៃកន្សោមទាំងពីរឱ្យ៖

$$\frac{3}{2}m\dot{y}\ddot{y}=mg\dot{y}\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad \ddot{y}=\frac{2}{3}g\sin\alpha$$

ឧទាហរណ៍៣០៖ ថាសស្មើសាច់មួយមានកាំ r ផ្ចិត G ត្រូវបានដាក់ដោយគ្មានល្បឿនដើមលើកម្រាលវិល។ កម្រាល (ជាប្លង់ទេរមានមុំចំណោត α ធៀបទិសដេក)ផ្លាស់ទីជាមួយល្បឿន $\vec{v}_0=v_0\vec{i}$ តាមអ័ក្ស Ox_0 នៃតម្រុយដី $\Re(Oxyz)$។ ឧបមាថាកម្លាំងប៉ះត្រង់ I គឺ $\vec{R}=\vec{f}+N\vec{j}$, $f=\mu N$, μ ជាមេគុណកកិត និងតាង $\overrightarrow{OG}=x_C\vec{i}+r\vec{j}$។

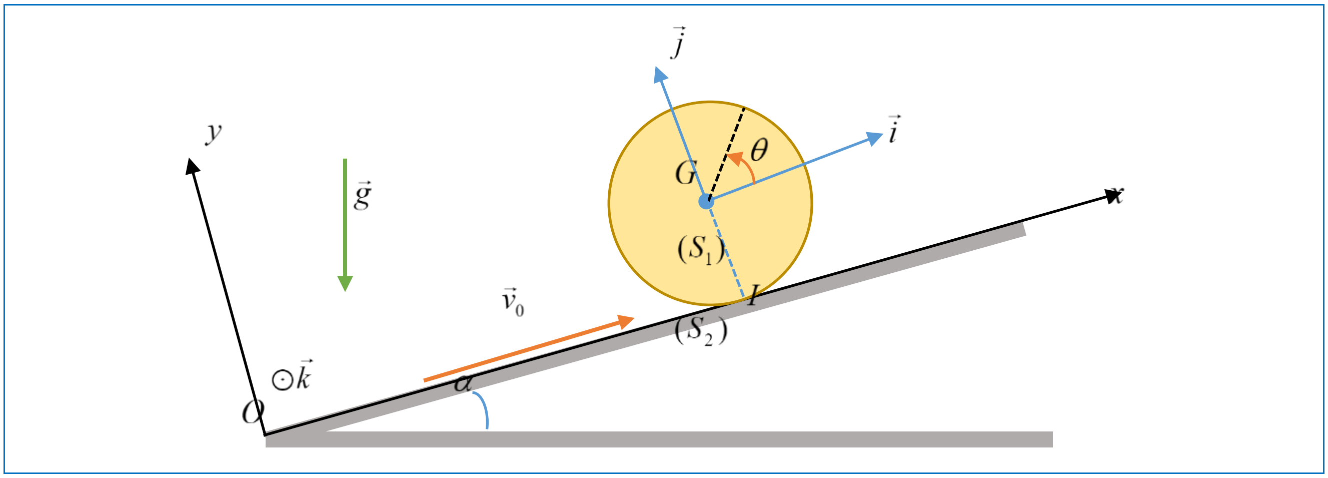
ក. គណនាល្បឿនរអិល $\vec{v}_g(S_1/S_2)$ នៃថាស (S_1) លើកម្រាល (S_2)។ ចូររកល្បឿនរអិលដើម $\vec{v}_{g0}(S_1/S_2)$ នៃថាសលើកម្រាល។

ខ. ចូរអនុវត្តគោលការណ៍គ្រឹះឌីណាមិចចំពោះថាសនៅក្នុងតម្រុយ $\Re$ និងរកសមីការពីជគណិតបីដោយចំណោលសមីការវ៉ិចទ័រពីរនៃគោលការណ៍គ្រឹះឌីណាមិចនៅក្នុងគោល $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$។

គ. ចូររកឡើងវិញ(ដោយប្រើទ្រឹស្តីថាមពលស៊ីនេទិច)នូវសមីការពីជគណិតពីរនៃសំណួរខ។

ឃ. ចូររកដេរីវេល្បឿនរអិលធៀបពេលជាអនុគមន៍នៃ g,μ និង α ។

ង. ដោយប្រើលទ្ធផលសំណួរគ ដើម្បីពណ៌នាបរិវត្តនៃល្បឿនរអិលរបស់ថាសលើកម្រាល។



ដំណោះស្រាយ

ក. ល្បឿនរអិល៖

$$\vec{v}_g(S_1/S_2)=\vec{v}(I\in S_1/\Re_0)-\vec{v}(I\in S_2/\Re_0)=(\dot{x}_C+r\dot{\theta}-v_0)\vec{i}$$

$\vec{v}_{g0}(S_1/S_2)=-v_0\,\vec{i}$ ដោយសារថាសត្រូវបានដាក់ដោយគ្មានល្បឿនដើម $\Rightarrow\ \dot{x}_C=\dot{\theta}=0$

ខ. គោលការណ៍គ្រឹះឌីណាមិច៖ $\Rightarrow\ [D(S_1/\Re)]=[F_{ext}\to S_1/\Re]$

(torseur ឌីណាមិច = torseur នៃកម្លាំងក្រៅដែលមានលើអង្គធាតុ)

សមភាពនៃ torseur $\Rightarrow$ សមភាពសរុប(ទ្រឹស្តីផ្ចិតម៉ាស)និងសមភាពនៃម៉ូម៉ង់ (ទ្រឹស្តីថាមពលស៊ីនេទិច) មានន័យថា៖

$m\vec{a}_{G/\Re}=f\,\vec{i}+N\,\vec{j}-mg\cos\alpha\,\vec{j}-mg\sin\alpha\,\vec{i}$ (ទ្រឹស្តីផ្ចិតម៉ាស)

$$\overrightarrow{M}(G,S_1/\Re)=\frac{d\vec{L}(G,S_1/\Re)}{dt}=\overrightarrow{M}(G,F_{ext}\to S_1/\Re)$$

$$\overrightarrow{M}(G,S_1/\Re)=\frac{d\vec{L}(G,S_1/\Re)}{dt}=\frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M}(G,F_{ext}\to S_1/\Re)=\overrightarrow{GI}\times f\,\vec{i}=f\cdot r\,\vec{k}$$

ចំណោលនៃសមីការវ៉ិចទ័រនាំទៅ៖ $\begin{cases}\ddot{x}=\dfrac{f}{m}-g\sin\alpha\\ N=mg\cos\alpha\\ \ddot{\theta}=\dfrac{2f}{mr}\end{cases}$

គ. ធ្វើឡើងវិញ(ដោយប្រើទ្រឹស្តីថាមពលស៊ីនេទិច)នូវសមីការពីជគណិតពីរនៃសំណួរខ៖

$$E_C(S_1/\Re)=\frac{1}{2}m\vec{v}^2(G/\Re)+\frac{1}{2}I_{\Delta G}\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}m\dot{x}_C^2+\frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{dE_C(S_1/\Re)}{dt}=m\dot{x}_C\ddot{x}_C+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$P(F_{ext}\to S_1/\Re)=\vec{R}\cdot\vec{v}(G/\Re)+\overrightarrow{M}(G,F_{ext}\to S_1/\Re)\cdot\vec{\Omega}(S_1/\Re)$$

$$=(f\,\vec{i}+N\,\vec{j}-mg\cos\alpha\,\vec{j}-mg\sin\alpha\,\vec{i})\cdot\dot{x}_C\vec{i}-f\,r\,\vec{k}\cdot\dot{\theta}\vec{k}$$

$$=(f-mg\sin\alpha)\dot{x}_C+f\,r\,\dot{\theta}$$

ដូចនេះ $m\dot{x}_C\ddot{x}_C+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta}=(f-mg\sin\alpha)\dot{x}_C-f\,r\,\dot{\theta}$

យើងទាញបាន៖ $\begin{cases}\ddot{x}_C=\dfrac{f}{m}-mg\sin\alpha\\ \ddot{\theta}=\dfrac{2f}{mr}\end{cases}$

ឃ. ដេរីវេល្បឿនរអិលធៀបពេលជាអនុគមន៍នៃ g,μ និង α ៖

$$\frac{d\vec{v}_g(S_1/S_2)}{dt}=(\ddot{x}_C+r\ddot{\theta})\vec{i}$$

ដោយសារ $\vec{v}_{g0}(S_1/S_2)=-v_0\,\vec{i}\quad\Rightarrow\quad f\,\vec{i}=+\mu N\,\vec{i}=\mu mg\cos\alpha\,\vec{i}$

ដោយជំនួស f ដោយ $\mu mg\cos\alpha$ នៅក្នុងកន្សោម $\ddot{x}_C$ និង $\ddot{\theta}$ យើងទទួលបាន៖

$$\left(\frac{d\vec{v}_g}{dt}\right)_{\Re_0}=3g\cos\alpha\left(\mu-\frac{\tan\alpha}{3}\right)\vec{i}=\frac{dv_g}{dt}\vec{i}$$

ង. ដោយប្រើសំណួរគ យើងទាញបាន៖

- បើ $\mu>\dfrac{\tan\alpha}{3}\quad\Rightarrow\quad v_g$ កើនចេញពី $-v_0$ រហូតដល់សូន្យ $\Rightarrow$ ដំបូងវាមានការរអិល បន្ទាប់អវត្តមានការរអិលចេញពីខណៈដែល v_g នឹងទៅសូន្យ។

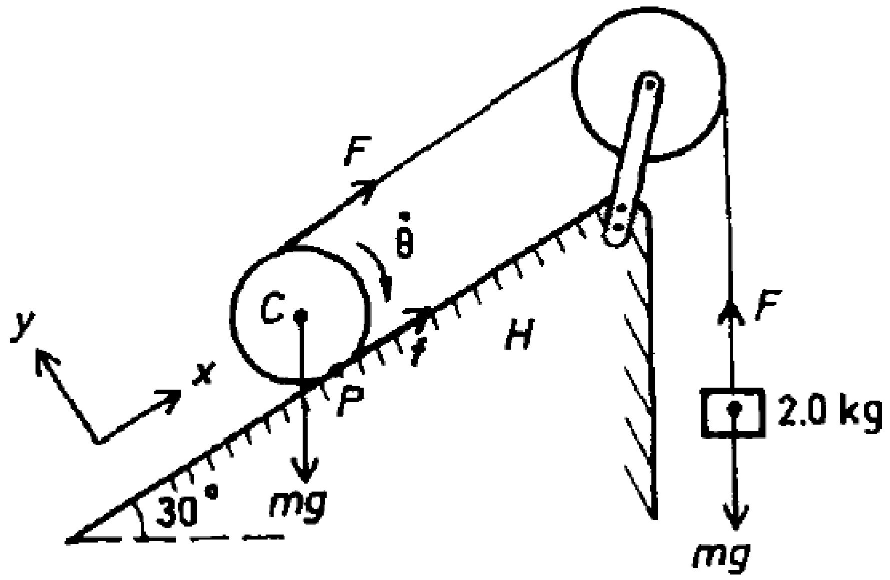
- បើ $\mu<\dfrac{\tan\alpha}{3}\Rightarrow v_g$ ថយចុះចេញពី $-v_0\Rightarrow$ ជានិច្ចកាលនឹងមានរអិល។

ឧទាហរណ៍៣១៖ ស៊ីឡាំង C (ម៉ាស10 kg និងកាំ 0.07 m) រមៀលមិនរអិលលើជម្រាល H ដូចបង្ហាញលើរូប។ ខ្សែមិនយឺតត្រូវបានរុំជុំវិញស៊ីឡាំង C ។

ក. តើស៊ីឡាំង C ឡើងលើប្លង់ទេរបានចម្ងាយប៉ុន្មាន នៅពេលម៉ាស 2 kg ចលនាចុះក្រោមបានមួយម៉ែត ?

ខ. ចូរកំណត់តម្លៃ និងទិសនៃសំទុះ។

គ. ចូរកំណត់តម្លៃ និងទិសនៃកម្លាំងកកិតស្ដាទិចនៅចំណុចប៉ះ P ។



ដំណោះស្រាយ

ក. នៅពេលខ្សែមិនយឺត នៅពេលផ្ចិត C ចលនាឡើងលើប្លង់ទេរបានចម្ងាយ Δx ម៉ាស 2 kg និងធ្លាក់ចុះបាន Δx ដែរ។ ប៉ុន្តែនៅពេលបន្ថែមប្រវែង Δx នៃខ្សែត្រូវបានលែងក្នុងលំនាំម៉ាស 2 kg នឹងចុះបាន $2\Delta x$ ។ ដូចនេះ នៅពេលម៉ាស 2 kg ចលនាចុះបានមួយម៉ែត C នឹងចលនាឡើងប្លង់ទេរបាន 0.5 m ឬ ឡើងបានទិសឈរ $0.5\sin 30^0 = 025\text{m}$ ។

ខ. កម្លាំងដែលពាក់ព័ន្ធត្រូវបានបង្ហាញលើរូប។

ផលខាងលើមានន័យថា សម្រាប់ម៉ាស 2 kg យើងបាន៖

គោលការណ៍គ្រឹះឌីណាមិច៖ $2m\ddot{x} = mg - F$

ចំពោះស៊ីឡាំង គោលការណ៍គ្រឹះឌីណាមិច៖ $M\,\ddot{x} = F + f - Mg\sin 30^0$

ទ្រឹស្តីម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច៖ $I\ddot{\theta} = (F - f)R$

ដែល $I = \frac{1}{2}MR^2$ ។ លើសពីនេះ ដោយសារស៊ីឡាំងរមៀលមិនរអិល យើងបានផងដែរ៖

$$\ddot{x} = R\ddot{\theta}$$

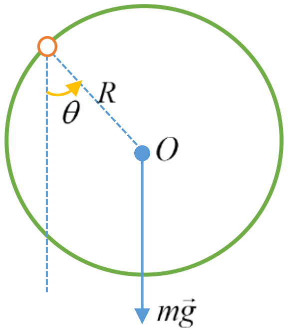
សមីការខាងលើឱ្យ $\ddot{x}=\left(\dfrac{4m-M}{8m+3M}\right)g=-0.426\,\text{m/s}^2$

ដូចនេះសំទុះមានតម្លៃ 0.426 m/s^2 និងមានទិសដៅចុះក្រោមស្របប្លង់ទេរ។

គ. $f=4M(\ddot{x}+g)=23\text{N}$ មានទិសដៅឡើងលើស្របប្លង់ទេរ។

ឧទាហរណ៍៣២៖ កងស្តើសាច់មានម៉ាស M និងកាំ R ព្យួរក្នុងប្លង់ឈរទ្រេដោយចុងកាំបិតនៅចំណុចមួយលើខាងក្នុង។ ចូរគណនាប្រេកង់លំយោលនៃលំយោលតូច។

ដំណោះស្រាយ



ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃកងជុំវិញទម្រចុងកាំបិតគឺ

$$I=MR^2+MR^2=2MR^2$$

យើងបានសមីការចលនា៖ $I\ddot{\theta}=-MgR\sin\theta$

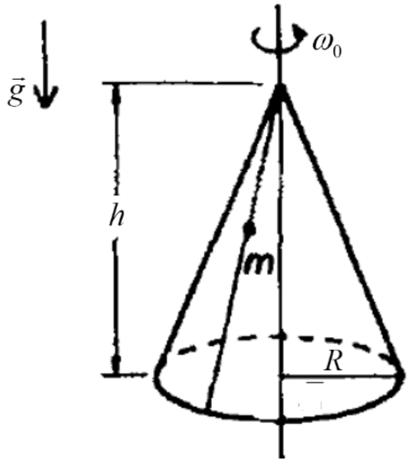
ករណីលំយោលតូច $\sin\theta=\theta(\text{rad})$

$I\ddot{\theta}=-MgR\theta$ ឬ $\ddot{\theta}+\dfrac{MgR}{I}\theta=0$ (សមីការលំយោលអាម៉ូនិច)

ប្រេកង់នៃលំយោល៖

$$f=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{MgR}{I}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{2R}}$$

ឧទាហរណ៍៣៣៖ កោនមួយមានកម្ពស់ h និងកាំបាតR ត្រូវបានបង្ខំឱ្យវិលជុំវិញអ័ក្សឈររបស់វា ដូចបង្ហាញលើរូប។ ចង្អូរតូចត្រូវបានលកលើផ្ទៃកូនពីកំពូលមកបាត។ កោនដាក់ឱ្យវិលជាមួយល្បឿនមុំដើម ω_0 ជុំវិញអ័ក្សរបស់វា និងគុជតូចមួយ(ដូចចំណុចរូបធាតុ)មានម៉ាស m ត្រូវបានលែងពីកំពូលដោយគ្មានកកិតតាមចង្អូរ ដោយសារទំនាញដី។ សន្មតថា គុជនៅក្នុងចង្អូរ និងម៉ូម៉ង់និចលភាពកោនវិលជុំវិញអ័ក្សរបស់វាគឺ I_0។



ក. គណនាល្បឿនមុំនៃកោនពេលគុជមកដល់បាតកោន។

ខ. ចូររកល្បឿននៃគុជនៅក្នុងតម្រុយពិសោធន៍ នៅពេលវាចាកចេញពីកោន។

ដំណោះស្រាយ

ក. ល្បឿនមុំនៃកោនពេលគុជមកដល់បាតកោន៖

ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចសរុបនៃប្រព័ន្ធត្រូវបានរក្សា។ ល្បឿនមុំ ω នៃកោននៅពេលដែលគុជមកដល់បាតនៃកោន៖

$$I_0\omega_0 = (I_0 + mR^2)\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{I_0\omega_0}{I_0 + mR^2}$$

ខ. ល្បឿននៃគុជនៅក្នុងតម្រុយពិសោធន៍ នៅពេលវាចាកចេញពីកោន៖

ថាមពលនៃប្រព័ន្ធត្រូវបានរក្សា។ ល្បឿន v នៃគុជ នៅពេលវាមកដល់បាតនៃកោន៖

$$\frac{1}{2}I_0\omega_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

$$v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = v_{\parallel}^2 + R^2\omega^2$$

ដែល $v_{\parallel}$ ជាល្បឿននៃគុជស្របទៅនឹងចង្កូរ និង $v_{\perp}$ ជាល្បឿននៃគុជកែងទៅនឹងចង្កូរ។

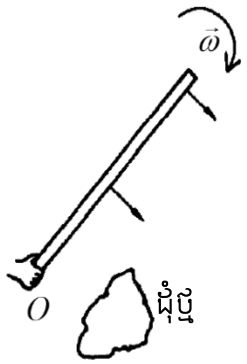
$$v_{\parallel}^2 = I_0\omega_0^2 - \frac{\left(I_0 + mR^2\right)}{m}\frac{I_0^2\omega^2}{\left(I_0 + mR^2\right)^2} + 2gh = \frac{I_0\omega_0^2R^2}{I_0 + mR^2} + 2gh$$

ដូចនេះ ល្បឿននៃគុជ នៅពេលវាទៅដល់បាតគឺ

$$\vec{v} = v_{\perp}\vec{i} + v_{\parallel}\vec{j} = \frac{I_0\omega_0 R}{I_0 + mR^2}\vec{i} + \sqrt{\frac{I_0\omega_0^2R^2}{I_0 + mR^2} + 2gh}\;\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\left(\frac{I_0\omega_0 R}{I_0 + mR^2}\right)^2 + \frac{I_0\omega_0^2R^2}{I_0 + mR^2} + 2gh}$$

ឧទាហរណ៍៣៤ បុរសម្នាក់ចង់កាច់បំបាក់ដងវែងដោយវាយវាទៅលើដុំថ្ម។ ចុងនៃដង ដែលនៅក្នុងដៃរបស់គាត់ វិលដោយគ្មានបន្លាស់ទីដូចបង្ហាញលើរូប។ បុរសចង់ចៀស វាងប្រើកម្លាំងធំមានអំពើលើដៃរបស់គាត់នៅពេលដងវាយដុំថ្ម។ តើចំណុចមួយណានៅ លើដងគួរតែវាយលើដុំថ្ម?



ដំណោះស្រាយ

យកចំណុចដែលប៉ះដុំថ្មនៅចម្ងាយ x ពីចុងដង O។

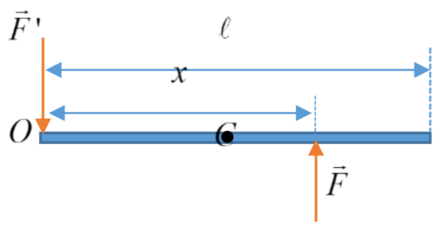
$\vec{F}$ ជាកម្លាំងដែលដុំថ្មមានអំពើលើដង។

$\vec{F}'$ ជាកម្លាំងដែលដៃមានលើដង។

ចលនានៃផ្ចិតម៉ាស C យើងបាន៖ $\int (F - F')dt = mv$ និង $\int \left[F \cdot \left(x - \frac{l}{2} \right) - F' \cdot \frac{l}{2} \right] dt = I\omega$

ដែល v ជាល្បឿននៃផ្ចិត C , ω ជាល្បឿនមុំវិលជុំ C ភ្លាមៗបន្ទាប់ពីអនុវត្តកម្លាំង F និង $I = \frac{1}{12} ml^2$, m ជាម៉ាសដង។ នៅពេល O នៅតែរក្សាលំនឹង យើងត្រូវការ៖

$$v - \frac{\omega l}{2} = 0 \quad \Rightarrow v = \frac{\omega l}{2}$$



ដូចនេះ យើងតម្រូវការ $F' \approx 0$ ដើម្បីឱ្យ

$$\int Fdt = mv \quad \text{និង} \quad \left(x - \frac{l}{2} \right) \int Fdt = I\omega$$

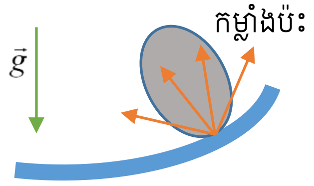
$$\Rightarrow \quad x = \frac{l}{6} + \frac{l}{2} = \frac{2l}{3}$$

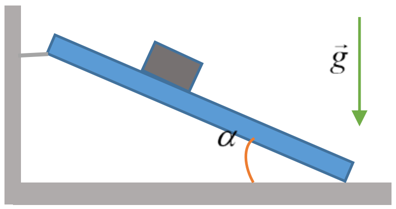
6. ច្បាប់គូឡុំស្តីពីកកិតអង្គធាតុរឹង

នៅក្នុងការអនុវត្ត យើងសិក្សាចលនានៃអង្គធាតុរឹងក្នុងការប៉ះគ្នាជាមួយអង្គធាតុរឹងមួយទៀត។ ដូចរូប យើងបានរាប់កម្លាំងទំនាញ និងកម្លាំងប៉ះដែលមានអំពើលើអង្គធាតុ។

ជាករណីដូចគ្នាដែរ យើងដាក់អង្គធាតុ S_1 លើប្លង់ទេរ S_2 ដូចរូប។ យើងសង្កេតឃើញថា អង្គធាតុនៅនឹងលើប្លង់ទេរដែលមានមុំចំណោតតូចល្មម បើយើងបង្កើនមុំចំណោតនៃប្លង់ទេរ S_1 ចាប់ផ្តើមចលនាដោយរអិល។

ជាទូទៅកម្លាំងប៉ះទាំងនេះដើរតួយ៉ាងសំខាន់នៅក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ ដូចជាយើងដើរដោយជើងរួច ដោយសារកម្លាំងទាំងនេះ។ ទោះបីវាត្រូវបានបង្រួមប៉ារ៉ាម៉ែតដែលអាស្រ័យចលនារបស់អង្គធាតុ ការសិក្សាចលនានេះជានិច្ចកាលពិបាកជាងការអនុវត្តមានរបស់ពួកវា។ ជាការពិត ការគណនាកម្លាំងទាំងនេះវាស្មុគស្មាញណាស់ ដោយសារវាអាស្រ័យធម្មជាតិពិតប្រាកដនៃអន្តរកម្មរវាងសំណុំភាគល្អិត ទីតាំងនៃភាគល្អិតទាំងនេះនៅក្បែរផ្ទៃ និងតាមវិបាកនៃទម្រង់ផ្ទាររបស់ផ្ទៃ។ ដូចនេះ កម្លាំងទាំងនេះមិនមែនមូលដ្ឋានគ្រឹះធម្មតា ដូចកម្លាំងទំនាញ ឬកម្លាំងអេឡិចត្រូម៉ាញេទិច។



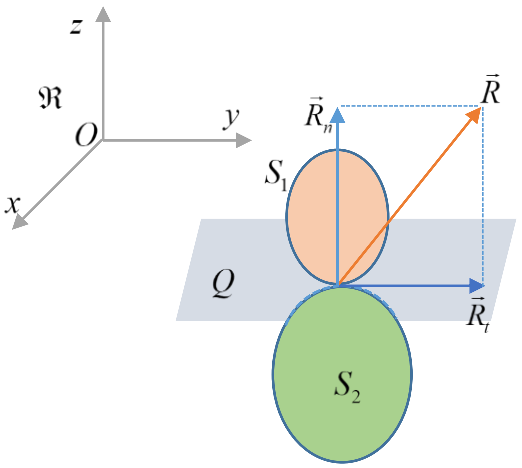


6.1. អំពើនៃការប៉ះ

យើងគូសរូបអំពើនៃការប៉ះដែលអនុវត្តដោយអង្គធាតុ S_2 លើអង្គធាតុ S_1 ហើយនៅកន្លែងប៉ះជាសំណុំនៃកម្លាំង។ តាង $\vec{R}$ ជាផលបូកនៃកម្លាំងប៉ះទាំងនេះ និង $\overrightarrow{M_I}$ ជាផលបូកម៉ូម៉ង់របស់ពួកវា។ $\vec{R}$ និង $\overrightarrow{M_I}$ ជាធាតុបង្រួមនៃ Torseur របស់អំពើនៃការប៉ះ $[R]_I$ នៅចំណុច I ។

ដោយណែនាំប្លង់ប៉ះ Q និងខ្សែកែងរបស់វា $\vec{n}$ មានទិសដៅទៅ S_1 ដែលរងអំពើ $\vec{R}$ និង $\overrightarrow{M_I}$ យើងសរសេរ៖

$\vec{R}=\vec{R}_t+\vec{R}_n$ និង $\overrightarrow{M_I}=\overrightarrow{M_{I,t}}+\overrightarrow{M_{I,n}}$



តាមនិយមន័យ៖

$\vec{R}_n$ ជាអន្តរកម្មកែង

$\vec{R}_t$ កម្លាំងកកិតឬកម្លាំងទប់ទៅនឹងការរអិល ឬកម្លាំងស្អិតជាប់

$\overrightarrow{M_{I,n}}$ ម៉ូម៉ង់ទប់នៅចំណុចរង្វិល

$\overrightarrow{M_{I,t}}$ ម៉ូម៉ង់ទប់ទៅនឹងការរមៀលនៅចំណុច I

6.2. ច្បាប់ស្តីពីកកិតអង្គធាតុរឹង

ច្បាប់បាតុភូតកកិតដោយរអិលរវាងអង្គធាតុរឹងត្រូវបានផ្តើមចេញតាំងពីសតវត្សទី១៧ម្លេះ។

ក. ប្រតិកម្មកែង $\vec{R}_n$

កម្លាំងប្រតិកម្មកែងដែលអនុវត្តលើអង្គធាតុ S_1 ដោយអង្គធាតុ S_2 មានទិសដៅចូលទៅក្នុងអង្គធាតុ S_1។ លទ្ធផលនេះទទួលបានយ៉ាងងាយ ដោយសារប្រតិកម្ម ជាទូទៅផ្ទុយទៅនឹងការចូលនៃអង្គធាតុមួយនៅក្នុងអង្គធាតុមួយទៀត៖ ដូចនេះប្រតិកម្មកែងជាកម្លាំងចម្រាន។ បើ S_1 លើ S_2 ប្រតិកម្មកែងគឺ $-\vec{R}_n$ ។

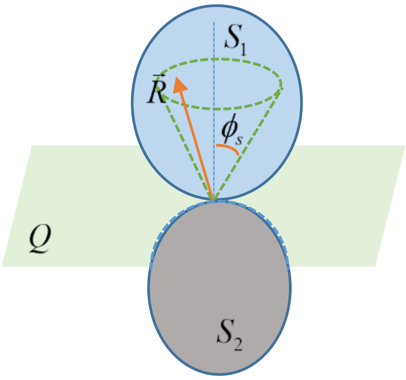
តម្លៃនៃប្រតិកម្មកែងអាស្រ័យទៅនឹងលក្ខខណ្ឌនៃចលនា ឬលំនឹង និងអំពើខាងក្រៅផ្សេងទៀតដែលបានអនុវត្តលើ S_1។

ខ. ប្រតិកម្មប៉ះ $\vec{R}_t$

ករណីល្បឿនរអិលសូន្យ $\vec{v}_g=\vec{v}_{1/2}=\vec{0}$ ។ យើងអនុវត្តលើអង្គធាតុ S_1 (ប៉ះដោយគ្មានរអិលជាមួយ S_2)នូវកម្លាំងទាញ $\vec{F}$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ Q ប៉ះត្រង់ I ទៅនឹងផ្ទៃកំណត់ដោយ S_1 និង S_2។ ពិសោធន៍បង្ហាញថា ល្បឿនរអិលនៅតែសូន្យ F នៅពេលមិនទៅដល់តម្លៃអតិបរមា $R_{t,\max}$ ដែល៖ $R_{t,\max}=\mu_s R_n$ ដែល μ_s ហៅថាមេគុណកកិតស្តាទិច។

ដូចនេះក្នុងករណីមិនរអិល ទទួលបានវិសមភាពដូចតទៅ៖

$R_t \le \mu_s R_n$



ជាលក្ខណៈធរណីមាត្រ ប្រតិកម្ម $\vec{R}$ ស្ថិតនៅក្នុងកោនបរិវត្ត អ័ក្សកែងទៅនឹងប្លង់ Q ត្រង់ I មានកំពូល I និងកន្លះមុំ $\phi_s = \tan^{-1}\mu_s$ ។ កោននេះហៅថា កោនកកិត។

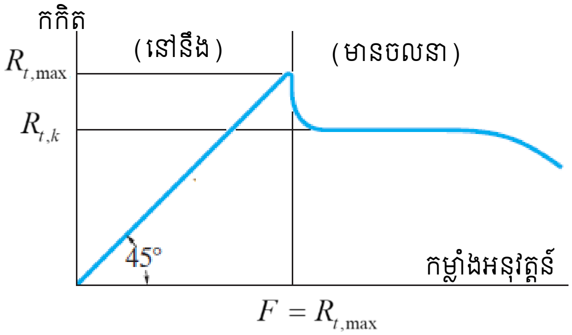
ករណីល្បឿនរអិលខុសពីសូន្យ $\vec{v}_g \ne \vec{0}$ ៖

- កម្លាំងកកិត $\vec{R}_t$ ដែលអង្គធាតុ S_2 មានអំពើលើអង្គធាតុ S_1 មានទម្រដូចល្បឿនរអិល៖ $\vec{R}_t \times \vec{v}_g = \vec{0}$
- កម្លាំងកកិត $\vec{R}_t$ ដែលអង្គធាតុ S_2 មានអំពើលើអង្គធាតុ S_1 មានទទម្រដូចល្បឿនរអិល៖ $\vec{R}_t \cdot \vec{v}_g < 0$
- ចំពោះល្បឿនរអិលថេរ តម្លៃនៃកម្លាំងកកិតសមាមាត្រទៅនឹងប្រតិកម្មកែង៖ $R_t = \mu_k R_n$ ដែល μ_k ហៅថាមេគុណកកិតស៊ីនេទិច។ តាមពិសោធន៍បញ្ជាក់ថា $\mu_k \le \mu_s$ ។

ក្រាបបង្ហាញពីកម្លាំងកកិតស្តាទិច និងកកិតស៊ីនេទិច អាស្រ័យនឹងកម្លាំងអនុវត្តន៍។

មេគុណកកិតខ្លះៗ៖

ប៉ះរូបធាតុ	មេគុណកកិត (μ_s)
លោហៈលើទឹកកក	$0.03-0.05$
ឈើលើឈើ	$0.30-0.70$
ស្បែកលើឈើ	$0.20-0.50$
ស្បែកលើលោហៈ	$0.30-0.60$
អាលុយមីញ៉ូមលើអាលុយមីញ៉ូម	$1.10-1.70$



ឧទាហរណ៍៣៥៖ ចូរសិក្សាចលនានៃអង្គធាតុនៅនឹងលើប្លង់ទេរ។

ដំណោះស្រាយ

អង្គធាតុនៅនឹងលើប្លង់ទេរ មានន័យថាផលបូកកម្លាំងទាំងអស់សូន្យ៖ $\vec{R} + m\vec{g} = \vec{0}$, $\vec{a}_G = 0$

ដោយចំណោលសមីការលើអ័ក្ស x និង y យើងបាន៖

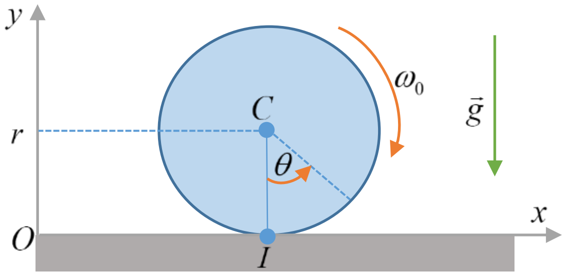
$$R_t + mg\sin\alpha = 0\ , \quad R_n - mg\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_t = -mg\sin\alpha < 0$$

$R_n = mg\cos\alpha > 0$

ដោយសារគ្មានរអិល $|R_t| \le \mu_s |R_n| \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha \le \mu_s$ និង $\alpha \le \phi_s$

ឧទាហរណ៍៣៦៖ ថាសឈើមួយធ្វើចលនាលើអ័ក្សដេក។ ថាសនេះមានម៉ាស m និងកាំ r ហើយដំបូងវាមានល្បឿនមុំដើម $\vec{\omega}_0 = -\omega_0 \vec{k}$, $(\omega_0 > 0)$ និងល្បឿនត្រង់ផ្ចិតរបស់វា $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$ ។ ចូរសិក្សាចលនារបស់ថាស។



ដំណោះស្រាយ

កម្លាំងក្រៅដែលមានអំពើលើថាសមានទម្ងន់និងកម្លាំងប៉ះ។

ទ្រឹស្តីទូទៅត្រូវបានសរសេរ ចំពោះចលនារបស់ថាស៖ $\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}_G$ និង $\dfrac{dL_G}{dt} = \overrightarrow{GI} \times \vec{R}$

នៅក្នុងតម្រុយ ℜ យើងអាចសំដែង៖

$$\begin{pmatrix} R_t \\ R_n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{និង} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_t \\ R_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ rR_t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad R_t = m\ddot{x} \,,\; R_n = mg \quad \text{និង} \quad R_t = \frac{1}{2}mr\ddot{\theta}$$

ពិនិត្យទៅលើល្បឿនរអិល $\vec{v}_g = \vec{v}_{I1} = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \overrightarrow{GI}$

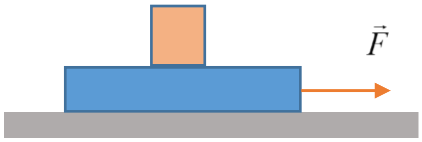
$$\text{ដោយ } \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \overrightarrow{GI} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} + r\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_g = (\dot{x} + r\dot{\theta})\vec{i}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{v}_g}{dt} = (\ddot{x} + r\ddot{\theta})\vec{i} = \frac{3R_t}{m}\vec{i} = \frac{3\vec{R}_t}{m}$$

ដោយគុណអង្គទាំងពីរនឹង $\vec{v}_g$ ៖ $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{v}_g^2\right)=\frac{3\vec{R}_t}{m}\cdot\vec{v}_g<0$

ឧទាហរណ៍៣៧៖ ដុំតូចមានម៉ាស m_1 ត្រូវបានដាក់ទៅលើដុំធំមានម៉ាស m_2 ប្រព័ន្ធនៅនឹងដោយគ្មានកកិតលើប្លង់ដេកដូចរូប។ មេគុណកកិតរវាងដុំតូចនិងដុំធំគឺ μ ។ យើងអនុវត្តកម្លាំងលើដុំធំជាមួយកម្លាំងដេក $\vec{F}$ ដែលតម្លៃរបស់វាកើនឡើងជាមួយពេល៖ $F(t)=\alpha t$,α ជាចំនួនថេរ។



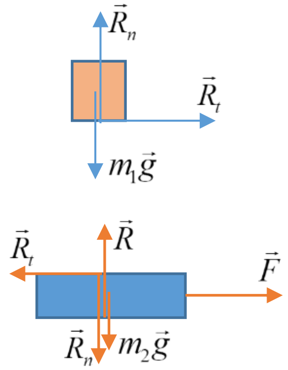
ក. ចូរសិក្សាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃចលនារបស់ដុំតូច និងដុំធំ។

ខ. ចូរកំណត់រយៈពេលដែលដុំធំរអិលក្រោមដុំតូចផុត។

គ. គណនាសំទុះនៃដុំតូច និងដុំធំនៅក្នុងវគ្គគ្មានរអិន និងមានរអិល។

ដំណោះស្រាយ

ក. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃចលនារបស់ដុំតូច និងដុំធំ៖



ដ្យាក្រាមកម្លាំងដែលមានលើដុំនីមួយៗបង្ហាញដូចរូប។

ដោយប្រើគោលការណ៍គ្រឹះឌីណាមិច ចំពោះដុំនីមួយៗ៖

$R_t=m_1a_1$ និង $F(t)-R_t=m_2a_2$ ដែល $|R_t|\le\mu m_1 g$

ខ. កំណត់រយៈពេលដែលដុំធំរអិលក្រោមដុំតូចផុត៖

លីមីតនៃការរអិលនៃដុំធំក្រោមដុំតូច យើងបាន៖ $a_1=a_2$ និង $|R_t|=\mu m_1 g$

$$\Rightarrow\quad a_1=\mu g=a_2=\frac{F(t)-R_t}{m_2}$$

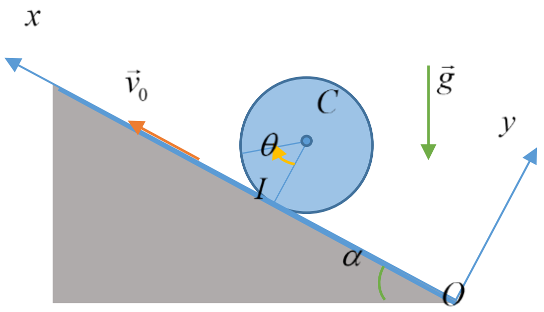
$$\mu g=\frac{\alpha t-\mu m_1 g}{m_2}\quad\Rightarrow\quad t=\frac{\mu(m_1+m_2)g}{\alpha}$$

គ. នៅក្នុងដំណាក់កាលមិនរអិល ប្រព័ន្ធបង្កើតជាអង្គធាតុទោលមានម៉ាស m_1+m_2 ៖

យើងបាន៖ $a_1=a_2=\frac{F}{m_1+m_2}=\frac{\alpha t}{m_1+m_2}$

នៅក្នុងដំណាក់កាលរអិល៖ $a_1=\mu g$ និង $a_2=\frac{\alpha t-\mu m_1 g}{m_2}$

ឧទាហរណ៍៣៨៖ ស៊ីឡាំងមួយមានម៉ាស m កាំ r ត្រូវបានដាក់ដោយគ្មានល្បឿននៅលើកម្រាលរំកិល។ កម្រាលនេះនៅលើប្លង់ទេរមានមុំចំណោត α ផ្លាស់ទីជាមួយល្បឿនថេរ $\vec{v}_0$ តាមអ័ក្ស Ox នៃតម្រុយ $\Re(Oxyz)$ ដូចរូប។ មេគុណកកិត μ ។



ក. ចូរសំដែងល្បឿនរអិល $\vec{v}_g$ ជាអនុគមន៍នៃ v_0 និងប៉ារ៉ាម៉ែតដូចតទៅ៖ x_C (ទីតាំងនៃផ្ចិតម៉ាសលើអ័ក្ស) និង θ (ជាមុំរង្វិលនៃស៊ីឡាំង)។

ខ. ចូរសរសេរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃចលនា។

គ. ចូររកដេរីវេនៃល្បឿនរអិលធៀបនឹងពេលជាអនុគមន៍នៃ g,α,μ ។

ឃ. ចូរសិក្សាដំណាក់កាលផ្សេងៗនៃចលនា។

ដំណោះស្រាយ

ក. ល្បឿនរអិល៖

ល្បឿនរអិលនៃស៊ីឡាំង1 លើកម្រាលរំកិល2 គឺ $\vec{v}_g = \vec{v}_{1/2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\overrightarrow{CI} - \vec{v}_0$

$$\vec{v}_g = \begin{pmatrix} \dot{x}_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_g = \left(\dot{x}_C + r\dot{\theta} - v_0\right)\vec{i}$$

ខ. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃចលនា៖

អនុវត្តទ្រឹស្តីទូទៅ៖ $\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}_C$ (1) និង $\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \overrightarrow{CI}\times\vec{R}$ (2)

ចំណោលសមីការ(1)លើអ័ក្ស Ox:

$$R_t - mg\sin\alpha = m\ddot{x}_C \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_C = \frac{R_t}{m} - g\sin\alpha \qquad (3)$$

ចំណោលសមីការ(1)អ័ក្ស Oy: $R_n - mg\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad R_n = mg\cos\alpha$

សមីការ(2)៖

$$I\ddot{\theta} = rR_t \text{ ដោយ } I = \frac{1}{2}mr^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} = rR_t \qquad (4)$$

សមីការ(3)និងសមីការ(4) យើងបាន៖ $\ddot{x}_C - \frac{1}{2} r\ddot{\theta} = -g\sin\alpha$

គ. ដេរីវេល្បឿនរអិលធៀបពេល៖

$$\frac{d\vec{v}_g}{dt} = \left(\ddot{x}_C + r\ddot{\theta}\right)\vec{i} \quad \text{ឬ} \quad \dot{v}_g = \ddot{x}_C + r\ddot{\theta} = -g\sin\alpha + \frac{3R_t}{m}$$

ដោយសារ $|R_t| = \mu R_n = \mu mg\cos\alpha$ នៅក្នុងដំណាក់កាលដើមនៃការរអិល$\left(v_g < 0, R_t > 0\right)$:

$$\dot{v}_g = 3g\cos\alpha\left(\mu - \frac{\tan\alpha}{3}\right)$$

ឃ. សិក្សាដំណាក់កាលផ្សេងៗនៃចលនា៖

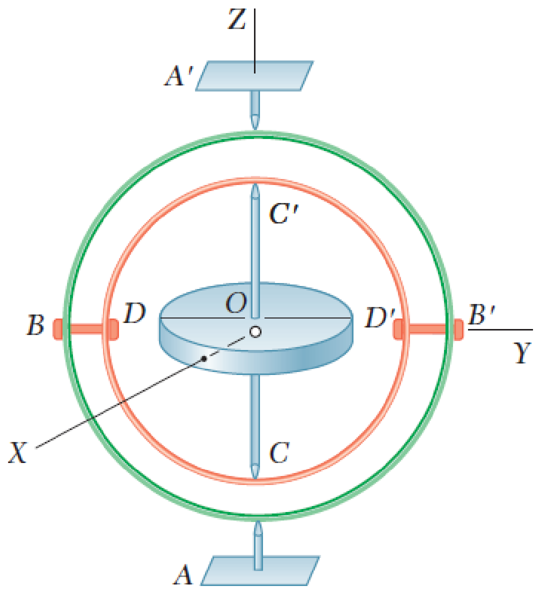
បើ $\mu > \frac{\tan\alpha}{2}$, v_g កើនចេញពី $-v_0$ មានរអិលដំបូងបន្ទាប់មិនរអិល។

បើ $\mu < \frac{\tan\alpha}{2}$, v_g ថយចុះពី $-v_0$ មានតែរអិល។

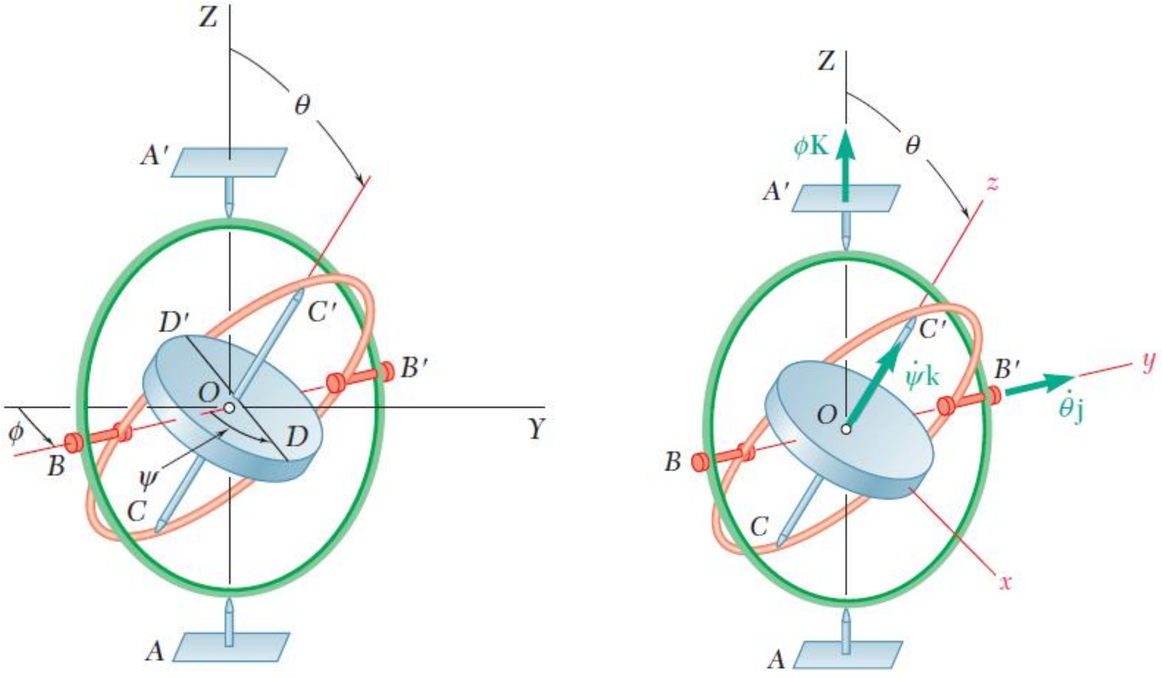
7. ចលនានៃ GYROSCOPE

Gyroscope មានរ៉ូទ័រ(រង្វិល)យ៉ាងសំខាន់ដែលអាចវិលជុំវិញខ្លួនឯង(ស្ពីន)ដោយសេរី ជុំវិញអ័ក្សធរណីមាត្ររបស់វា។ នៅពេល ដាក់ជាប់នៅក្នុងការព្យួរ Cardan ដូចរូប Gyroscope អាចសន្មតទិសដៅច្រើន ប៉ុន្តែ ផ្ចិតម៉ាសរបស់វាត្រូវតែនៅនឹងនៅក្នុងលំហ។ ដើម្បីឱ្យនិយមន័យទីតាំងនៃ gyroscope នៅខណៈដែលឱ្យ យើងជ្រើសរើសតម្រុយនឹងនៃតម្រុយយើង OXYZ ជាមួយគល់ O ស្ថិតនៅផ្ចិតម៉ាសនៃ gyroscope និងអ័ក្ស Z ចង្អុលទិសតាមបន្ទាត់កំណត់ដោយបន្ទះ A និង A' នៅខាងក្រៅកង។ យើងនឹងពិនិត្យទីតាំងយោងនៃ gyroscope ដែលមានកងពីរ និងឱ្យអង្កត់ផ្ចិត DD' នៃរ៉ូទ័រ ត្រូវបានដាក់ទីតាំងនៅក្នុងប្លង់នឹង YZ ដូចរូប។ Gyroscope អាចត្រូវបានយកពីទីតាំងយោងនេះទៅជាទីតាំងណាមួយមួយទៀត ដូចរូប តាមមធ្យោបាយដូចតទៅ៖ (១)ការរង្វិលនៃកងខាងក្រៅតាមមុំ ϕ ជុំវិញអ័ក្ស AA' (២)ការរង្វិលកងខាងក្នុងតាមមុំ θ ជុំវិញ BB' និង(៣)ការរង្វិលនៃរ៉ូទ័រតាមមុំ ψ ជុំវិញ CC'។ មុំ ϕ,θ និង ψ ត្រូវបានហៅថា មុំ Euler ពួកវាកំណត់ចរិកលក្ខណៈទាំងស្រុងនូវទីតាំងនៃ gyroscope នៅខណៈណាមួយដែលឱ្យ។ ដេរីវេរបស់ពួកវា $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ និង $\dot{\psi}$ បានឱ្យនិយមន័យរៀងនូវអត្រានៃ precession អត្រានៃ nutation និងអត្រានៃ spin របស់ gyroscope នៅខណៈពិនិត្យ។

ដើម្បីគណនាកុំប៉ូសង់នៃល្បឿនមុំ និងម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៃ gyroscope យើងនឹងប្រើប្រព័ន្ធរង្វិលនៃអ័ក្ស $Oxyz$ ភ្ជាប់ទៅនឹងកងខាងក្នុងជាមួយអ័ក្ស y តាម BB' និងអ័ក្ស z តាម CC' ដូចរូប។ អ័ក្សទាំងនេះជា អ័ក្សមេនៃម៉ូម៉ង់និចលភាពសម្រាប់ gyroscope ។ នៅពេលពួកវាដើរតាម វានៅក្នុង precession និង nutation របស់វា ប៉ុន្តែពួកវា មិនធ្វើស្ពីនសម្រាប់ហេតុផលទាំហនោះ ពួកវាកាន់តែងាយស្រួលប្រើជាងអ័ក្សពិតប្រាកដភ្ជាប់ទៅ gyroscope ។ ល្បឿនមុំ $\vec{\omega}$ នៃ gyroscope ធៀបទៅនឹងតម្រុយនឹងនៃតម្រុយយោង OXYZ នឹងត្រូវបានសំដែងជាផលបូកនៃល្បឿនមុំទាំងបីដែលទាក់ទងទៅនឹង precession, nutation និង spin នៃ gyroscope ។ កំណត់ $\vec{i},\vec{j}$ និង $\vec{k}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតាតាមអ័ក្សរង្វិល និង $\vec{K}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតាតាមអ័ក្សនឹង Z យើងបាន៖



$$\vec{\omega}=\dot{\phi}\vec{K}+\dot{\theta}\vec{j}+\dot{\psi}\vec{k}$$



ដោយសារ កុំប៉ូសង់វ៉ិចទ័រទទួលបានចំពោះ $\vec{\omega}$ មិនអរតូកូណាល់ទៅរូប វ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{K}$ ត្រូវបានបំបែកជាកុំប៉ូសង់តាមអ័ក្ស x និង z យើងសរសេរ៖

$$\vec{K}=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{k}$$

ដោយជំនួស យើងបាន៖ $\vec{\omega} = -\dot{\phi}\sin\theta\vec{i} + \dot{\theta}\vec{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\vec{k}$

ដោយអ័ក្សកូអរដោនេជាអ័ក្សមេនៃម៉ូម៉ង់និចលភាព កុំប៉ូសង់នៃម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច $\vec{L}_O$ អាចទទួលបានដោយគុណកុំប៉ូសង់នៃ $\vec{\omega}$ ជាមួយម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃរ៉ូទ័រជុំវិញអ័ក្ស x, y និង z។ កំណត់យក I ជាម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃរ៉ូទ័រជុំវិញអ័ក្សស្ពីន និង I' ម៉ូម៉ង់និចលភាពរបស់វាជុំវិញអ័ក្សទទឹងកាត់តាម O និងមិនគិតម៉ាសនៃកង យើងសរសេរ៖

$$\vec{L}_O = -I'\dot{\phi}\sin\theta\vec{i} + I'\dot{\theta}\vec{j} + I(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\vec{k}$$

ដោយហៅឡើងវិញថា អ័ក្សរង្វិលត្រូវបានភ្ជាប់ទៅកងខាងក្នុង និងមិនធ្វើស្ពីន យើងសំដែងល្បឿនមុំរបស់ពួកវាជាផលបូក៖ $\vec{\Omega} = \dot{\phi}\vec{K} + \dot{\theta}\vec{j}$

ដោយជំនួស យើងបាន៖ $\vec{\Omega} = -\dot{\phi}\sin\theta\vec{i} + \dot{\theta}\vec{j} + \dot{\phi}\cos\theta\vec{k}$

តាមទ្រឹស្តីម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច៖ $\sum\vec{M}_O = \left(\dot{\vec{L}}_O\right)_{Oxyz} + \vec{\Omega}\times\vec{L}_O$

យើងទទួលបាន សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលបី៖

$$\sum M_x = I'\left(\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\right) + I\dot{\theta}\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)$$

$$\sum M_y = I'\left(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right) + I\dot{\phi}\sin\theta\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)$$

$$\sum M_z = I\frac{d}{dt}\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)$$

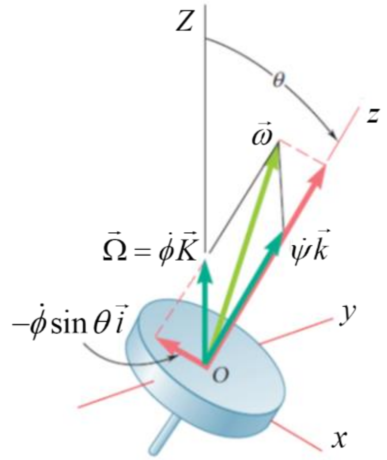
សមីការទាំងនេះកំណត់ចលនា gyroscope ទទួលរងប្រព័ន្ធកម្លាំងដែលឱ្យ នៅពេលម៉ាសនៃកងមិនគិត។ ពួកវាត្រូវបានប្រើដើម្បីកំណត់ចលនានៃអ័ក្សស៊ីមេទ្រីអង្គធាតុ (ឬអង្គធាតុបរិវត្ត)បានភ្ជាប់ទៅចំណុចលើអ័ក្សស៊ីមេទ្រីតរបស់វា និងកំណត់ចលនានៃអ័ក្សស៊ីមេទ្រីអង្គធាតុវិលជុំវិញផ្ចិតម៉ាសរបស់វា។ នៅពេលកងនៃ gyroscope ជួយយើងមើលមុំ Euler វាច្បាស់ថា មុំទាំងនេះអាចត្រូវបានប្រើ ដើម្បីកំណត់ទីតាំងនៃអង្គធាតុរឹងធៀបទៅនឹងអ័ក្សផ្ចិត នៅចំណុចនៃអង្គធាតុ ដោយមិនគិតវិធីនេះដែលអង្គធាតុត្រូវបានទ្រយ៉ាងពិតប្រាកដ។

ដោយសារសមីការទាំងនេះមិនលីនេអ៊ែ ជាទូទៅវាមិនអាចសំដែងមុំ Euler ϕ, θ និង ψ នៅពេលវិភាគអនុគមន៍នៃពេល t និងវិធីសាស្ត្រលេខនៃចម្លើយត្រូវតែប្រើ។ ប៉ុន្តែ នៅពេល អ្នកឃើញក្នុងមេរៀនបន្តបន្ទាប់ មានករណីពិសេសច្រើននៃចំណាំអារម្មណ៍ដែលអាចវិភាគយ៉ាងងាយស្រួល។

7.1. ស្ទេរនាព PRECESSION នៃ GYROSCOPE

ឥឡូវយើងចាប់អារម្មណ៍ ករណីពិសេសនៃចលនា gyroscope ដែលមុំ θ អត្រា precession $\dot{\phi}$ និងអត្រាស្ពីន $\dot{\psi}$ នៅតែថេរ។ យើងសំណើ ដើម្បីកំណត់កម្លាំងដែលត្រូវតែអនុវត្តទៅ gyroscope ដើម្បីរក្សាចលនានេះ ត្រូវបានស្គាល់ជា ស្ថេរភាព precession នៃ gyroscope ។

ជំនួសឱ្យការអនុវត្តសមីការទូទៅ យើងនឹងកំណត់ផលបូកម៉ូម៉ង់នៃតម្រូវការកម្លាំងទាំងឡាយ ដោយគណនា អត្រានៃការផ្លាស់ប្តូររបស់ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៃ gyroscope នៅក្នុងករណីពិសេសដែលបានពិចារណា។ ដំបូង យើងចំណាំថា ល្បឿនមុំ $\vec{\omega}$ នៃ gyroscope ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចរបស់វា $\vec{L}_O$ និងល្បឿនមុំ $\vec{\Omega}$ នៃការវង្វិលតម្រុងយោងដូចបង្ហាញលើរូប បន្ថយទៅ៖



$$\vec{\omega} = -\dot{\phi}\sin\theta\vec{i} + \omega_z\vec{k}$$

$$\vec{L}_O = -I'\dot{\phi}\sin\theta\vec{i} + I\omega_z\vec{k}$$

$$\vec{\Omega} = -\dot{\phi}\sin\theta\vec{i} + \dot{\phi}\cos\theta\vec{k}$$

ដែល $\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta =$ កុំប៉ូសង់កែងតាមអ័ក្សស្ពីននៃល្បឿនមុំសរុបនៃ gyroscope ។

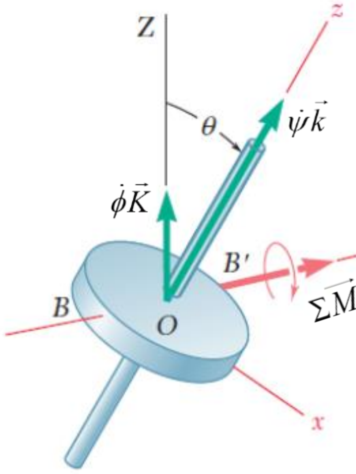
ដោយសារ $\theta, \dot{\phi}$ និង $\dot{\psi}$ ថេរ វ៉ិចទ័រ $\vec{L}_O$ គឺថេរ តម្លៃនិងទិសធៀបទៅនឹងតម្រុយយោងវិល និងអត្រានៃការផ្លាស់ប្តូររបស់វា $\left(\dot{\vec{L}}_O\right)_{Oxyz}$ ធៀបទៅនឹងតម្រុយនោះគឺសូន្យ។ សមីការម៉ូម៉ង់នៃកម្លាំងបង្រួមត្រឹម៖

$$\sum \overrightarrow{M}_O = \vec{\Omega} \times \vec{L}_O$$

យើងបាន៖ $\sum \overrightarrow{M}_O = \left(I\omega_z - I'\dot{\phi}\cos\theta\right)\dot{\phi}\sin\theta\,\vec{j}$

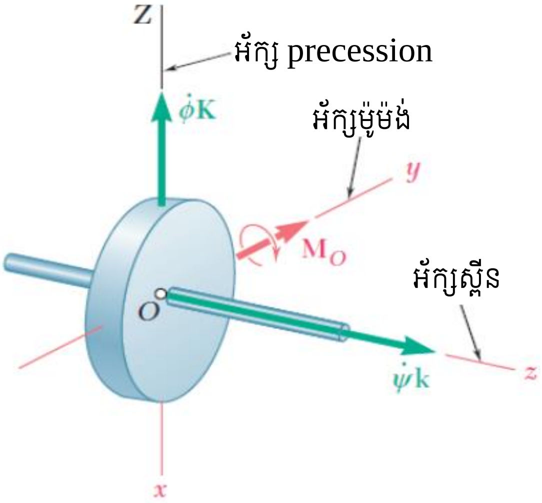
ដោយសារ ផ្ចិតម៉ាសនៃ gyroscope នៅនឹងក្នុងលំហ យើងបាន៖

$\sum \vec{F} = \vec{0}$ កម្លាំងដែលត្រូវអនុវត្តលើ gyroscope ដើម្បីរក្សាស្ថេរភាព precession របស់វា បន្ថយទៅម៉ូម៉ង់គូ ស្មើទៅនឹងអង្គខាងស្តាំនៃសមីការ។ យើងចំណាំថា ម៉ូម៉ង់គូនេះ ត្រូវបានអនុវត្តជុំវិញអ័ក្សកែងទៅនឹងអ័ក្ស precession និងកែងទៅនឹងអ័ក្សស្ពីនរបស់ gyroscope ដូចបង្ហាញលើរូប។



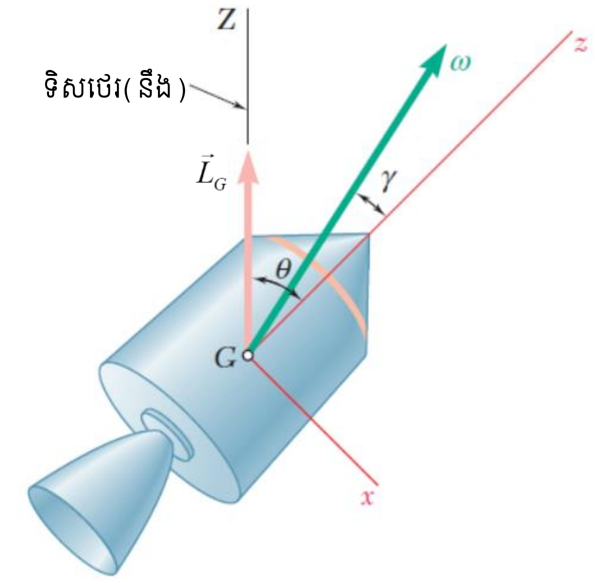
នៅក្នុងករណីពិសេស នៅពេលអ័ក្ស precession និងអ័ក្សស្ពីន កែងគ្នាទៅវិញទៅមក យើងបាន $\theta = 90^0$ នោះ $\sum \overrightarrow{M}_O = I\dot{\psi}\dot{\phi}\,\vec{j}$

បើយើងអនុវត្តទៅលើ gyroscope នូវម៉ូម៉ង់គូ $\vec{M}_O$ វិលជុំវិញអ័ក្សកែងទៅនឹងអ័ក្សស្ពីនរបស់វា gyroscope នឹងវិលបានមុំ precession ជុំវិញអ័ក្សកែងទៅនឹង ទាំងអ័ក្សស្ពីន និងអ័ក្សម៉ូម៉ង់គូ នៅក្នុងន័យថា វ៉ិចទ័តាងឱ្យស្ពីន ម៉ូម៉ង់ និង precession បង្កើតម្រាមដៃស្តាំបី ដូចបង្ហាញលើរូប។ ដោយសារ ម៉ូម៉ង់ធំតម្រូវការ ដើម្បីផ្លាស់ប្តូរទិសដៅនៃអ័ក្សរបស់ពួកវា gyroscope ត្រូវបានប្រើជា ឧបករណ៍លំនឹងស៊ប់ នៅក្នុងកប៉ាល់ផ្ទុកទំនិញ និងនាវា។ ការវិលជុំវិញខ្លួនឯង គ្រាប់កាំភ្លើង និងសំបក នៅតែរក្សាកែងទៅនឹងគន្លងរបស់វា ដោយសារអំពើ gyroscope ។ កង់ជិះគឺស្រួលជាងគេ ដើម្បីរក្សាលំនឹងនៅល្បឿនលឿន ដោយសារផលលំនឹងស៊ប់នៃការវិលជុំវិញខ្លួនឯង កង់របស់វា។ ប៉ុន្តែ អំពើ gyroscope ជានិច្ចកាលមិនស្វាគមន៍ និងត្រូវបានរាប់បញ្ចូលទៅក្នុងការរចនានៃទម្រធ្នឹមវិល វងកម្លាំង precession ។ ប្រតិកម្មអនុវត្តដោយកង្ហាររបស់វាលើយន្តហោះ ដែលប្តូរ ទិសរបស់វានៃការហោះហើរ ត្រូវតែយកទៅពិចារណា និងផ្តល់សំណងពេលណាដែលធ្វើទៅបាន។



7.2. ចលនានៃអ័ក្សស៊ីមេទ្រីអង្គធាតុ ក្រោមអំពើគ្មានកម្លាំង

នៅក្នុងផ្នែកនេះ យើងនឹងវិភាគចលនាជុំវិញផ្ចិតម៉ាសរបស់វានៃអ័ក្សស៊ីមេទ្រីអង្គធាតុ ក្រោមអំពើគ្មានកម្លាំង លើកលែង ទម្ងន់ផ្ទាល់របស់វា។ ឧទាហរណ៍នៃចលនាគ្រាប់បាញ់ បើកម្លាំងទប់នៃខ្យល់មិនគិត និងរណបនិមិត និងយានអវកាសបន្ទាប់ពីបាញ់ចេញពីកាំជ្រួច។



ដោយសារ ផលបូកម៉ូម៉ង់នៃកម្លាំងក្រៅ វិលជុំវិញផ្ចិតម៉ាស G នៃអង្គធាតុគឺសូន្យ នាំឱ្យ $\dot{\vec{L}}_G = \vec{0}$ ។ វាដើរតាមថា ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច $\vec{L}_G$ នៃអង្គធាតុវិលជុំវិញ G គឺថេរ។ ដូចនេះទិសនៃ $\vec{L}_G$ ថេរ នៅក្នុងលំហ និងអាចត្រូវបានប្រើដើម្បីកំណត់

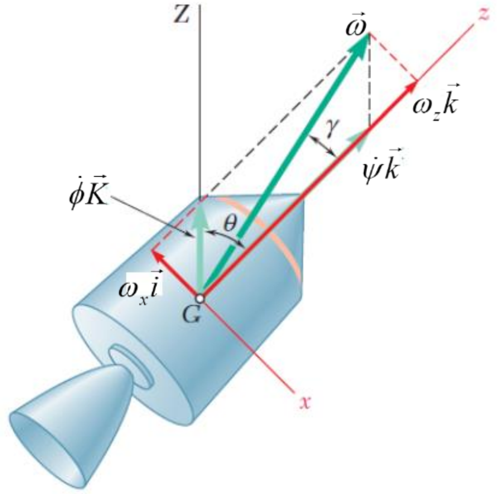
អ័ក្ស Z ឬ អ័ក្សនៃ prcession ។ ដោយជ្រើសរើសប្រព័ន្ធផ្ចិតនៃអ័ក្ស $Gxyz$ ជាមួយអ័ក្ស z តាមអ័ក្សស៊ីមេទ្រីនៃអង្គធាតុ អ័ក្ស x នៅក្នុងប្លង់កំណត់ដោយអ័ក្ស Z និងអ័ក្ស z ហើយអ័ក្ស y ចង្អុលចេញឆ្ងាយពីអ្នក យើងបាន៖

$$L_x = L_G \sin\theta \ , \ L_y = 0 \ , \ L_z = L_G \cos\theta$$

ដែល θ តាងឱ្យមុំផ្តុំឡើងដោយអ័ក្ស Z និងអ័ក្ស z និង H_G កំណត់ទំហំថេរនៃម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចរបស់អង្គធាតុវិលជុំវិញ G ។ ដោយសារអ័ក្ស x, y និង z ជាអ័ក្សមេនៃម៉ូម៉ង់និចលភាព សម្រាប់អង្គធាតុដែលពិចារណា យើងអាចសរសេរ៖

$$L_x = I'\omega_x \ , \ L_y = I'\omega_y \ , \ L_z = I\omega_z$$

ដែល I ជាម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃអង្គធាតុវិលជុំវិញអ័ក្សស៊ីមេទ្រីរបស់វា និង I' ជាម៉ូម៉ង់និចលភាពរបស់វាវិលជុំវិញអ័ក្សទទឹងកាត់តាម G ។ តាមសមីការ យើងបាន៖

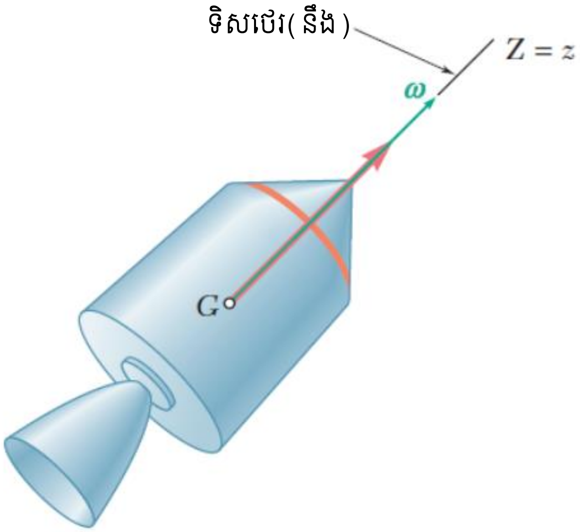


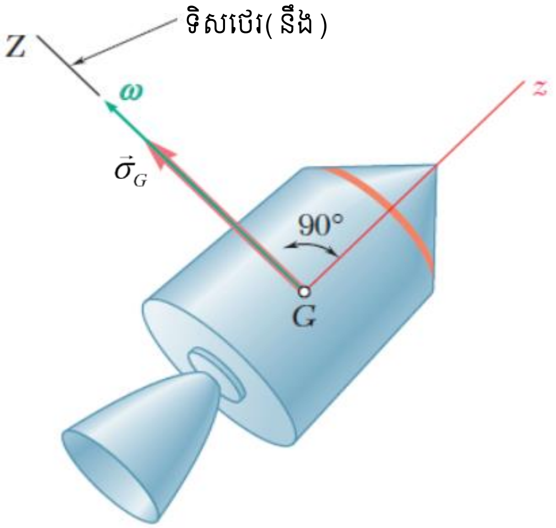
$$\omega_x = -\frac{L_G \sin\theta}{I'} \ , \ \omega_y = 0 \ , \ \omega_z = \frac{L_G \cos\theta}{I}$$

ទី២នៃទំនាក់ទំនងដែលទទួលបានបង្ហាញថា ល្បឿនមុំ $\vec{\omega}$ គ្មានកុំប៉ូសង់តាមអ័ក្ស y មានន័យថា តាមអ័ក្សកែងទៅនឹងប្លង់ Zz ។ ដូចនេះមុំ θ ផ្តុំដោយអ័ក្ស Z និង z នៅតែថេរ និងអង្គធាតុនៅក្នុងស្ថេរភាព precession ជុំវិញអ័ក្ស Z ។

ដោយធ្វើផលចែក យើងបាន៖

$-\frac{\omega_x}{\omega_z} = \tan\gamma$ យើងទទួលបានទំនាក់ទំនងរវាងមុំ γ និង θ ដែលវ៉ិចទ័រ $\vec{\omega}$ និង $\vec{L}_G$ ផ្តុំជាមួយអ័ក្សស៊ីមេទ្រីនៃអង្គធាតុ៖ $\tan\gamma = \frac{I}{I'}\tan\theta$

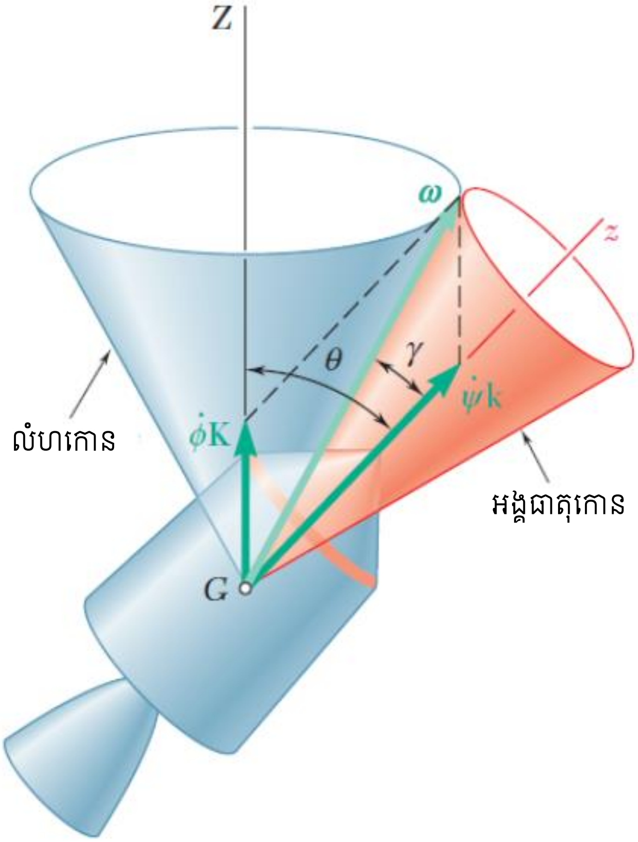




មានករណីពិសេសពីរនៃចលនារបស់អ័ក្សស៊ីមេទ្រីអង្គធាតុក្រោមអំពើគ្មានកម្លាំងដែលពាក់ព័ន្ធគ្មានprecession៖

(១)បើអង្គធាតុជាសំណុំស្ពីនវិលជុំវិញអ័ក្សស៊ីមេទ្រីរបស់វា យើងបាន ω_x និង $L_x = 0$ វ៉ិចទ័រ $\vec{\omega}$ និង $\vec{L}_G$ មានទិសដៅដូចគ្នា ហើយអង្គធាតុរក្សាវិលជុំវិញខ្លួនឯងជុំវិញអ័ក្សស៊ីមេទ្រីរបស់វា។

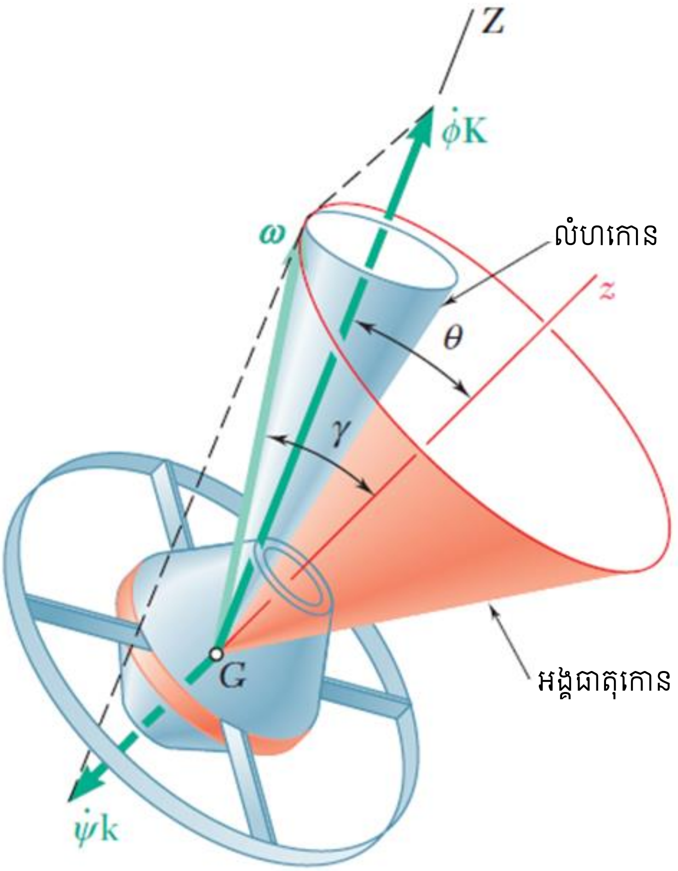
(២)បើអង្គធាតុជាសំណុំដើម្បីវិលជុំវិញខ្លួនឯងជុំវិញអ័ក្សទទឹង យើងបាន $\omega_z = 0$ នោះ $L_z = 0$ ម្តងនេះ $\vec{\omega}$ និង $\vec{L}_G$ មានទិសដៅដូចគ្នា ហើយអង្គធាតុរក្សាវិលជុំវិញខ្លួនឯងជុំវិញអ័ក្សទទឹងដែលឱ្យ។



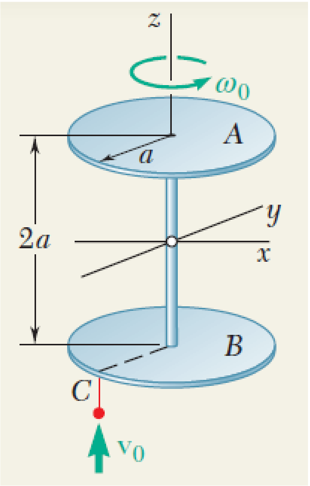
នៅក្នុងករណីស្ថេរភាព precession កោនពីរជាវង្វង់ដោយសារមុំ γ និង $\theta - \gamma$ ដែលវ៉ិចទ័រល្បឿនមុំ $\vec{\omega}$ បង្កើតជាមួយអ័ក្សស៊ីមេទ្រីនៃអង្គធាតុ និងជាមួយអ័ក្ស precession គឺថេរ។ ករណីទាំងពីរត្រូវបានវែកញែក៖

១. $I < I'$ នេះជាករណីនៃពន្លូតអង្គធាតុ ដូចជាយានអវកាស យើងបាន $\gamma < \theta$ ដែលវ៉ិចទ័រ $\vec{\omega}$ ដេកនៅខាងក្នុងមុំ ZGz លំហកោន និងអង្គធាតុកោនប៉ះខាងក្រៅ ស្ពីន និងprecession ទាំងពីរត្រូវបានមើលក្នុងទិសដៅទ្រនិចនាឡិកាពីអ័ក្សវិជ្ជមាន z ។ Precession ត្រូវបាននិយាយថា ទិស។

២. $I > I'$ នេះជាករណីនៃរុញភ្ជាប់អង្គធាតុ ដូចជារណប។ យើងបាន $\gamma > \theta$ ដោយសារវ៉ិចទ័រ $\vec{\omega}$ ត្រូវតែដេកនៅខាងក្រៅមុំ ZGz វ៉ិចទ័រ $\dot{\psi}\vec{k}$ មានទិសដៅផ្ទុយទៅទិសដៅនៃអ័ក្ស z លំហកោននៅខាងក្នុងអង្គធាតុកោន precession និង spin មានទិសដៅផ្ទុយ។ Precession ត្រូវបានហៅថា retrograde ។



ឧទាហរណ៍៣៩ រណបអវកាសមានម៉ាស m ត្រូវបានស្គាល់ជាឌីណាមិចសមមូលទៅថាសស្តើងពីរមានម៉ាសស្មើគ្នា។ ថាសមានកាំ a = 800 mm ហើយត្រូវបានភ្ជាប់គ្នាដោយដងរឹងមិនគិតម៉ាស មានប្រវែង 2a ។ ដាដំបូង រណបកំពុងវិលជុំវិញខ្លួនឯងដោយសេរី ជុំវិញអ័ក្សស៊ីមេទ្រីរបស់វា នៅអត្រា $\omega_0 = 60\,\text{rad/s}$ ។ អាចម៍ផ្កាយមានម៉ាស $m_0 = \dfrac{m}{1000}$ និងចលនាជាមួយល្បឿន $v_0 = 2000\text{m/s}$ ធៀបទៅនឹងរណប។ វាបានទៅបុករណប ហើយបានចូលជាប់ត្រង់ C ។ ចូរកំណត់៖



ក. ល្បឿនមុំរណប បន្ទាប់ពីទង្គិចភ្លាមៗ។

ខ. អ័ក្ស precession នៃលទ្ធផលចលនា ។

គ. អត្រា precession និង spin នៃលទ្ធផលចលនា។

ដំណោះស្រាយ

ម៉ូម៉ង់និចលភាព៖

យើងកំណត់ចំណាំថា អ័ក្សដែលបង្ហាញជាអ័ក្សមេនៃម៉ូម៉ង់និចលភាពសម្រាប់រណប ហើយសរសេរ៖

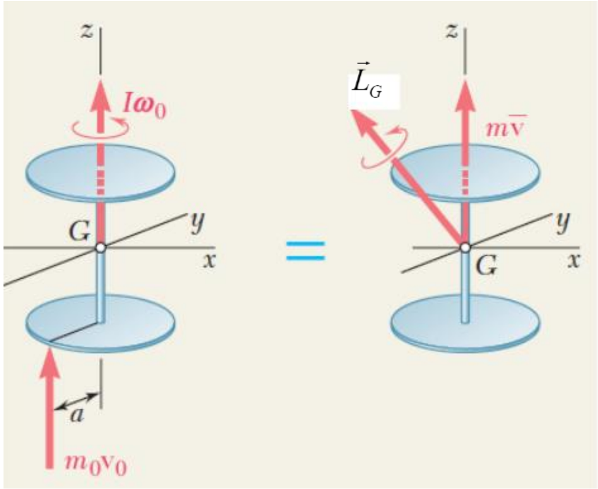
$$I = I_z = \frac{1}{2}ma^2 \quad , \quad I' = I_x = I_y = 2\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}m\right)a^2 + \left(\frac{1}{2}m\right)a^2\right] = \frac{5}{4}ma^2$$

គោលការណ៍អាំពុលស្យុង និងម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច៖

យើងពិនិត្យរណប និងអាចម៍ផ្កាយជាប្រព័ន្ធទោល។ ដោយសារគ្មានកម្លាំងក្រៅមានអំពើលើប្រព័ន្ធនេះនៅមុន និងក្រោយប៉ះគឺសមមូលគ្នា។ យកម៉ូម៉ង់វិលជុំវិញ G យើងសរសេរ៖

$$\vec{L}_G = -a\,\vec{j} \times m_0 v_0 \vec{k} + I\omega_O \vec{k}$$

$$\vec{L}_G = -m_0 v_0 a\,\vec{i} + I\omega_0 \vec{k}$$



ល្បឿនមុំក្រោយទង្គិច៖

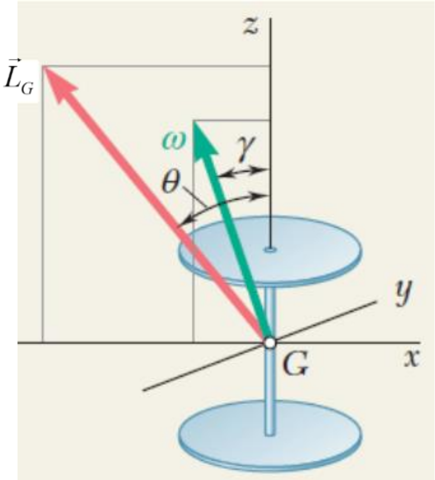
ដោយជំនួស តម្លៃទទួលបាន សម្រាប់កុំប៉ូសង់នៃ $\vec{L}_G$ និងសម្រាប់ម៉ូម៉ង់នៃម៉ូម៉ង់និចលភាពទៅជា៖

$$L_x = I_x\omega_x \quad , \quad L_y = I_y\omega_y \quad , \quad L_z = I_z\omega_z$$

យើងសរសេរ៖

$$-m_0 v_0 a = I'\omega_x = \frac{5}{4}ma^2\omega_x \quad , \quad 0 = I'\omega_y \quad , \quad I\omega_0 = I\omega_z$$

$$\omega_x = -\frac{4m_0 v_0}{5ma} \quad , \quad \omega_y = 0 \quad , \quad \omega_z = \omega_0$$



ចំពោះរណបត្រូវបានពិនិត្យ យើងបាន៖

$$\omega_0 = 6.283\text{rad/s} \ , \ \frac{m_0}{m} = \frac{1}{1000} \ , \ a = 0.80\text{m}$$

និង $v_0 = 200\text{m/s}$

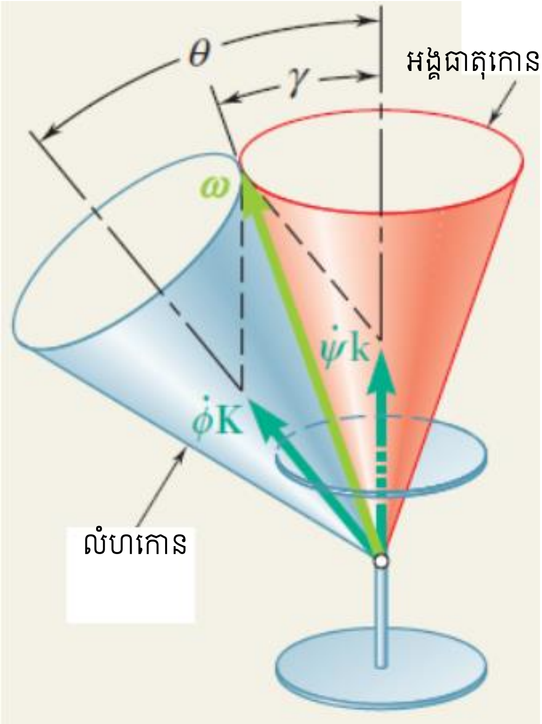
យើងបាន៖

$$\omega_x = -2\text{rad/s} \quad , \quad \omega_y = 0 \quad , \quad \omega_z = 6.283\text{rad/s}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_z^2} = 6.594\,\text{rad/s} \quad , \quad \tan\gamma = \frac{-\omega_x}{\omega_z} = +0.3183 \quad \text{ឬ} \quad \gamma = 17.7^0$$

អ័ក្ស precession ៖

ដោយសារនៅក្នុងចលនាសេរី ទិសនៃម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច $\vec{L}_G$ នៅនឹងក្នុងលំហ រណបនឹងកៀសមុំ precession វិលជុំវិញទិសនេះ។ មុំ θ បង្កើតដោយអ័ក្ស precession និងអ័ក្ស z គឺ



$$\tan\theta = \frac{-L_x}{L_z} = \frac{m_0 v_0 a}{I\omega_0} = \frac{2m_0 v_0}{ma\omega_0} = 0.796$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 38.5^0$$

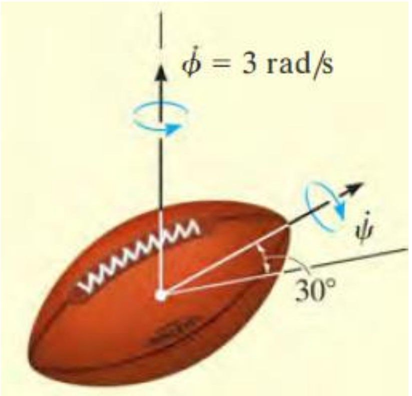
អត្រា precession និង spin ៖

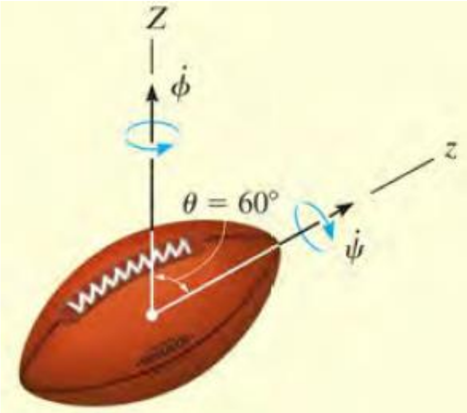
យើងគូសលំហ និងអង្គធាតុកោនសម្រាប់ចលនាសេរីនៃរណប។ ដោយប្រើទ្រឹស្តីស៊ីនុស យើងគណនាអត្រានៃ precession និង spin ៖

$$\frac{\omega}{\sin\theta} = \frac{\dot{\phi}}{\sin\gamma} = \frac{\dot{\psi}}{\sin(\theta-\gamma)}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\phi} = 3.23\text{rad/s} \ , \quad \dot{\psi} = 3.76\,\text{rad/ s}$$

ឧទាហរណ៍៤០៖ ចលនាបាល់ទាត់ត្រូវបានសង្កេតដោយប្រើចលនាបញ្ចាំងកុនយឺតៗ។ ពីកីឡ ស្លីននៃបាល់ទាត់ត្រូវបានមើលឃើញទិស 30^0 ពីទិសដេក ដូចរូប។ បាល់ទាត់វិលមុំ precession ជុំវិញអ័ក្សឈរនៅអត្រា $\dot{\phi} = 3\text{rad/s}$ ។ បើផលចែកនៃអ័ក្សម៉ូម៉ង់ទទឹងនៃម៉ូម៉ង់និចលភាពបាល់ទាត់គឺ 1/3 ត្រូវបានវាស់ធៀបទៅនឹងផ្ចិតម៉ាស ចូរកំណត់ទំហំនៃស្លីនបាល់ និងល្បឿនមុំរបស់វា។ មិនគិតផលនៃកម្លាំងទប់របស់ខ្យល់។





ដំណោះស្រាយ

ដោយសារ ទម្ងន់នៃបាល់ទាត់មួយគាត់ដែលមានអំពើលើបាល់ ចលនាគឺវិលសេរី។ នៅក្នុងទិសដៅសន្មត បើអ័ក្ស z ត្រូវបានបង្កើតឡើងតាមអ័ក្សស្លីន និងអ័ក្ស Z តាមអ័ក្ស precession នោះមុំ $\theta = 60^0$ ។

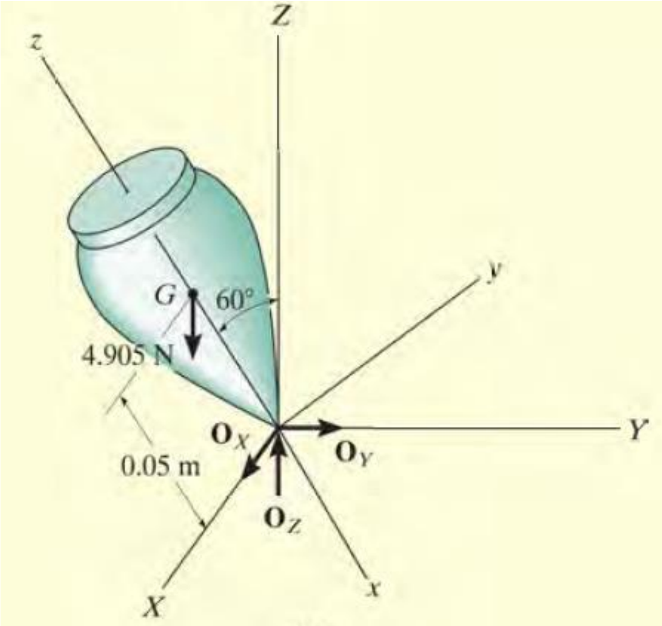
ស្ពីនគឺ $\dot{\psi}=\dfrac{I-I_z}{I_z}\dot{\phi}\cos\theta=\dfrac{I-\frac{1}{3}I}{\frac{1}{3}I}\times 3\cos 60^0=3\,\text{rad/s}$

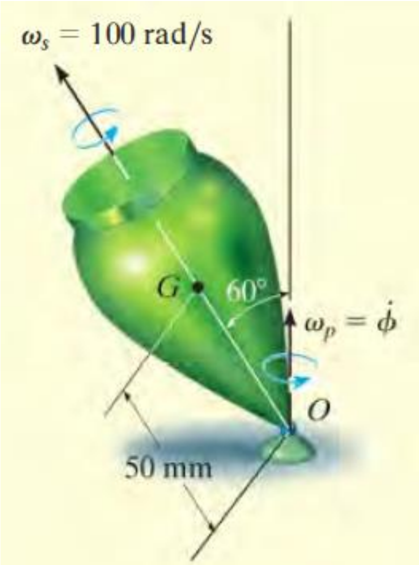
ដោយ $L_G=\dot{\phi}I$ យើងបាន៖ $\omega_x=0$, $\omega_y=\dfrac{L_G\sin\theta}{I}=\dfrac{3I\sin 60^0}{I}=2.60\,\text{rad/s}$

និង $\omega_z=\dfrac{L_G\cos\theta}{I_z}=\dfrac{3I\cos 60^0}{\frac{1}{3}I}=4.50\,\text{rad/s}$

ដូចនេះ $\omega=\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}=\sqrt{0^2+(2.60)^2+(4.50)^2}=5.20\,\text{rad/s}$

ឧទាហរណ៍៤១៖ រូបដូចបង្ហាញមានម៉ាស 0.5 kg និងកៀសមុំ precession ជុំវិញអ័ក្សឈរនៅមុំថេរ $\theta=60^0$ ។ បើវាវិលជុំវិញខ្លួនឯងជាមួយល្បឿនមុំ $\omega_s=100\,\text{rad/s}$ ចូរកំណត់ precession $\vec{\omega}_p$ ។ សន្មតថា ម៉ូម៉ង់និចលភាពភ្លៅ និងម៉ូម៉ង់និចលភាពទទឹង គឺ $0.45\times10^{-3}\,\text{kg}\,\text{m}^2$ និង $1.20\times10^{-3}\,\text{kg}\,\text{m}^2$ ត្រូវបានវាស់ធៀបចំណុចនឹង O។





ដំណោះស្រាយ

ចលនាគឺ ស្ថេរភាព precession ។

ដ្យាក្រាមដូចបង្ហាញលើរូប អ័ក្សកូអរដោនេត្រូវបានបង្កើតតាមបែបផែន អ័ក្ស z រំដួមានក្នុងទិសដៅស្ពីន អ័ក្ស Z រំដួមានក្នុងទិសដៅ precession និងអ័ក្ស x រំដួមានក្នុងទិសដៅម៉ូម៉ង់ $\sum M_x$ នោះ

$$\sum M_x=-I\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta+I_z\dot{\phi}\sin\theta\left(\dot{\phi}\cos\theta+\dot{\psi}\right)$$

$$4.905\text{N}\times 0.05\text{m}\sin 60^0 = -\left[1.20\times 10^{-3}\text{kg m}^2\dot{\phi}^2\right]\sin 60^0\cos 60^0$$

$$+\left[0.45\times 10^{-3}\text{kg m}^2\right]\dot{\phi}\sin 60^0\left(\dot{\phi}\cos 60^0 + 100\text{rad/s}\right)$$

ឬ $\dot{\phi}^2 - 120\dot{\phi} + 654 = 0$

ដោះស្រាយសមីការនេះឱ្យ៖

$\dot{\phi} = 114\text{rad/s}$ (precession ខ្ពស់)

និង $\dot{\phi} = 5.72\,\text{rad/s}$ (precession ទាប)

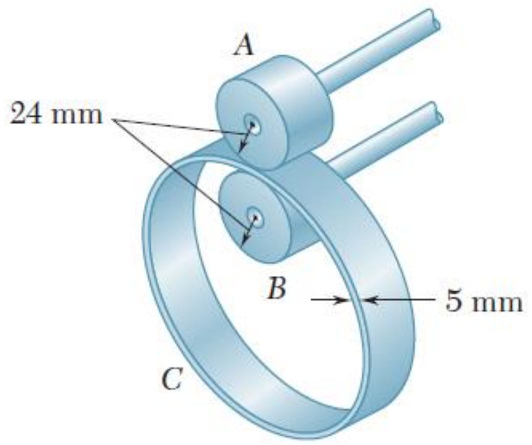
ចំណាំ ជាការពិត precession ទាប ជាទូទៅត្រូវបានសង្កេត ដោយសារ precession ខ្ពស់ តម្រូវការថាមពលស៊ីនេទិចខ្ពស់ជាង។

☞ សង្ខេបមេរៀន

- ចម្ងាយរវាងចំណុចពីរនៃអង្គធាតុរឹងមានចម្ងាយមិនផ្លាស់ប្តូរ $d\left[A(t),B(t)\right]=\left|\overrightarrow{AB}\right|=$ ថេរ
- ល្បឿននៃចំណុចនៅលើអង្គធាតុរឹងធៀបគ្នា: $\vec{v}_{B/\Re}=\vec{v}_{A/\Re}+\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}\times\overrightarrow{AB}$
- ដែនល្បឿននៃអង្គធាតុរឹង $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}_{B/\Re}=\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}_{A/\Re}$
- ដែនសំទុះ: $\vec{a}_{B/\Re}=\vec{a}_{A/\Re}+\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}\times\left(\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}\times\overrightarrow{AB}\right)=\vec{a}_{A/\Re}-\overrightarrow{AB}\left(\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}\right)^2$
- Torsor ស៊ីនេម៉ាទិច វាកំណត់ក្រោមទម្រង់៖ $[C]_B=\begin{cases}\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}\\ \vec{v}_{B/\Re}=\vec{v}_{A/\Re}+\vec{\Omega}_{\Re'/\Re}\times\overrightarrow{AB}\end{cases}$
- Torsor ឌីណាមិច $[D]_A=\begin{cases}\vec{D}=\int\vec{a}(M)dm\\ \overrightarrow{M}_A=\int\overrightarrow{AM}\times\vec{a}(M)dm\end{cases}$ ឬ $[D]_A=\begin{cases}\vec{D}=\sum_i m_i\vec{a}(M)\\ \overrightarrow{M}_A=\sum_i\overrightarrow{AM}_i\times m_i\vec{a}(M_i)\end{cases}$

ចំណោទ

១. កង C មានកាំខាងក្នុង 55 mm និងកាំខាងក្រៅ 60 mm ដាក់ចន្លោះកង់ពីរ A និង B នីមួយៗមានកាំ 24 m។ ដោយដឹងថាកង់ A វិលជាមួយល្បឿនមុំថេរ 300ជុំក្នុងមួយនាទី និងមិនរអិល ចូរកំណត់៖



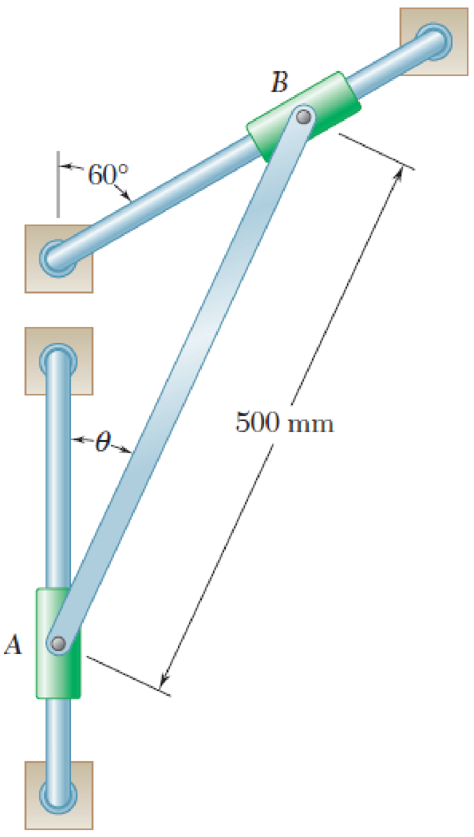
ក. ល្បឿនមុំនៃកង C និងកង់ B។

ខ. គណនាសំទុះត្រង់ចំណុច A និង B ដែលប៉ះនៅត្រង់ C ។

២. ប្រឡៅ A ចលនាឡើងលើជាមួយល្បឿនថេរ 12 m/s ។ នៅខណៈដូចបង្ហាញ នៅពេល $\theta = 25^0$ ចូរកំណត់៖

ក. ល្បឿនមុំនៃដង AB ។

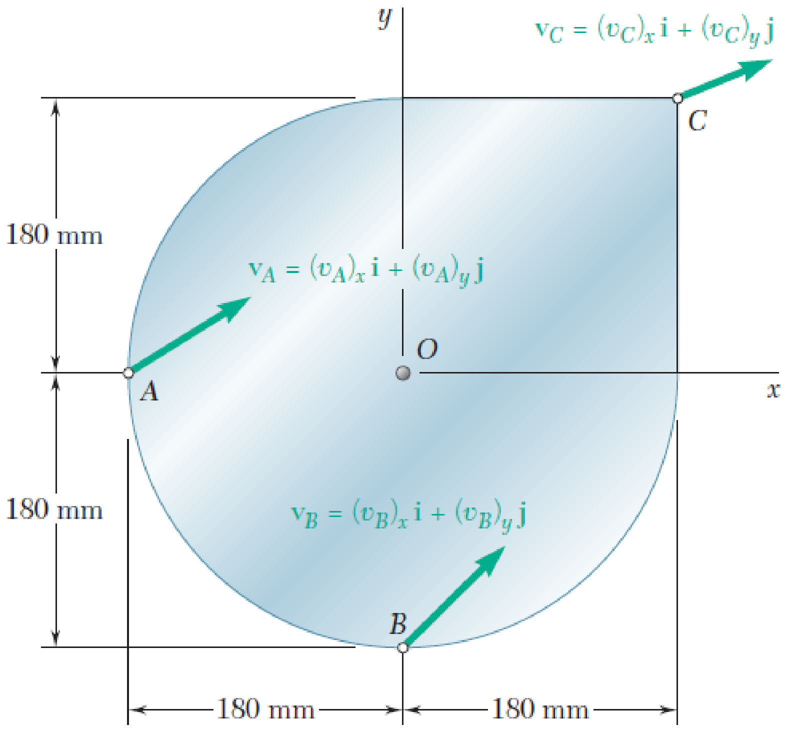
ខ. ល្បឿនប្រឡៅ B។



៣. បន្ទះដូចបង្ហាញចលនានៅក្នុងប្លង់ xy ។ ដោយដឹងថា $v_{Ax} = 12\text{mm/s}$, $v_{By} = 300\text{mm/s}$ និង $v_{Cy} = -60\text{mm/s}$ ចូរកំណត់៖

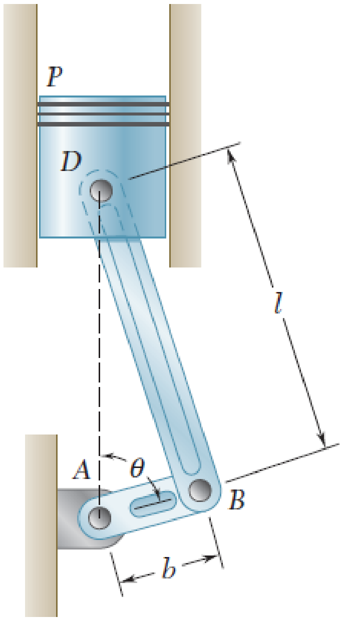
ក. ល្បឿនមុំនៃបន្ទះ។

ខ. ល្បឿននៃចំណុច A ។

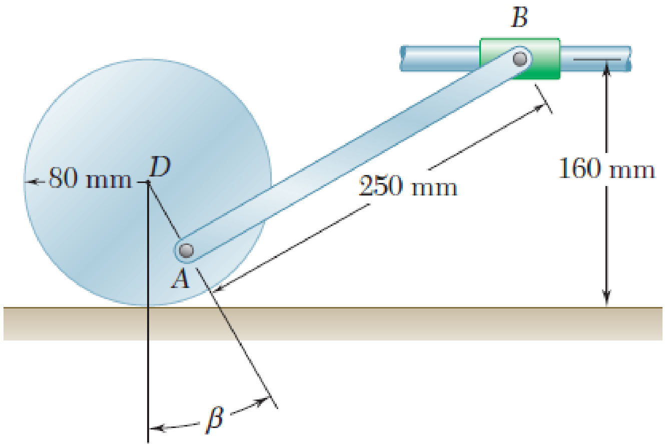


៤. នៅក្នុងប្រព័ន្ធម៉ាស៊ីនមួយបង្ហាញដូចរូប $l = 160\text{mm}$ និង $b = 60\text{mm}$ ។ ដោយដឹងថារបារAB វិលជាមួយល្បឿនមុំថេរ 1000 ជុំក្នុងមួយនាទីប្រាសទ្រនិចនាឡិកា ចូរកំណត់ល្បឿនពីស្តុង P និងល្បឿនមុំនៃដងភ្ជាប់ នៅពេល៖

ក. $\theta = 0$ ខ. $\theta = 90^0$



(លំហាត់៤)



(លំហាត់៥)

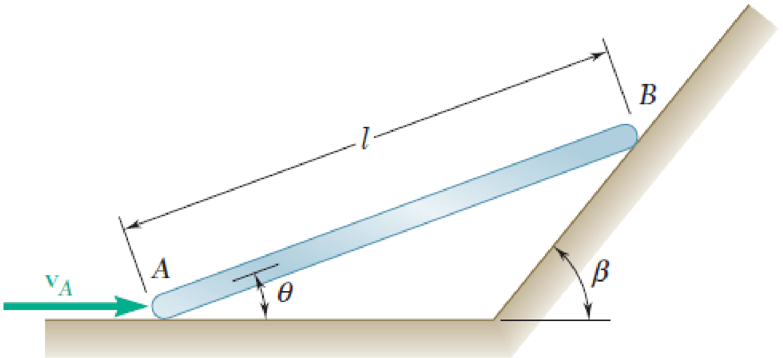
៥. កង់មានកាំ 80 mm រមៀលទៅឆ្វេងជាមួយល្បឿន 900 mm/s ។ ដោយដឹងថា ចម្ងាយ AD គឺ 50 mm ចូរកំណត់ល្បឿននៃប្រឡៅ និងល្បឿនមុំនៃដង AB នៅពេល៖

ក. $\beta = 0$ ខ. $\beta = 90^0$

៦. ដង AB អាចរអិលដោយសេរីតាមកម្រាលនិងប៉ះប្លង់ទេរ។ ដោយកំណត់ $\vec{v}_A$ ល្បឿននៃចំណុច A ចូរធ្វើដេរីវេកន្សោមចំពោះ៖

ក. ល្បឿនមុំនៃដង។

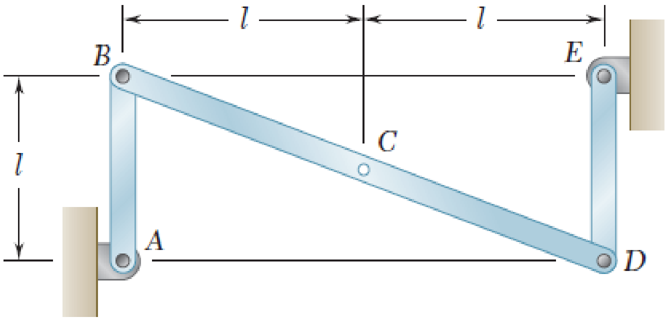
ខ. ល្បឿននៃចុង B ។



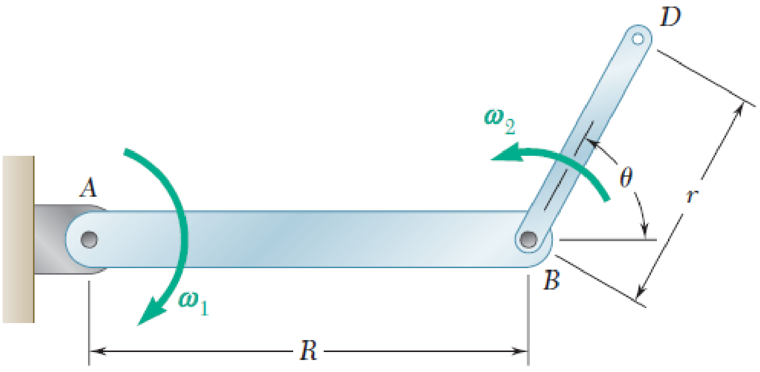
៧. ដោយដឹងថានៅខណៈបង្ហាញ ដង AB មានសំទុះមុំសូន្យ និងល្បឿនមុំ ω_0 តាមទិសដៅផ្ទុយទ្រនិចនាឡិកា ។

ក. ចូរកំណត់សំទុះមុំនៃដៃ DE ។

ខ. ចូរកំណត់សំទុះនៃចំណុច D ។

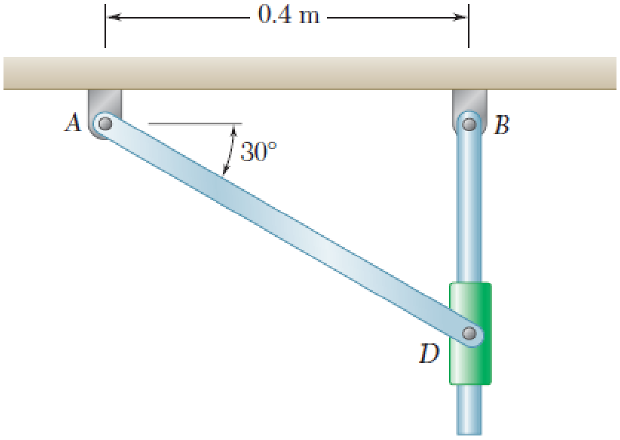


៨. ដង AB មានប្រវែង R វិលជុំវិញ A ជាមួយល្បឿនមុំថេរ $\vec{\omega}_1$ ។ នៅពេលដូចគ្នា ដង BD មានប្រវែង r វិលជុំវិញចំណុច B ជាមួយល្បឿនមុំថេរ $\vec{\omega}_2$ ទិសដៅដូចទ្រនិចនាឡិកាធៀបទៅនឹងដង AB ។ ចូរបង្ហាញថា បើ $\vec{\omega}_2 = 2\vec{\omega}_1$ សំទុះនៃចំណុច D កាត់តាមចំណុច A ។ លើសពីនេះ ចូរបង្ហាញថាលទ្ធផលនេះមិនអាស្រ័យ R, r និង θ ។

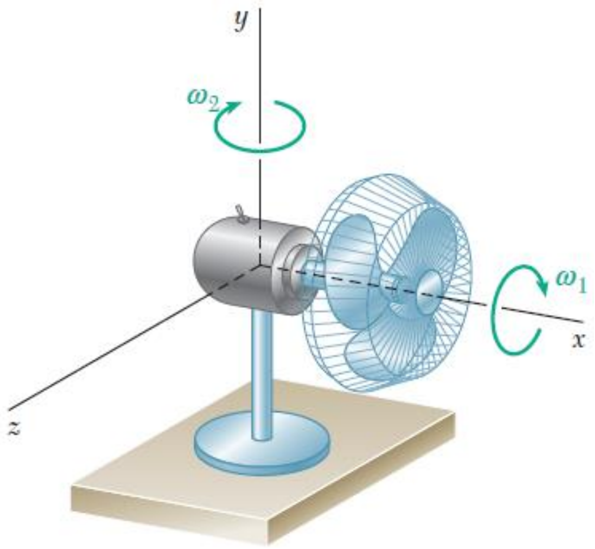


៩. ដោយដឹងថានៅខណៈបង្ហាញដងភ្ជាប់នៅត្រង់ B វិលជាមួយល្បឿនមុំថេរ $\vec{\omega}_B$ ក្នុងទិសដៅដូចទ្រនិចនាឡិកា 6 rad/s ។ ចូរកំណត់ល្បឿនមុំនិងសំទុះមុំនៃដងភ្ជាប់ត្រង់ A ។

១០. ស្លាបកង្ហារវិលដោយល្បឿនមុំថេរ $\vec{\omega}_1 = -360\vec{i}$ (ជុំក្នុងមួយនាទី)ធៀបនឹងម៉ូទ័រកង្ហារ។ ចូរកំណត់សំទុះមុំនៃស្លាបកង្ហារដោយដឹងថានៅខណៈបង្ហាញល្បឿនមុំនិងសំទុះនៃម៉ូទ័រគឺ $\vec{\omega} = -2.5\vec{j}$ (ជុំក្នុងមួយនាទី) និង $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$ ។

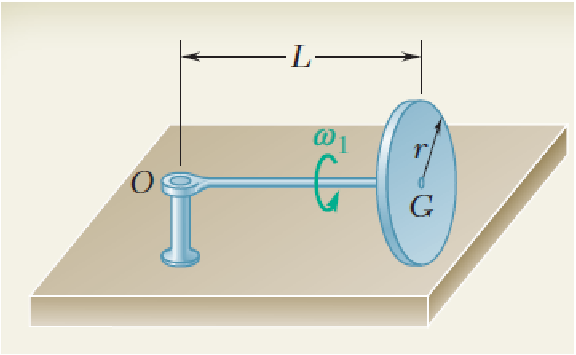


(លំហាត់៩)



(លំហាត់១០)

១១. ថាសស្មើសាច់មានកាំ r និងមានម៉ាស m ត្រូវបានតំឡើងលើភ្លៅ OG មានប្រវែង L និងម៉ាសមិនគិត។ ភ្លៅនេះដាក់ឱ្យវិលនៅចំណុចនឹង O ហើយថាសបង្ខំឱ្យរមៀលលើកម្រាលដេក។ ដោយដឹងថាថាសវិលក្នុងទិសដៅទ្រនិចនាឡិកានៅល្បឿនមុំ ω_1 ជុំវិញភ្លៅ OG ចូរកំណត់៖



ក. ល្បឿនមុំនៃថាស។

ខ. ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចរបស់វាធៀប O ។

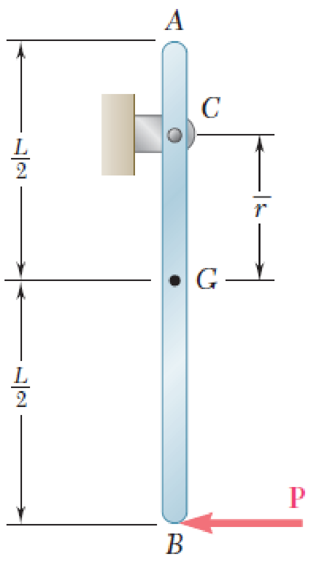
គ. ថាមពលស៊ីនេទិចរបស់វា។

ឃ. វ៉ិចទ័រនិងគូនៅ G សមមូលទៅនឹងបរិមាណចលនានៃថាស។

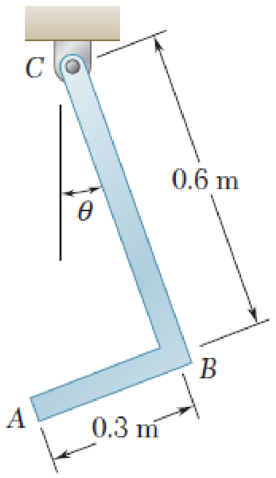
១២. របារស្មើសាច់មានប្រវែង L = 900 mm និងម៉ាស m = 4 kg ត្រូវបានព្យួរនៅចំណុច C ។ កម្លាំងដេក $\vec{P}$ មានតម្លៃ 75 N ត្រូវបានអនុវត្តនៅចុង B ។ ដោយដឹងថា $\bar{r} = 225\text{mm}$ ចូរកំណត់៖

ក. សំទុះមុំនៃដង។

ខ. កុំប៉ូសង់នៃប្រតិកម្មត្រង់C។



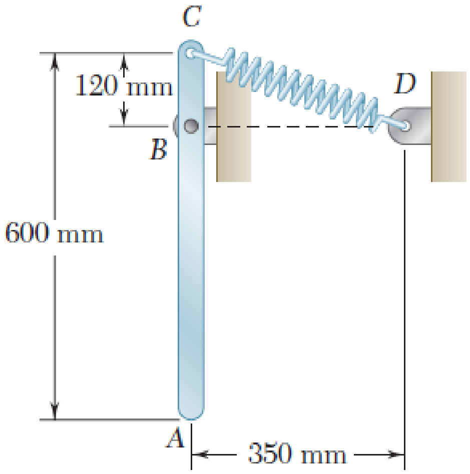
(លំហាត់១២)



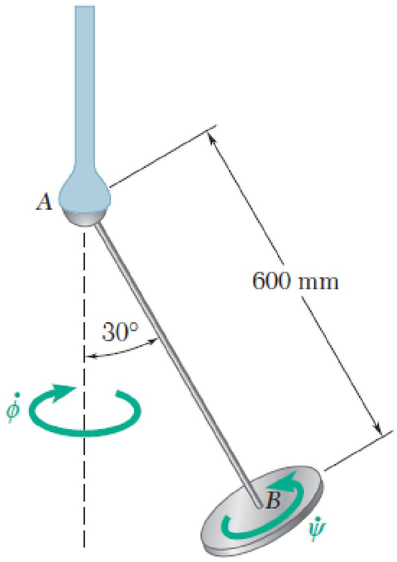
(លំហាត់១៣)

១៣. វត្ថុ ABC មានរបារពីរផ្សារភ្ជាប់គ្នានៅចុង B។ របារ AB មានម៉ាស 1 kg និងរបារ BC មានម៉ាស 2 kg។ ដោយដឹងថាតម្លៃនៃល្បឿនមុំ ABC គឺ 10rad/s នៅពេល $\theta = 0$។ ចូរកំណត់កុំប៉ូសង់នៃប្រតិកម្មត្រង់ចំណុច C នៅពេល $\theta = 0$។

១៤. របារ 4 kg វិលក្នុងប្លង់ឈរជុំវិញ B ។ រ៉ឺស័រមានថេរកម្រាញ k = 400 N/m និងប្រវែងរ៉ឺស័រមិនទាន់ខូចរាង 150 mm ត្រូវបានចងភ្ជាប់របារដូចរូប។ ដោយដឹងថារបារត្រូវបានលែងពីនៅនឹងក្នុងទីតាំងបង្ហាញ ចូរកំណត់ល្បឿនមុំរបស់វា បន្ទាប់វាវិលកាត់ 90^0 ។



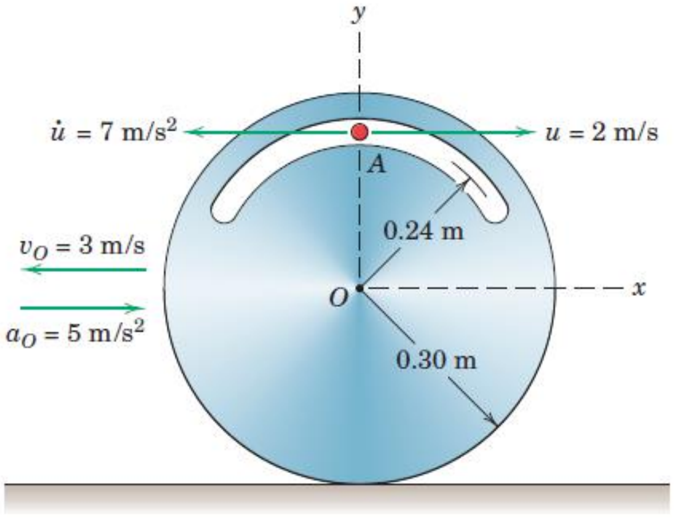
(លំហាត់១៤)



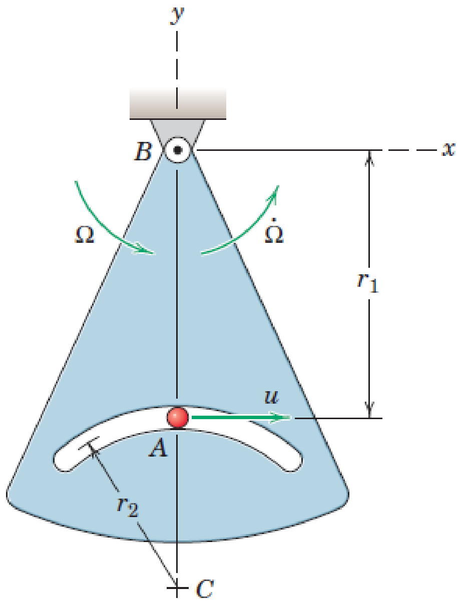
(លំហាត់១៥)

១៥. ថាស 2kg មានអង្កត់ផ្ចិត 150mm ត្រូវបានភ្ជាប់នៅចុងនៃដង AB ម៉ាសមិនគិតដែលទ្រដោយសន្លាក់បាល់ត្រង់ A ។ បើដងវិលជុំវិញទិសឈរជាមួយល្បឿនមុំថេរ 36 ជុំក្នុងមួយនាទី ចូរកំណត់អត្រាស្ពីន $\dot{\psi}$ នៃថាសជុំវិញ AB។

១៦. ថាសរមៀលមិនរអិលលើផ្ទៃដេក និងខណៈបង្ហាញផ្ចិត O មានល្បឿន និងសំទុះដូចបង្ហាញក្នុងរូប។ ចំពោះខណៈនេះ ភាគល្អិត A មានល្បឿន u និងអត្រាបម្រែបម្រួលល្បឿន $\dot{u}$ ទាំងពីរធៀបទៅនឹងថាស។ ចូរកំណត់ល្បឿនដាច់ខាត និងសំទុះដាច់ខាតនៃភាគល្អិត A។



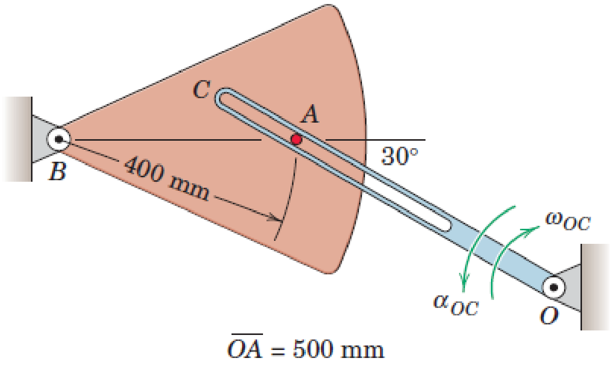
(លំហាត់១៦)



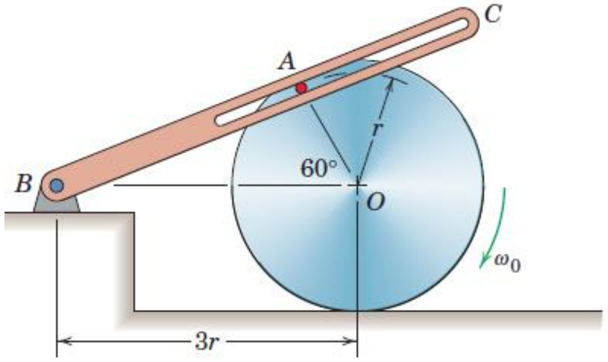
(លំហាត់១៧)

១៧. បន្ទះមួយវិលជាមួយល្បឿនមុំដូចបង្ហាញជុំវិញអ័ក្សនឹងកាត់ចំណុច B ។ ដំណាលគ្នានោះ ភាគល្អិត A ចលនានៅក្នុងចង្អូរកោងជាមួយល្បឿនថេរ u ធៀបទៅនឹងបន្ទះ។ ចូរកំណត់ល្បឿនដាច់ខាត និងសំទុះដាច់ខាតនៃភាគល្អិត A និងបញ្ជាក់សំទុះ Coriolis ។

១៨. បើនៅខណៈបង្ហាញ របារ OC វិលជាមួយល្បឿនមុំ $\omega_{OC} = 2\text{rad/s}$ និងសំទុះមុំ $\alpha_{OC} = 4\text{rad/s}^2$ ។ ចូរកំណត់សំទុះមុំ α នៃបន្ទះ និងសំទុះនៃចំណុច A ធៀបទៅនឹងរបារ។ ចំណាំ A ត្រូវបានផ្សារភ្ជាប់បន្ទះ។



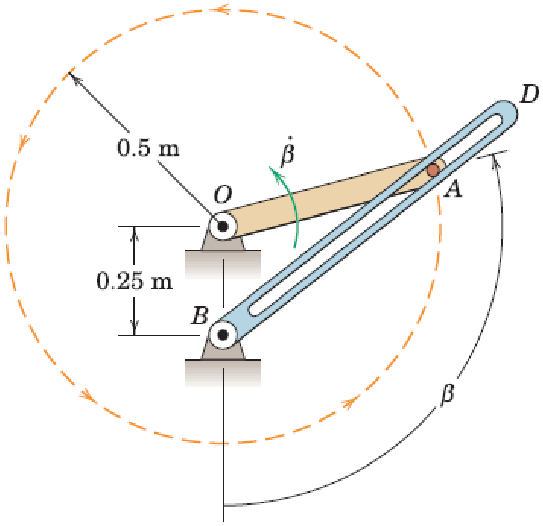
(លំហាត់១៨)



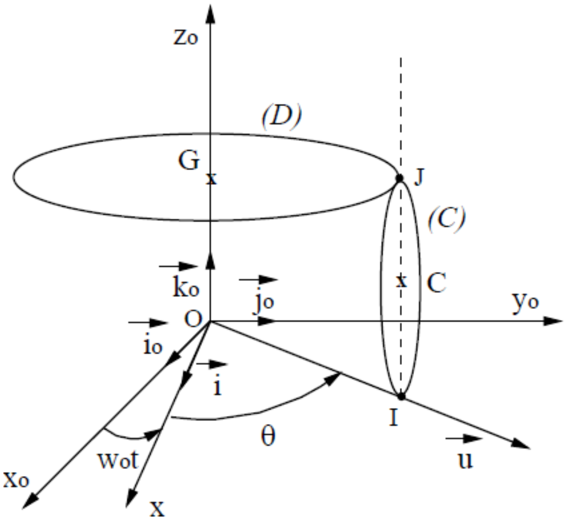
(លំហាត់១៩)

១៩. ថាសរមៀលដោយមិនរអិលលើផ្ទៃដេក។ បើថាសមានល្បឿនមុំក្នុងទិសដៅទ្រនិចនាឡិកា 20 rad/s និងសំទុះមុំក្នុងទិសដៅច្រាសទ្រនិចនាឡិកា 5 rad/s^2 ចូរកំណត់ល្បឿន និងសំទុះនៃកន្លាស់ A ធៀបទៅនឹងចង្អូរ BC ។ កាំ $r = 200\text{mm}$ ។ មិនគិតចម្ងាយពីផ្ចិតនៃកន្លាស់ A ទៅគែមថាស។

២០. របារ OA វិលជុំវិញចំណុចនឹង O ជាមួយល្បឿនមុំថេរ $\dot{\beta}=0.8\text{rad/s}$ ។ កន្លាស់ A នៅនឹងជាប់របារ OA និង ដាក់ឱ្យផ្លាស់ទៅនៅក្នុងចង្អូរ BD ដែលវិលជុំវិញអ័ក្សនឹងកាត់ចំណុច B ។ ចូរកំណត់ និងគូសក្រាបលើលំដាប់ $0\le\beta\le360^0$ នូវល្បឿនមុំ និងល្បឿននិងសំទុះនៃកន្លាស់ A ធៀបទៅនឹងរបារ BD ។ ចូរបញ្ជាក់ថា តម្លៃ និងទិសនៃ សំទុះកន្លាស់ A ធៀបទៅនឹង BD ចំពោះ $\beta=180^0$ ។



(លំហាត់២០)



(លំហាត់២១)

២១. ថាស(D)មានផ្ចិត G កាំ R វិលនៅក្នុងប្លង់ដេកជុំវិញអ័ក្ស(Oz)ជាមួយល្បឿនមុំថេរ ω។ វាទាញក្នុងចលនា របស់វានូវកង(C)មានផ្ចិត C កាំ r ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ឈរ។ កងត្រូវបានសង្កត់ត្រង់ J លើថាស(D) និងត្រង់ I លើប្លង់ ដេក(P)។ គណនាល្បឿនមុំរបស់កង

២២. របារស្មើសាច់មានប្រវែង AB = L មានម៉ាស m ផ្ចិតម៉ាស G ដែលចុង A នៅនឹងលើដីរអិលនិងចុង B សង្កត់លើ ជញ្ជាំងឈរលោង។ ដំបូងរបារផ្តុំបានមុំ θ_0 ជាមួយជញ្ជាំង។ ចុងទាំងពីររអិល គ្មានកកិត នៅលើដីនិងជញ្ជាំង។

ក. ដោយប្រើទ្រឹស្តីឌីណាមិចសរុបនិងម៉ូម៉ង់ឌីណាមិច ចូរបង្កើតសមីការស្កាលែបីនៃចលនារបស់របារ។

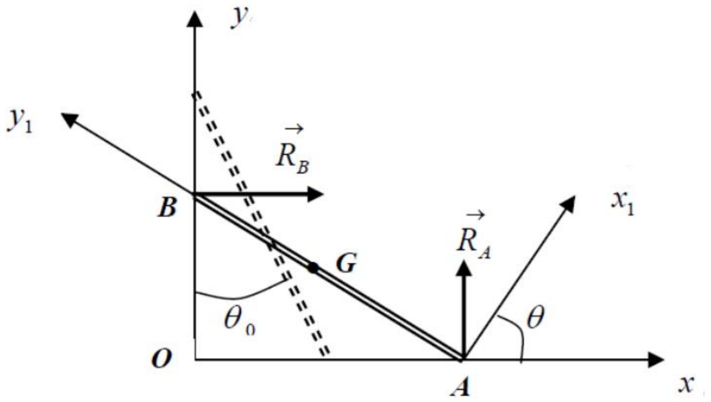
ខ. ចេញពីសមីការទាំងនេះ ចូរទាញរកសំទុះមុំ $\ddot{\theta}$ នៃរបារ។

គ. ដោយធ្វើអាំងតេក្រាលសមីការសំទុះ បង្ហាញថា $\dot{\theta}^2=\frac{3g}{L}(\cos\theta_0-\cos\theta)$ ។

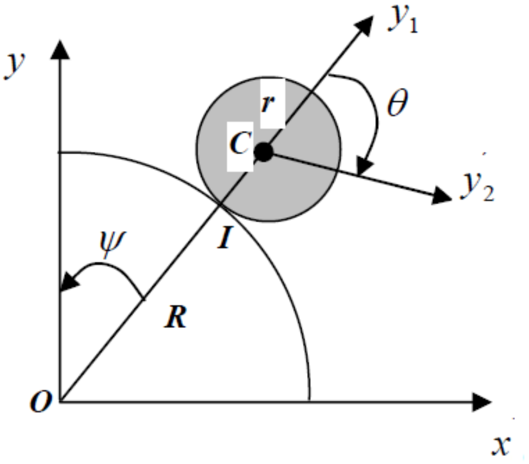
ឃ. ចូររកកន្សោម $\dot{\theta}^2$ ដោយប្រើទ្រឹស្តីនៃការរក្សាថាមពលមេកានិចសរុប។

ង. ចូរកំណត់ប្រតិកម្ម R_A និង R_B ជាអនុគមន៍នៃ θ ។

ច. ចូរទាញរកមុំដើម្បីឱ្យរបារចាកចេញពីជញ្ជាំង។



២៣. ប្រព័ន្ធមួយកើតឡើងពីស៊ីឡាំងនឹងមានកាំ R ភ្ជាប់ទៅតម្រុយ $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ និងថាសមានម៉ាស m កាំ r ភ្ជាប់ទៅតម្រុយ $\Re_2(B,\vec{i}_2,\vec{j}_2,\vec{k}_2)$ ធ្វើចលនារង្វិលជុំវិញស៊ីឡាំងដូចបង្ហាញនៅលើរូប។



ក. ចូរកំណត់ម៉ាទ្រីសនិចលភាពនៃថាសនៅចំណុច O នៅក្នុងតម្រុយ $\Re_1(O,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k})$ ។

ខ. ចូរឱ្យទំនាក់ទំនងរវាង $\dot{\psi}$ និង $\dot{\varphi}$ ដោយសំដែងលក្ខខណ្ឌមិនរអិលនៃថាសនៅចំណុច I ។

គ. ចូរកំណត់ល្បឿននិងសំទុះនៃចំណុច M តាមបន្ទំចលនា។

២៤. របារស្មើសាច់ AB = L មានម៉ាស m ដំបូងត្រូវបានភ្ជាប់ដោយចុង B_0 របស់វាដោយខ្សែមិនយឺតនៅចណុចនឹង។ ចុងម្ខាងទៀត A_0 នៅនឹងលោដីរអិល។ បើ θ_0 ជាមុំទ្រេតដំបូងនៃរបារជាមួយទិសឈរ $(O_1,\vec{j}\,)$។ នៅខណៈ t ណាមួយ យើងកាត់ខ្សែ ហើយរបារធ្លាក់ដោយគ្មានល្បឿនដើម។ យើងពិចារណាថា ចលនាប្រព្រឹត្តិទៅនៅក្នុងប្លង់ $(\vec{i},\vec{j})$ ។ តម្រុយ $\Re_1(A,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ ជាប់នឹងរបារ ដែល $(\vec{i},\vec{i}_1)=(\vec{j},\vec{j}_1)=\theta$ ។ គេឱ្យ $\overrightarrow{OO_1}=x\vec{i}$ និង torseur និចលភាពនៃរបារនៅត្រង់ផ្ចិតរបស់វា G នៅក្នុងតម្រុយ $\Re_1$ ត្រូវបានសរសេរ៖

$$I_{G/\Re_1}=\begin{bmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & A\end{bmatrix}_{\Re_1} \quad \text{ដោយ } A=\frac{mL^2}{12}$$

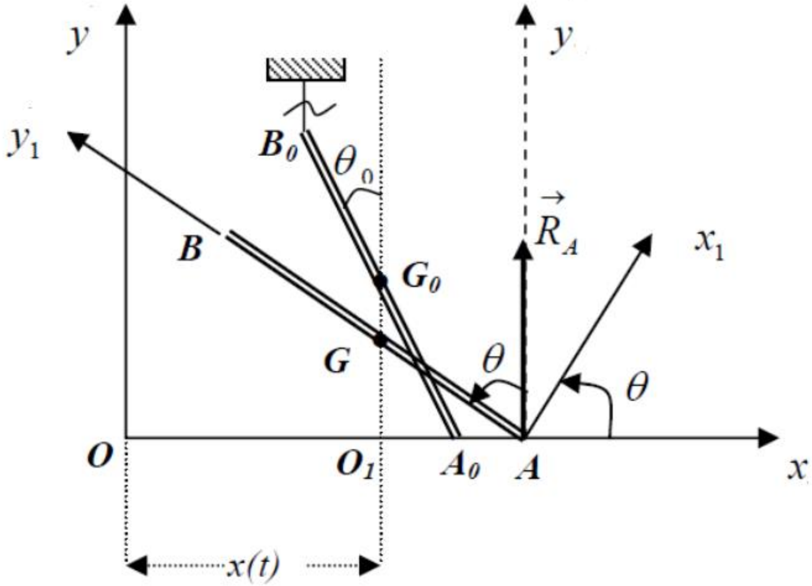
គេយកតម្រុយនឹង $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដូចតម្រុយចំណោល។

ក. ចូរកំណត់វ៉ិចទ័រទីតាំង ល្បឿន សំទុះដាច់ខាតនៃចំណុច G។

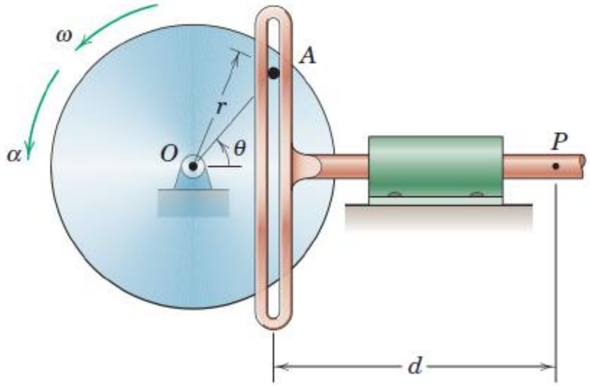
ខ. ចូរអនុវត្តទ្រឹស្តីឌីណាមិចសរុបនៅចំណុច G ។ ចូរទាញថាផ្ចិត G នៃរបារនៅនឹងក្នុងចលនាឈរនៅពេលទន្លាក់របស់វា។

គ. ចូរអនុវត្តទ្រឹស្តីម៉ូម៉ង់ឌីណាមិចត្រង់ចំណុច G ។

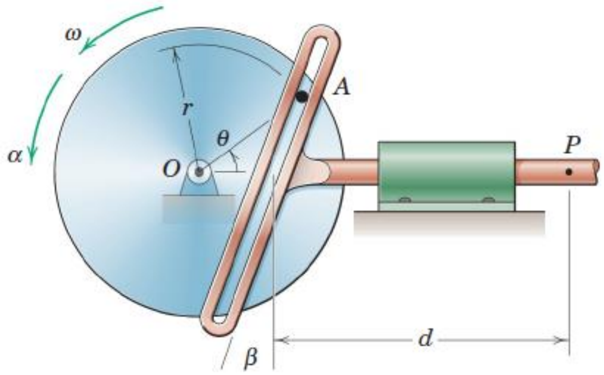
ឃ. ចូរទ្រាកកន្សោមសំទុះមុំ $\ddot{\theta}$ ជាអនុគមន៍នៃ $L,\dot{\theta},\theta$ និង g ។



២៥. យន្តការបម្លែងចលនារង្វិលនៃថាសទៅចលនារំកិលទៅមកនៃដង។ ចំពោះតម្លៃដែលឱ្យ θ,ω,α,r និង d ចូរកំណត់ល្បឿន និងសំទុះនៃចំណុច P របស់ដង។



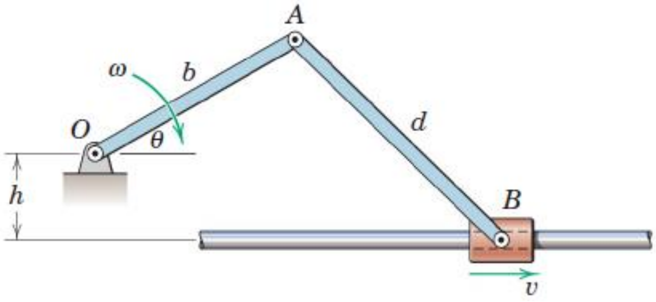
(លំហាត់២៥)



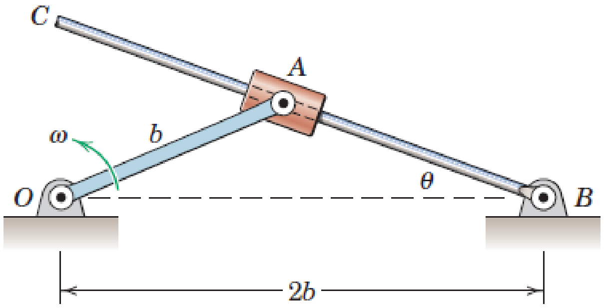
(លំហាត់២៦)

២៦. យន្តការបម្លែងចលនាដូចបង្ហាញ។ ចំពោះតម្លៃឱ្យ ω,α,r,θ,d និង β ចូរកំណត់ល្បឿន និងសំទុះនៃចំណុច P របស់ដង។

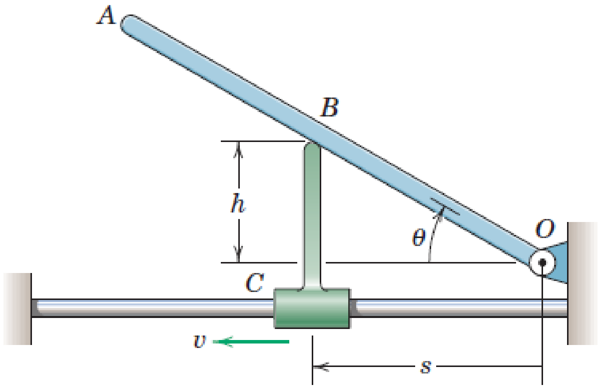
២៧. សន្លាក់ OA វិលតាមទ្រនិចនាឡិកាជាមួយល្បឿនមុំ $\omega = 7\text{rad/s}$ ។ ចូរកំណត់ល្បឿននៃចំណុចB ចំពោះទីតាំង $\theta = 30^0$ ។ ដោយប្រើតម្លៃ b = 80 mm, d = 100 mm និង h = 30 mm ។



២៨. សន្លាក់ OA វិលបញ្ច្រាសទ្រនិចនាឡិកាជាមួយល្បឿនមុំ $\omega = 3\text{rad/s}$ ។ ចូរកំណត់ល្បឿនមុំនៃរបារ BC នៅពេល $\theta = 20^0$ ។



២៩. ប្រឡៅ C ចលនាទៅឆ្វេងតាមបំពង់នឹងជាមួយល្បឿន v ។ ចូរកំណត់ល្បឿនមុំ ω_{OA} ជាអនុគមន៍នៃ v ទីតាំងប្រឡៅ s និងកម្ពស់ h ។

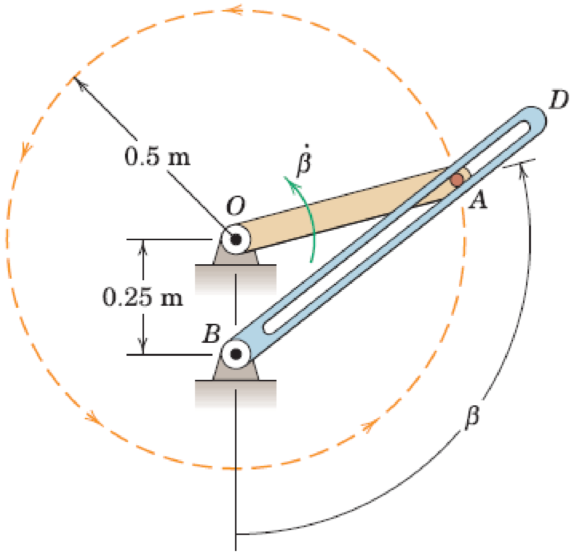


៣០. របារ OA វិលជុំវិញចំណុច O ជាមួយល្បឿនមុំថេរ $\dot{\beta} = 0.8\text{rad/s}$ ។ កន្លះ A នៅនឹងលើរបារ OA ហើយនៅក្នុងចង្អូររបារ BD ដែលវិលជុំវិញអ័ក្សនឹងកាត់តាមចំណុច B ។

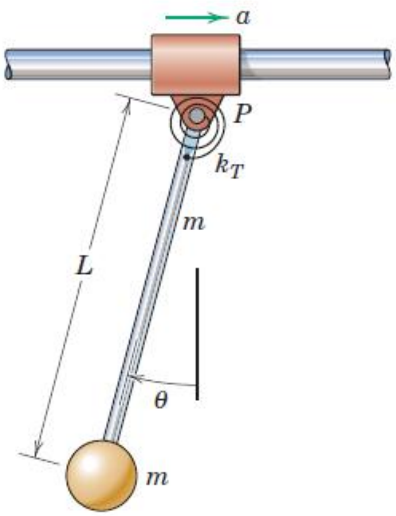
ក. ចូរកំណត់និងគូសក្រាបលើលំដាប់ $0 \le \beta \le 360^0$ នូវល្បឿនមុំ និងសំទុះមុំនៃ BD ។

ខ. ល្បឿននិងសំទុះនៃកន្លះ A ធៀបទៅនឹងរបារ BD ។

គ. ចូរបញ្ជាក់ថាទំហំនិងទិសនៃសំទុះនៃកន្លះ A ធៀបទៅនឹងរបារ BD ចំពោះ $\beta = 180^0$ ។



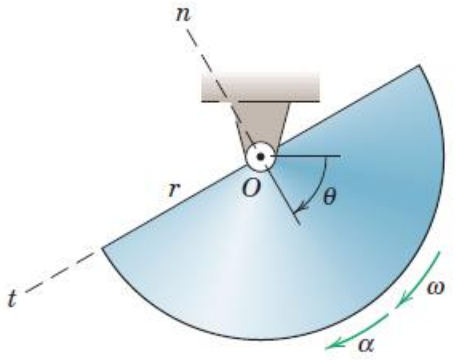
(លំហាត់៣០)



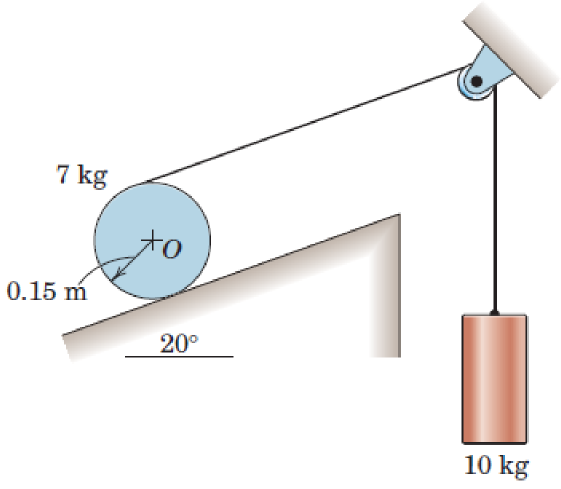
(លំហាត់៣១)

៣១. បើប្រឡៅ P ឱ្យមានសំទុះថេរ $a = 3g$ ទៅស្តាំ ប៉ោលត្រូវបានសន្មតលំងាក $\theta = 30^0$ ។ ចូរកំណត់ភាពរមូលនៃរ៉ឺស័រមួរ k_T ដែលអនុញ្ញតហេតុការណ៍នេះកើតឡើង។ រ៉ឺស័រមួរមិនទាន់ខូចរាងនៅពេលប៉ោលនៅក្នុងទីតាំងឈរ។

៣២. កន្លះថាសមានម៉ាស m និងកាំ r ត្រូវបានលែងពីនៅនឹងនៅមុំ $\theta = 0$ ហើយវិលដោយសេរីនៅក្នុងប្លង់ឈរជុំវិញអ័ក្សនឹងកាត់តាមត្រចៀក O ។ ចូរសំដែងកុំប៉ូសង់ប៉ះនិងកែងនៃកម្លាំង $\vec{F}$ មានលើត្រចៀកជាអនុគមន៍នៃ θ ។



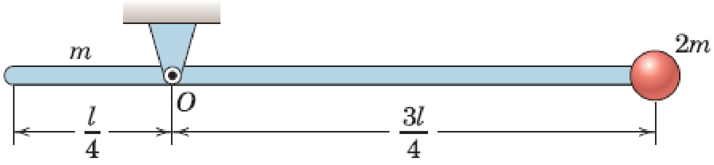
(លំហាត់៣២)



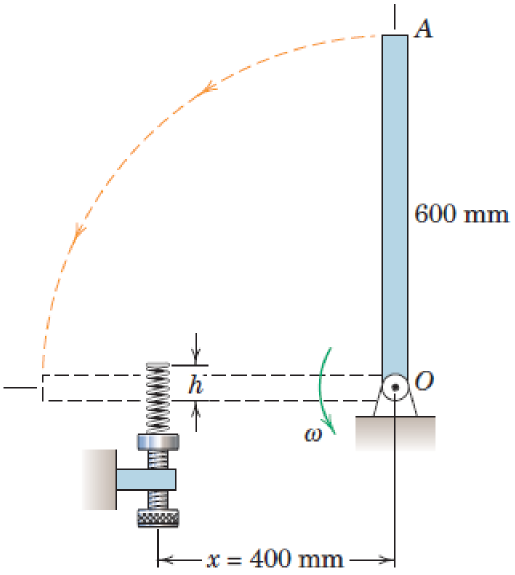
(លំហាត់៣៣)

៣៣. ប្រព័ន្ធមួយត្រូវបានលេងពីនៅនឹងជាមួយខ្សែកាបតឹង ហើយស៊ីឡាំងស្មើសាច់រមៀលមិនរអិលលើប្លង់ទេរគ្រើម។ ចូរកំណត់សំទុះមុំនៃស៊ីឡាំង និងមេគុណកកិតស្តាទិចអប្បបរមា μ_s ដែលស៊ីឡាំងនឹងមិនរអិល។

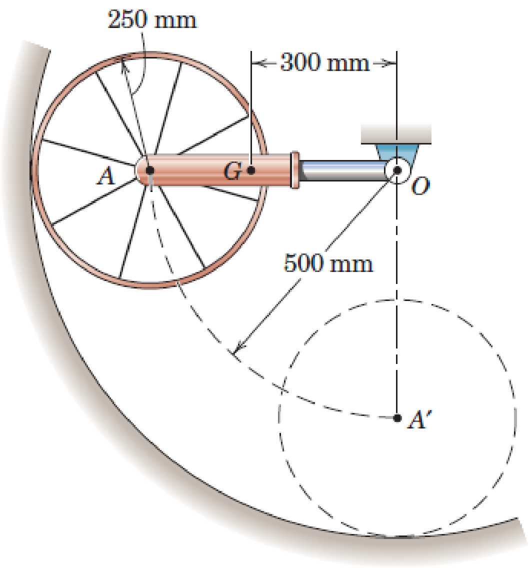
៣៤. ដងមានម៉ាស m និងប្រវែង l មានភាគល្អិត (កាំមិនគិត ម៉ាស 2m)ភ្ជាប់នៅចុងវា។ បើប្រព័ន្ធត្រូវបានលែងពីនៅនឹង នៅទីតាំងដូចបង្ហាញ ចូរកំណត់ល្បឿនមុំនៅពេលវាឆ្លងកាត់ទីតាមងឈរ។



៣៥. របារ OA ត្រូវបានលេងពីនៅនឹងនៅក្នុងទីតាំងឈរ ហើយបណ្ណែនរ៉ឺស័រមានថេរកម្រាញ k = 20 kN/m នៅពេលទីតាំងដេកត្រូវបានឆ្លងកាត់។ ចូរកំណត់ចម្ងាយ h ពេលរបារវាយនៅល្បឿនមុំ $\omega = 4\text{rad/s}$ (ទិសដេក)។



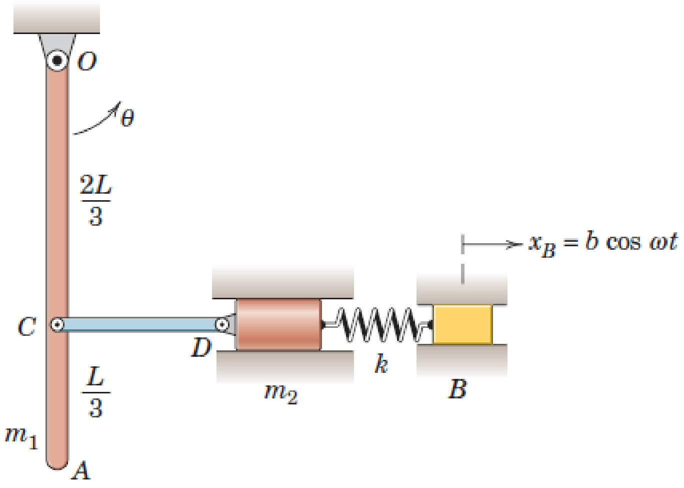
(លំហាត់៣៥)



(លំហាត់៣៦)

៣៦. កង់មានម៉ាស 4 kg និងកាំ 250 mm ។ កង់ភ្ជាប់ជាមួយដង OA 3 kg មានផ្ចិតម៉ាសនៅត្រង់ G និងកាំ gyration ធៀបOគឺ 350 mm ។ បើប្រព័ន្ធត្រូវបានលែងពីនៅនឹងនៅក្នុងទិសដេកដូចបង្ហាញ ហើយបើកង់វិលលើផ្ទៃរង់មិនរអិល ចូរគណនាល្បឿននៃចំណុច A នៅពេលវាទៅដល់ A' ។

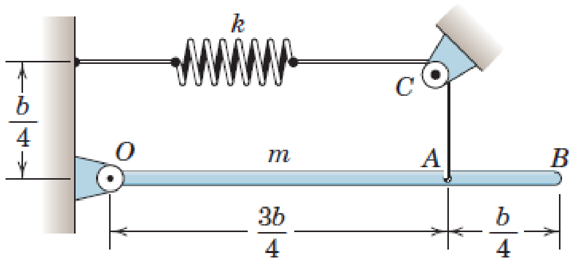
៣៧. ចូរកំណត់ប្រព័ន្ធសមីការចលនាជាអនុគមន៍នៃអថេរ θ ដូចបង្ហាញ។ សន្មតថាចលនាមុំតូចនៃរបារ OA ហើយមិនគិតម៉ាសសន្លាក់ CD។



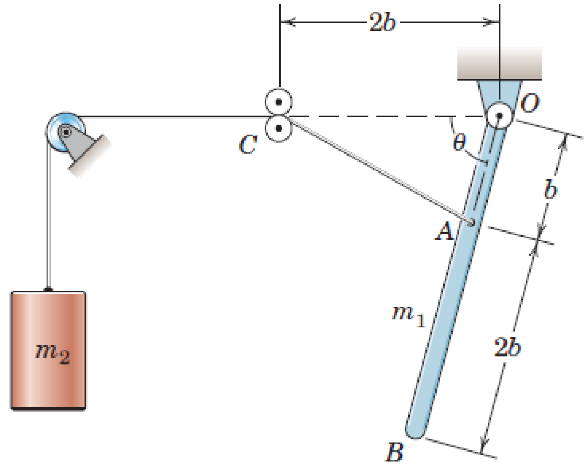
៣៨. របារស្មើសាច់មានម៉ាស m វិលដោយសេរីជុំវិញអ័ក្សដេកកាត់តាម O។ បើរបារត្រូវបានលែងពីនៅនឹងក្នុងទីតាំងដេកដូចបង្ហាញដែលរ៉ឺស័រមិនខូចរាង វាត្រូវបានសង្កេតដើម្បីវង្វិលអតិបរមា 30^0 ។ រ៉ឺស័រមានថេរកម្រាញ k = 200 N/m និងចម្ងាយ b = 200 mm ។ ចូរកំណត់៖

ក. ម៉ាស m នៃរបារ។

ខ. ល្បឿនមុំ ω នៃរបារ នៅពេលបន្លាស់ទីមុំ 15^0 ពីទីតាមងលែង។



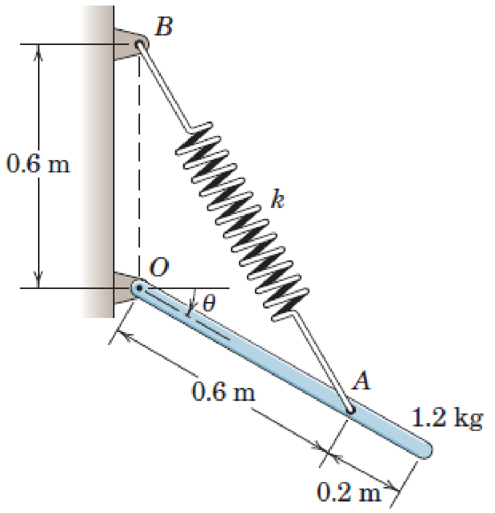
(លំហាត់៣៨)



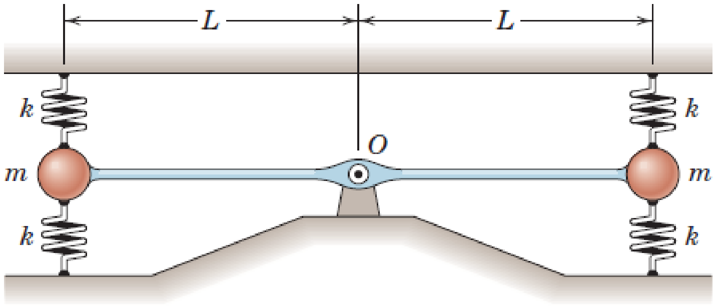
(លំហាត់៣៩)

៣៩. ប្រព័ន្ធមួយត្រូវបានលែងពីនៅនឹង នៅពេលមុំ $\theta = 90^0$ ។ ចូរកមណត់ល្បឿនមុំនៃរបារស្មើសាច់ នៅពេល $\theta = 60^0$ ។ ប្រើតម្លៃ m_1 = 1 kg , m_2 = 1.25 kg និង b = 0.4 m ។

៤០. បើរបារស្មើសាច់ 1.2 kg ត្រូវបានលែងពីនៅនឹង នៅទីតាំង $\theta = 0$ ដែលរ៉ឺស័រមិនទាន់ខូចរាង ចូរកំនត់ និងគូសក្រាបល្បឿនមុំជាអនុគមន៍នៃ θ លើលំដាប់ $0 \le \theta \le \theta_{max}$ ដែល θ_{max} ជាតម្លៃនៃ θ ដែលវាទៅស្ងៀម។ តម្លៃនៃថេរកម្រាញរ៉ឺស័រគឺ 100 N/m និងកកិតអាចចោលបាន។ ចូរបញ្ជាក់ថាល្បឿនមុំអតិបរមា និងតម្លៃនៃ θ ដែលវាកើតឡើង។



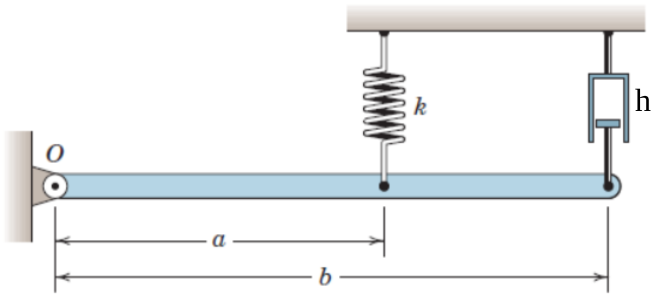
(លំហាត់៣៩)



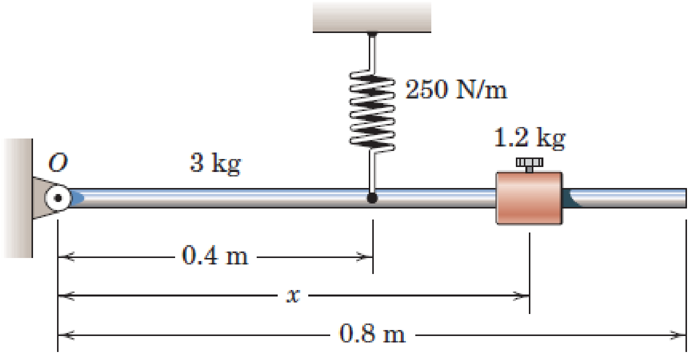
(លំហាត់៤០)

៤១. ដងស្រាលភ្ជាប់ស្វ៊ែតូចដែលនីមួយៗមានម៉ាស m ត្រូវបានបង្ហាញនៅទីតាំងលំនឹង ដែលរ៉ឺស័រទាំងបួនបណ្ណែនស្មើគ្នា។ ចូរកំណត់ប្រេកង់ធម្មជាតិ និងខួប ចំពោះលំយោលតូចជុំវិញចំណុច O គ្មានកកិត។

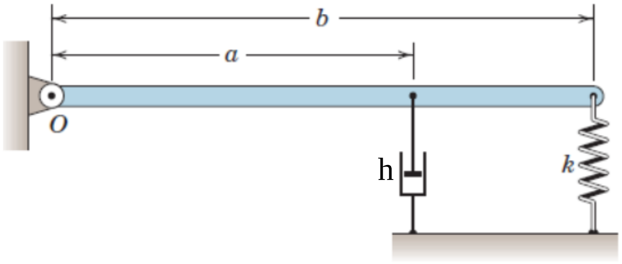
៤២. ដងស្មើសាច់មានម៉ាស m វិលដោយសេរីជុំវិញអ័ក្សដេកកាត់តាមចំណុច O។ សន្មតថាលំយោលតូច ចូរកំណត់កន្សោមចំពោះអត្រាតំហយ។ ចូរកំណត់តម្លៃមេគុណតំហយក្នុងរបបកម្រិត។



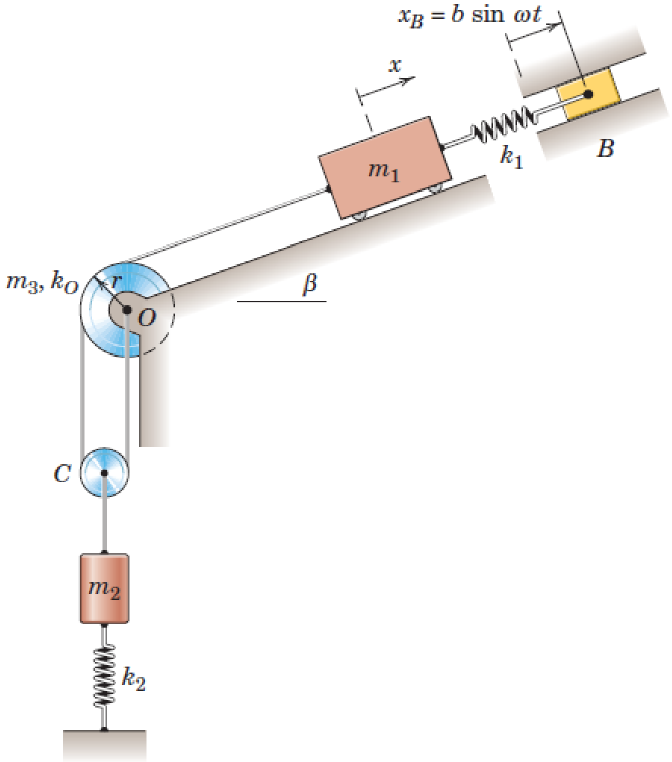
៤៣. ម៉ាសនៃដងស្មើសាច់គឺ 3 kg ។ ចូរកំណត់ទីតាំង x ចំពោះដុំរអិល 1.2 kg ខួបនៃប្រព័ន្ធគឺ 1s ។ សន្មតថាលំយោលតូចជៀបទីតាំងលំនឹងដេកដូចបង្ហាញ។



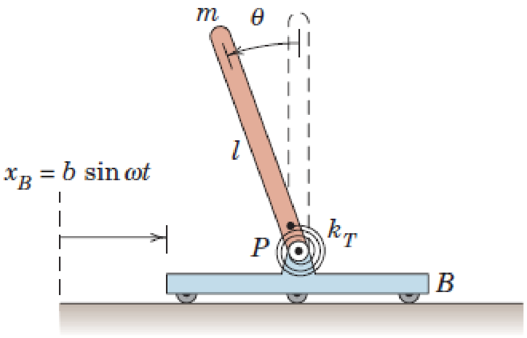
៤៤. ដងស្មើសាច់មានម៉ាស m វិលដោយសេរីជៀប O។ សន្មតថាលំយោលតូច ចូរកំណត់កន្សោមអត្រាតំហយ។ ចូររកតម្លៃមេគុណតំហយនៅពេលលំយោលក្នុងរបបកម្រិត។



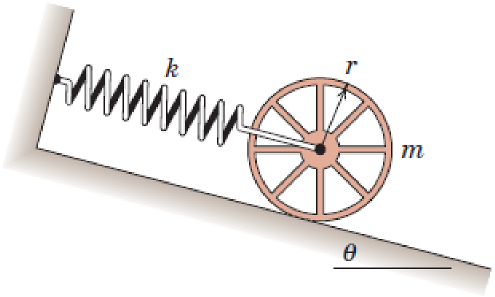
៤៥. ម៉ាសពីរត្រូវបានភ្ជាប់គ្នាដោយខ្សែមិនយឺតឆ្លងកាត់រ៉កមានម៉ាស m_3 កាំ r និងកាំ gyration k_0។ ចូរកំណត់សមីការចលនាចំពោះប្រព័ន្ធជាអនុគមន៍នៃអថេរ x ។ ចូរបញ្ជាក់ថា ប្រេកង់នាំកម្រិត ω_c នៃដុំ B ដែលផ្តល់លំយោលធំឡើងៗ។ ប្រើតម្លៃ $m_1 = 25\text{kg},\ m_2 = 10\,\text{kg}, m_3 = 15\,\text{kg}, k_1 = 450\text{N/m}, k_2 = 300\text{N/m},\ r = 300\text{mm}$ និង $k_0 = 200\text{mm}$ ។



៤៦. កូនរទេះ B ត្រូវបានឱ្យបន្លាស់ទីអាម៉ូនិច $x_B = b\sin\omega t$ ។ ចូរកំណត់អំព្លីទុតមុំនៃលំយោលខួបរបស់របារស្មើសាច់ដែលដាក់កន្លះត្រង់ P ។ សន្មតថា មុំតូច និងមិនគិតកកិតនៅត្រង់កន្លះ។ រ៉ឺស័រមួរមិនខូចរាងនៅពេល $\theta = 0$ ។



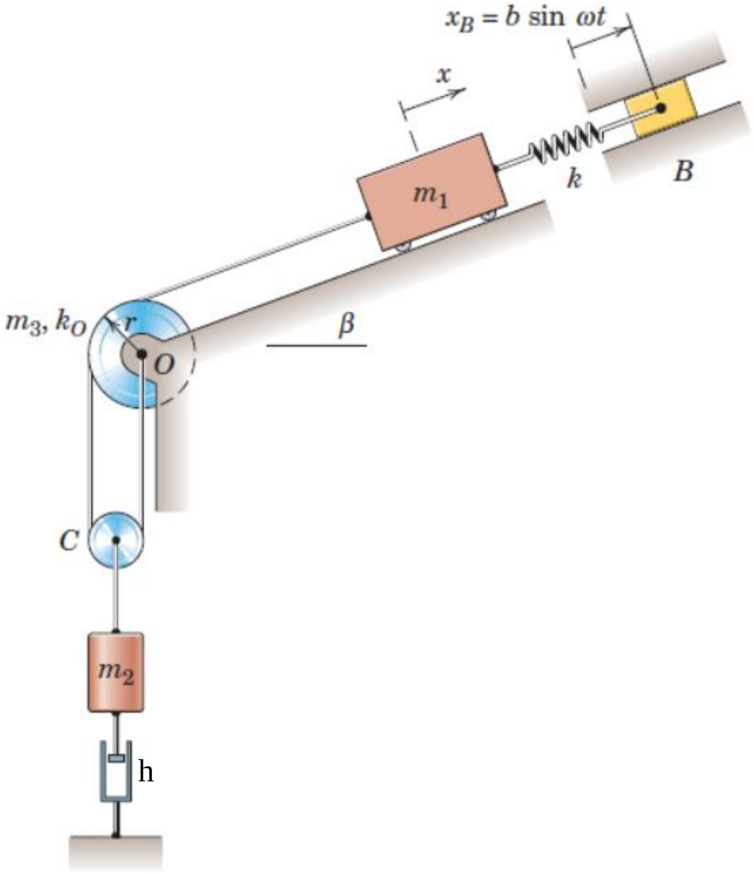
(លំហាត់៤៦)



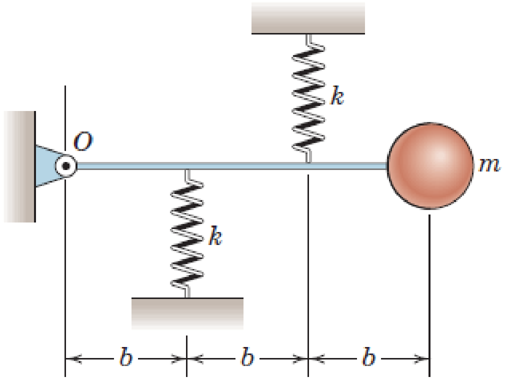
(លំហាត់៤៧)

៤៧. កង់មានកាំ r ម៉ាស m និងកាំសង់ត្រួអ៊ីតនៃ gyration $\bar{k}$ រមៀលមិនរអិលលើប្លង់ទេរ។ ចូររកប្រេកង់ធម្មជាតិនៃលំយោល និងរកក្នុងករណី $\bar{k} = 0$ និង $\bar{k} = r$ ។

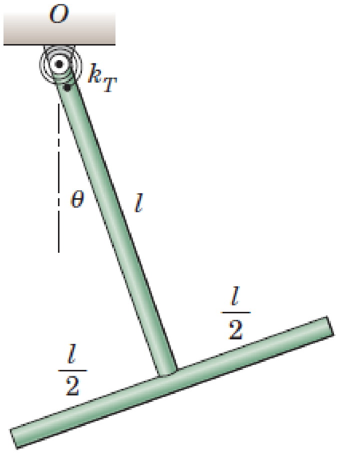
៤៨. ប្រព័ន្ធមួយតំឡើងដូចរូប។ ចូរកំណត់សមីការចលនាចំពោះប្រព័ន្ធជាអនុគមន៍នៃ x ។ ចូរបញ្ជាក់ថាតម្លៃនៃមេគុណតំហយ h ដែលនឹងឱ្យអត្រាតំហយ 0.2 ។ ប្រើតម្លៃ $m_1 = 25$ kg, $m_2 = 10$ kg, $m_3 = 15$ kg, $k_1 = 450$ N/m, $k_2 = 300$ N/m, $r = 300$ mm និង $k_0 = 200$mm ។



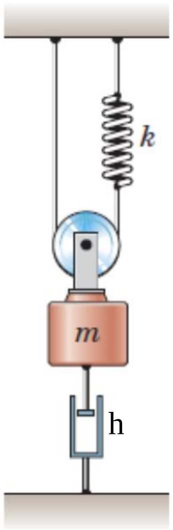
៤៩. ដងនិងស្វ៊ែមានម៉ាស m នៅសៀមក្នុងទីតាំងដេកដូចបង្ហាញ។ ចូរកំណត់ខួបចំពោះលំយោលតូចនៅក្នុងប្លង់ឈរវិលជុំវិញ O។



៥០. ប៉ោលផ្សំពីដងពីស្មើសាច់ដែលមានម៉ាស ρ ក្នុងមួយខ្នាតប្រវែង។ ដងផ្សារភ្ជាប់គ្នា និងវិលជុំវិញអ័ក្សដេកកាត់តាម O ប្រឆាំងអំពើនៃរ៉ឺស័រមួរមានថេររមួល k_T ។ ចូរគណនាប្រេកង់ធម្មជាតិចំពោះលំយោលតូចជុំវិញទីតាំងលំនឹង។ រ៉ឺស័រមិនខូចរាងនៅពេល $\theta = 0$ និងកកិតត្រង់Oមិនគិត។



(លំហាត់៥០)



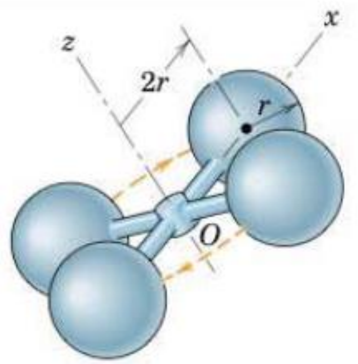
(លំហាត់៥១)

៥១. ចូរកំណត់តម្លៃនៃមេគុណតំហាយដែលប្រព័ន្ធក្នុងរបបកម្រិត។ ម៉ាសនិងកកិតនៃរ៉កមិនគិត។ គេឱ្យម៉ាសដុំ $m = 2\text{kg}$ និងថេរកម្រាញរ៉ឺស័រ $k = 150\text{N/m}$ ។

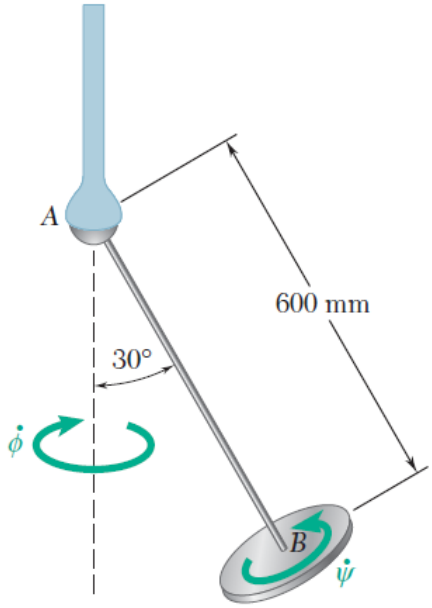
៥២. សំណើស្ថានីយយានអវកាសត្រូវបានប្រមាណដោយស្វ៊ែស្មើសាច់បួន នីមួយៗមានម៉ាស m និងកាំ r ។ ដងដែលភ្ជាប់ប្រព័ន្ធមិនគិតម៉ាស។ បើស្ថានីយត្រូវបានដាក់ឱ្យវិលជុំវិញអ័ក្ស z របស់វានៅអត្រារាល់ជុំក្នុងមួយវិនាទី។ ចូរកំណត់៖

ក.ចំនួន n នៃជុំ precession សម្រាប់បរិវត្តនីមួយៗជុំវិញអ័ក្ស z បើប្លង់នៃរង្វង់ងាកតិចពីទិសដៅនឹង។

ខ. ខួបនៃ precession បើអ័ក្សស្ពីន z ផ្តុំបានមុំ 20^0 ធៀបទៅនឹងអ័ក្សមានទិសដៅនឹងជុំវិញ precession ។ ចូរគូសលំហ និងអង្គធាតុកោនសម្រាប់លក្ខខណ្ឌក្រោយ។



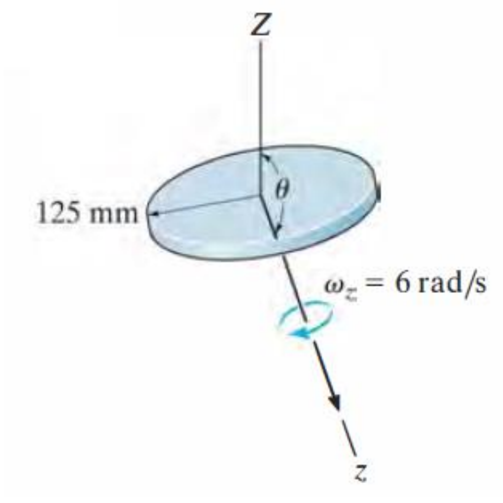
(លំហាត់៥២)



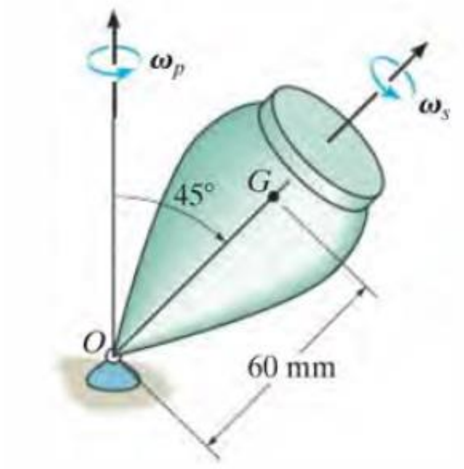
(លំហាត់៥៣)

៥៣. ថាស 2 kg មានអង្កត់ផ្ចិត 150 mm ត្រូវបានភ្ជាប់ទៅចុងនៃដង AB ម៉ាសមិនគិតដែលត្រូវបានព្យួរដោយចំណុចវិលត្រង់ A ។ បើថាសត្រូវបានសង្កេត precession វិលជុំវិញទិសឈរក្នុងទិសដៅដូចបង្ហាញ នៅអត្រាថេរ 3.6 rad/s ចូរកំណត់អត្រាស្ពីន $\dot{\psi}$ នៃថាសវិលជុំវិញ AB។

៥៤. ថាស 4 kg ត្រូវបានបោះជាមួយស្ពីន $\omega_z = 6\,\text{rad/s}$ ។ បើមុំ θ ត្រូវបានវាស់គឺ 160^0 ចូរកំណត់ precession វិលជុំវិញអ័ក្ស Z ។



(លំហាត់៥៤)

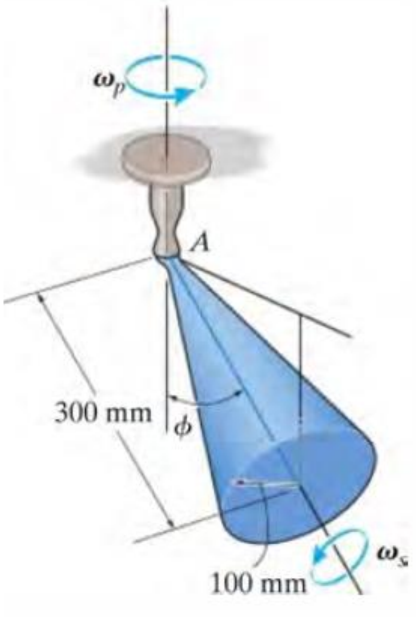


(លំហាត់៥៥)

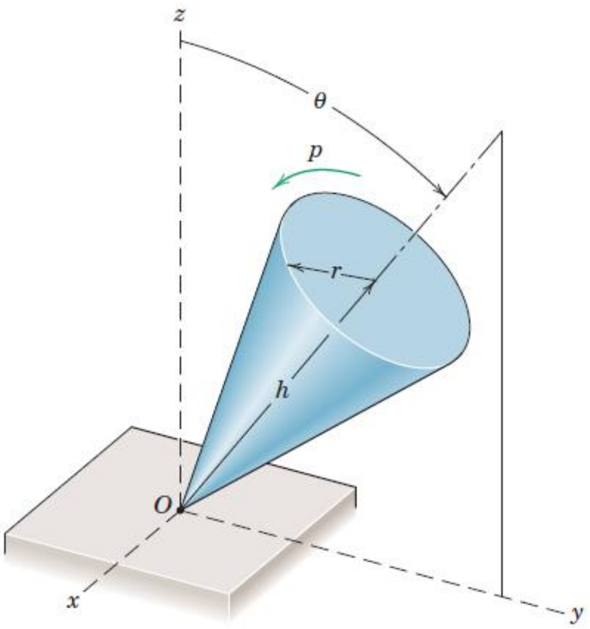
៥៥. កោន 10 kg វិលជុំវិញខ្លួនឯង នៅអត្រាថេរ $\omega_s = 150\text{rad/s}$ ។

ក. ចូរកំណត់អត្រាថេរ ω_p ដែលវាកៀសមុំ precession បើ $\phi = 90^0$ ។

ខ. ចូរកំណត់អត្រាថេរ ω_p ដែលវាកៀសមុំ precession បើ $\phi = 30^0$ ។



(លំហាត់៥៥)



(លំហាត់៥៦)

៥៦. អង្គធាតុរាងកោនមានម៉ាស m កាំបាត r និងកម្ពស់ h ត្រូវបានវិលជុំវិញខ្លួនឯងនៅអត្រាខ្ពស់ p វិលជុំវិញអ័ក្សរបស់វា ហើយត្រូវបានលែងជាមួយកំពូលរបស់វា O ត្រូវបានទ្រដោយផ្ទៃដេក។ កកិតគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីការពារកំពូលពីការរអិលនៅក្នុងប្លង់(xy)។ ចូរកំណត់ទិស precession Ω និងខួប T នៃរង្វិលមួយជុំ ជុំវិញអ័ក្សឈរ z។

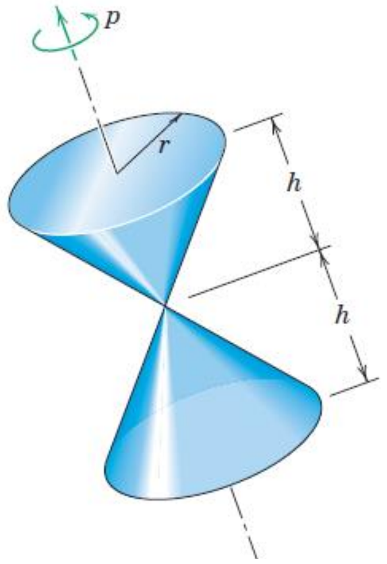
៥៧. ឧបករណ៍មានម៉ាស 90 g ផ្ចិតម៉ាស G និងកាំ gyration k = 18 mm វិលជុំវិញអ័ក្សស៊ីមេទ្រីរបស់វា។ វិលជុំវិញអ័ក្សទទឹងដែលមានអំពើកាត់ចំណុច O កាំ gyration គឺ k_t = 35 mm ។ បើឧបករណ៍ត្រូវបានភ្ជាប់ទៅចំណុចវិលត្រង់ O និង precession គឺ $\omega_p = 0.5 \text{rad/s}$ ចូរកំណត់ស្ពីន $\vec{\omega}_s$ ។

៥៨. កោនស្មើសាច់ពីរ នីមួយៗមានម៉ាស m កំពូលជាប់គ្នាបង្កើតជាអង្គធាតុមួយ ហើយវិលជុំវិញខ្លួនឯង ជុំវិញអ័ក្សរបស់ពួកវានៅអត្រា p = 200 ជុំក្នុងមួយនាទី។

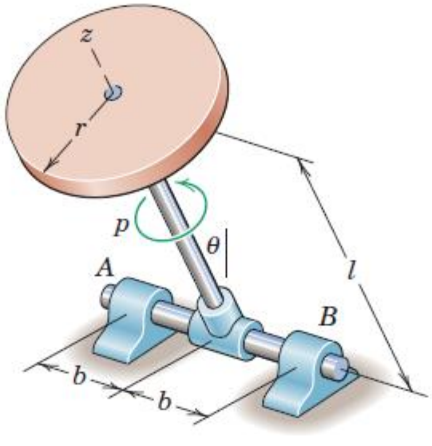
ក. ចូរកំណត់ផលធៀប h/r ដែលអ័ក្សរង្វិលមិន precession។

ខ.ចូរគូសក្រាបទីតាំង និងកោនសម្រាប់ករណីដែល h/r តូចជាងផលធៀបកម្រិត។

គ. ចូរគូសក្រាបទីតាំង និងកោន នៅពេល h = r ហើយល្បឿន precession គឺ $\dot{\psi} = 18 \text{rad/s}$ ។



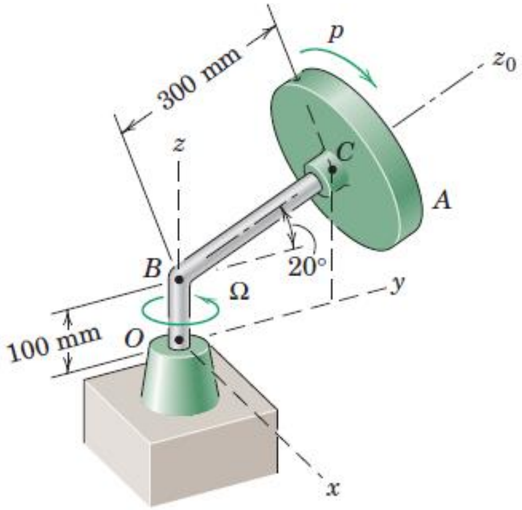
(លំហាត់៥៨)



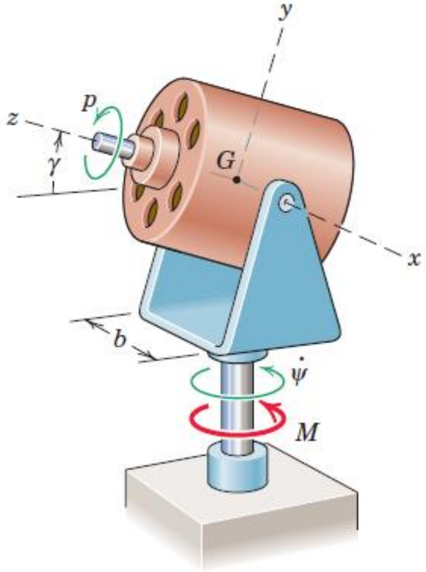
(លំហាត់៥៩)

៥៩. ថាសមានម៉ាស m និងកម្រាស់មិនគិតត្រូវបានវិលជុំវិញខ្លួនឯងដោយសេរីជុំវិញដងជាអត្រាp។ បើប្រព័ន្ធត្រូវបានលែងនៅក្នុងទីតាំងឈរនៅ $\theta = 0$ ជាមួយ $\dot{\theta} = 0$ ចូរកំណត់កុំប៉ូសង់ដេកនៃកម្លាំងត្រង់AនិងB អនុវត្តន៍ដោយទម្រលើដងដេក នៅពេលទីតាំងមុំ$\theta = \pi / 2$ ។ មិនគិតម៉ាសនៃដងទាំងពីរ និងកកិត។

៦០. ថាស 5kg និងចំណុច A មានកាំ gyration 85mm វិលជុំវិញអ័ក្ស z_0 និងស្ថិននៅអត្រា p = 1250 ជុំក្នុងមួយនាទី។ ដំណាលគ្នានោះ ប្រព័ន្ធវិលជុំវិញអ័ក្ស z នៅអត្រា $\Omega = 400$ ជុំក្នុងមួយនាទី។ ចូរគណនា ម៉ូម៉ង់ gyroscopic $\overrightarrow{M}$ អនុវត្តលើដងត្រង់ C ដោយថាសនិងម៉ូម៉ង់ពឹង $\overrightarrow{M}_O$ នៅក្នុងដងត្រង់ O។ មិនគិតម៉ាសនៃដង ប៉ុន្តែរាប់បញ្ចូលគ្រប់កម្លាំងមានអំពើលើវា។



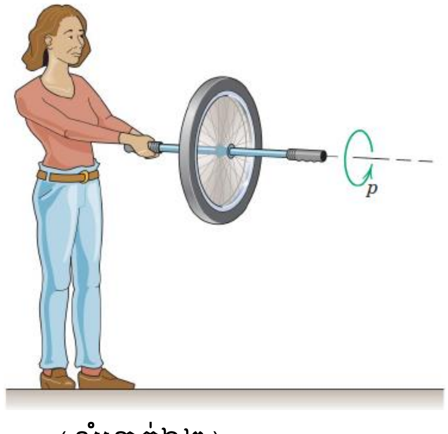
(លំហាត់៦០)



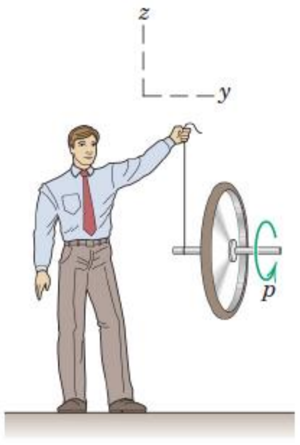
(លំហាត់៦១)

៦១. ម៉ូទ័រអគ្គិសនីត្រូវបានដាក់ឱ្យវិលសេរីជុំវិញអ័ក្សដេក x ដែលកាត់តាមផ្ចិតម៉ាស G នៃរ៉ូទ័រ។ បើម៉ូទ័រវិលនៅអត្រាថេរ $\dot{\phi} = p$ ចូរកំណត់សំទុះមុំ $\ddot{\psi}$ ដែលលលទ្ធផលបានមកពីការអនុវត្តន៍នៃម៉ូម៉ង់ M វិលជុំវិញដង បើ $\dot{\gamma} = \dot{\psi} = 0$។ ម៉ាសទាំងអស់មិនគិតបើធៀបទៅនឹងម៉ាស m នៃរ៉ូទ័រ។ កាំgyration នៃរ៉ូទ័រជុំវិញអ័ក្ស z គឺ k_z និងជុំវិញអ័ក្ស x គឺ k_x។

៦២. និស្សិតម្នាក់បានធ្វើការស្ម័គ្រចិត្តដើម្បីជំនួយដល់គ្រូនៅក្នុងថ្នាក់រៀនបានបង្ហាញពីការពាក់ព័ន្ធនូវបរិមាណចលនាកង់ដែលវិលជុំវិញខ្លួនឯងយ៉ាងលឿនជាមួយល្បឿនមុំ p ដូចបង្ហាញ។ លោកគ្រូបានសួរទៅនាងដែលកាន់អ័ក្សកង់ក្នុងទីតាំងដេកដូចបង្ហាញ និងចង់ផ្អៀងអ័ក្សទៅលើក្នុងប្លង់ឈរ។ តើទំនោរចលនានៃប្រព័ន្ធកង់នឹងធ្វើឱ្យអារម្មណ៍នាងដឹងអ្វី?



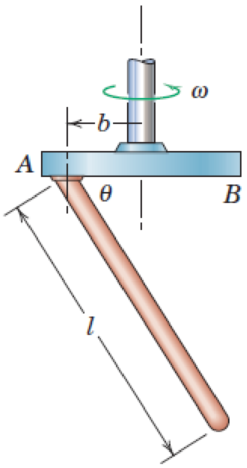
(លំហាត់៦២)



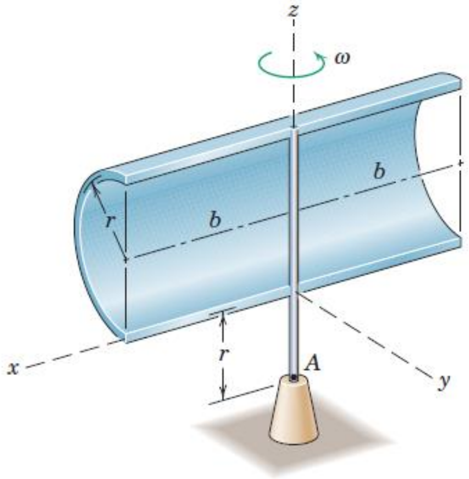
(លំហាត់៦៣)

៦៣. លោកគ្រូរូបវិទ្យាបានបង្ហាញគោលការណ៍ gyroscope ទៅនឹងនិស្សិតរបស់គាត់។ គាត់កាន់ព្យួរ កង់វិលជុំវិញខ្លួនឯងយ៉ាងលឿនជាមួយខ្សែកងភ្ជាប់ទៅចុងម្ខងនៃអ័ក្សដេក។ ចូរពណ៌នា ចលនា precession នៃកង់។

៦៤. ដងស្មើសាច់មានប្រវែង l ត្រូវបានផ្សារភ្ជាប់ទៅដង្កៀបត្រង់ A លើផ្នែកខាងក្រោមនៃថាស B។ ថាសវិលជុំវិញអ័ក្សឈរជាមួយល្បឿនមុំថេរ ω ។ ចូរកំណត់តម្លៃ ω ដែលនឹងឱ្យលទ្ធផលក្នុងម៉ូម៉ង់សូន្យទ្រដោយការផ្សារនៅត្រង់ A សម្រាប់ទីតាំង $\theta = 60^0$ ជាមួយ $b = l/4$ ។

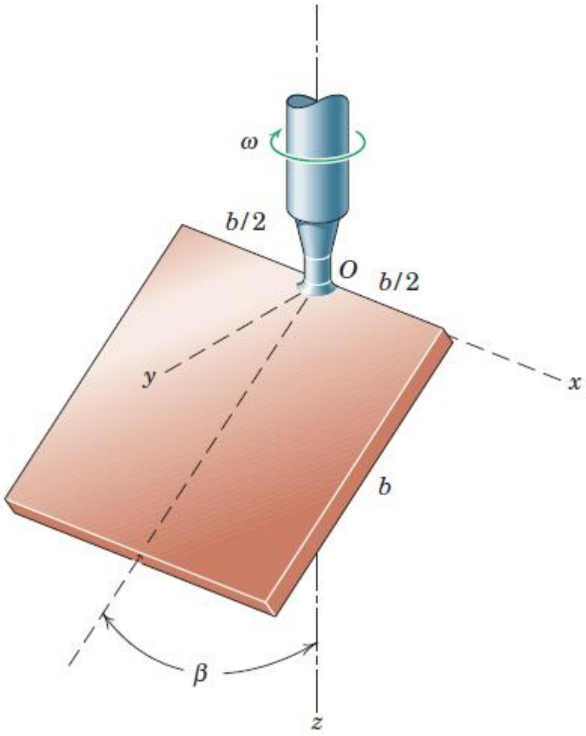


(លំហាត់៦៤)

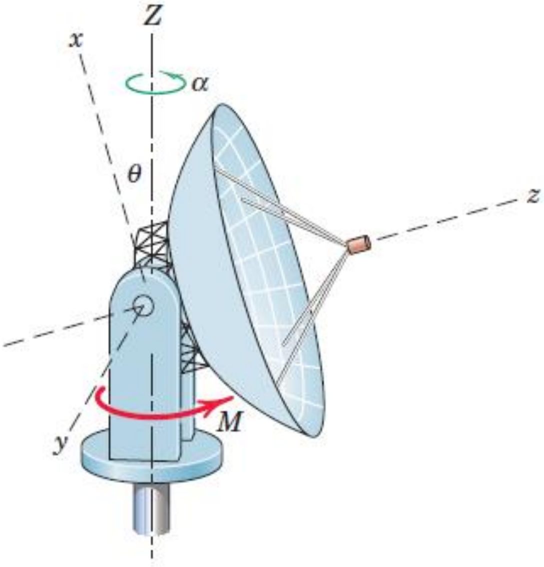


(លំហាត់៦៥)

៦៥. បន្ទះរាងការេស្មើសាច់មានម៉ាស m ត្រូវបានផ្សារភ្ជាប់នៅត្រង់ O ទៅនឹងចុងនៃដង ដែលវិលជុំវិញអ័ក្សឈរ z ជាមួយល្បឿនមុំថេរ ω។ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់អនុវត្តទៅលើបន្ទះដោយតំណផ្សារបណ្ដាលមកពីតែរង្វិល។



(លំហាត់៦៥)

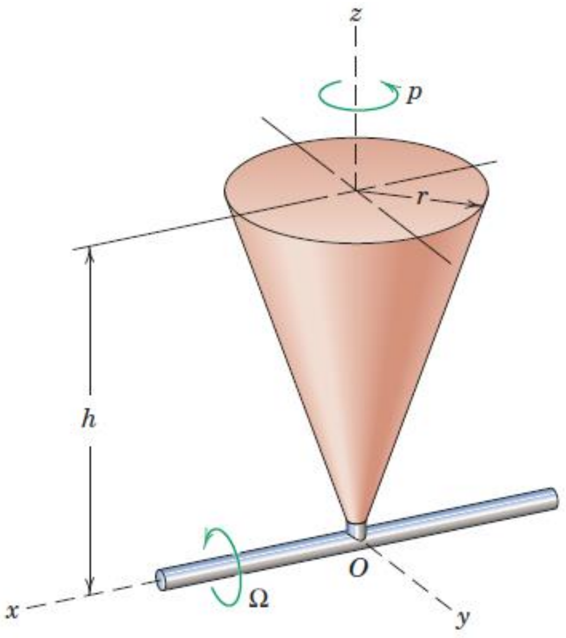


(លំហាត់៦៦)

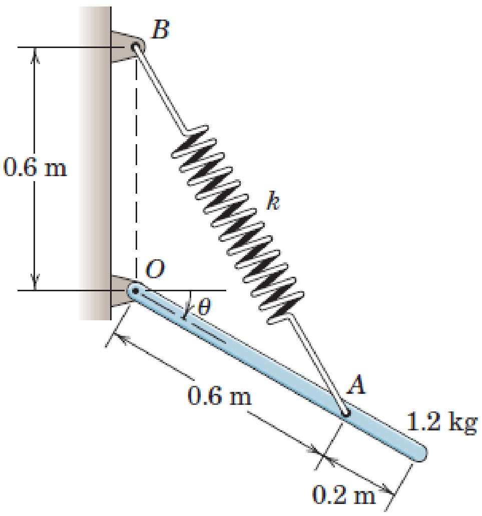
៦៦. អង់តែនផ្កាយរណបធំមានម៉ូម៉ង់និចលភាព I វិលជុំវិញអ័ក្ស z របស់វាស៊ីមេទ្រី និងម៉ូម៉ង់និចលភាព I_O វិលជុំវិញអ័ក្សនីមួយៗ x និង y។ ចូរកំណត់សំទុះមុំ α នៃអង់តែនជុំវិញអ័ក្សឈរ Z ដែលបណ្តាលដោយម៉ូម៉ង់អនុវត្តវិលជុំវិញ Z ដោយយន្តការនាំសម្រាប់ទិសដៅដែលឱ្យ θ ។

៦៧. សំបកកន្លះស៊ីឡាំងមានកាំ r ប្រវែង $2b$ និងម៉ាស m វិលជុំវិញអ័ក្សឈរ z ជាមួយល្បឿនមុំថេរដូចបង្ហាញ។ ចូរកំណត់តម្លៃ M នៃម៉ូម៉ង់ពឹងនៅក្នុងដងត្រង់ A បណ្តាលមកពីទម្ងន់ និង ចលនារង្វិលនៃសំបក។

៦៨. កោនមានកម្ពស់ h និងកាំបាត r វិលជុំវិញខ្លួនឯងជុំវិញអ័ក្សរបស់វាជាមួយអត្រាមុំ p។ ដំណាលគ្នានោះ កោនទាំងមូលវិលជុំវិញអ័ក្សជាមួយអត្រាមុំ Ω។ ចូរកំណត់ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច $\vec{L}_O$ នៃកោនវិលជុំវិញគល់ O នៃអ័ក្ស x, y, z និងថាមពលស៊ីនេទិចចំពោះទីតាំងបង្ហាញ។ ម៉ាសនៃកោនគឺ m ។



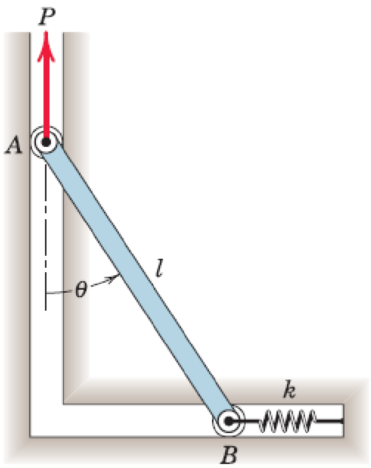
(លំហាត់៦៨)



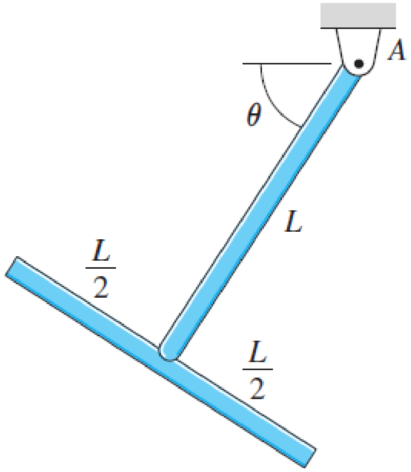
(លំហាត់៦៩)

៦៩. របារស្មើសាច់ 1.2 kg ត្រូវបានលែងពីនៅស្ងៀមនៅទីតាំង $\theta = 0$ ដែលរ៉ឺស័រមិនទាន់ខូចរាង ចូរកំណត់និងគូសក្រាបល្បឿនមុំជាអនុគមន៍នៃ θ លើលំដាប់ $0 \le \theta \le \theta_{\max}$ ដែល $\theta_{\max}$ ជាតម្លៃនៃ θ ដែលរបារទៅនៅនឹង។ ថេរកម្រាញរ៉ឺស័រគឺ $k = 100\text{N/m}$ និងមិនគិតកកិត។ ចូរបង្ហាញថាមុំអតិបរមា និងតម្លៃ θ ដែលវាកើតឡើង។

៧០. របារស្មើសាច់មានម៉ាស m បង្ហាញដូចរូប វានៅស្ងៀមមុនកម្លាំង $\vec{P}$ ត្រូវបានអនុវត្ត។ ចូរគណនាសំទុះមុំដើមនៃរបារអាស្រ័យលើការអនុវត្តន៍កម្លាំង $\vec{P}$ ។



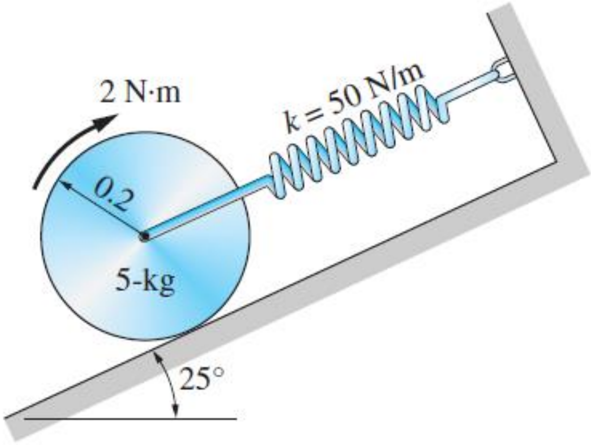
(លំហាត់៧០)



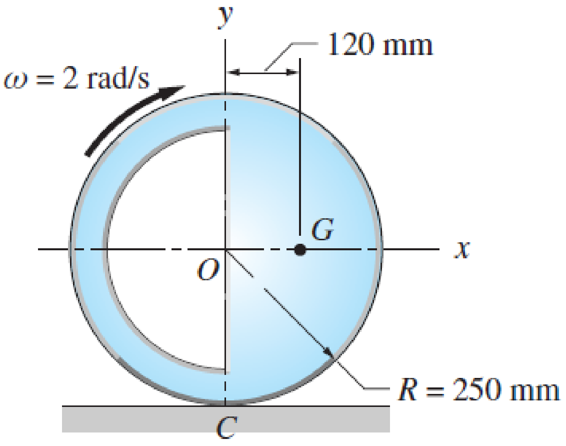
(លំហាត់៧១)

៧១. សំណុំមានម៉ាសសរុប m ត្រូវបានផ្សារភ្ជាប់គ្នាដោយរបារពីរឯកលក្ខណ៍ ហើយនីមួយៗមានប្រវែង L ។ បើប្រព័ន្ធត្រូវបានលែងពីនៅស្ងៀម នៅពេល $\theta=0$ ចូរកំណត់ល្បឿនមុំរបស់វា និងសំទុះមុំនៃប្រព័ន្ធជាអនុគមន៍នៃមុំ θ ។

៧២. ម៉ូម៉ង់បង្វិលថេរ 2 Nm មានអំពើលើថាសស្មើសាច់ដែលរមៀលមិនរអិលចុះតាមប្លង់ទេរ។ ចូរកំណត់បន្លាស់ទីរបស់ថាស (វាស់ពីទីតាំងដែលរ៉ឺស័រមិនទាន់ខូចរាង) ដែលកម្មន្តសរុបបានបំពេញលើថាសគឺសូន្យ។



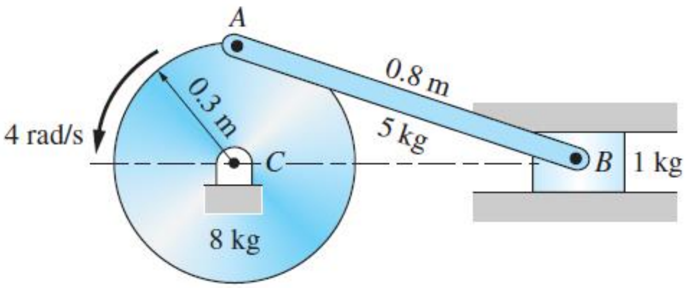
(លំហាត់៧២)



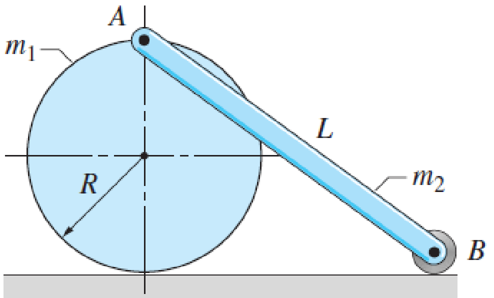
(លំហាត់៧៣)

៧៣. កង់ 60 kg រមៀលមិនរអិលលើប្លង់ដេក។ កាំ gyration នៃកង់វិលជុំវិញផ្ចិតម៉ាសGរបស់វាគឺ 240 mm ។ ចូរគណនាថាមពលស៊ីនេទិចនៃកង់នៅក្នុងទីតាំងដូចបង្ហាញ ដែលល្បឿនមុំរបស់វាគឺ $\omega=2\text{rad/s}$ ។

៧៤. ចុង A នៃរបារស្មើសាច់ AB ត្រូវបានចោះដាក់កន្លាស់ទៅនឹងថាសស្មើសាច់ និងចុង B ត្រូវបានភ្ជាប់ទៅជុំរអិល 1 kg ។ នៅក្នុងទីតាំងដូចបង្ហាញ ថាសវិលតាមទិសដៅផ្ទុយទ្រនិចនាឡិកាជាមួយល្បឿនមុំ $\omega=4\text{rad/s}$ ។ ចូរគណនាថាមពលស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធនៅក្នុងទីតាំងនេះ។



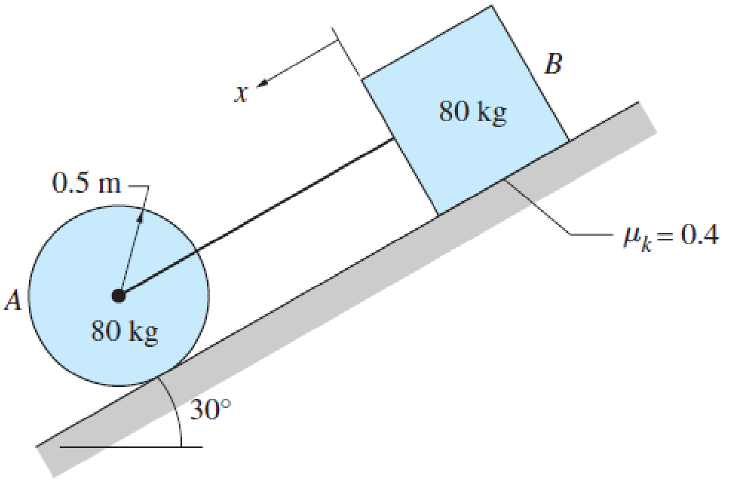
(លំហាត់៧៤)



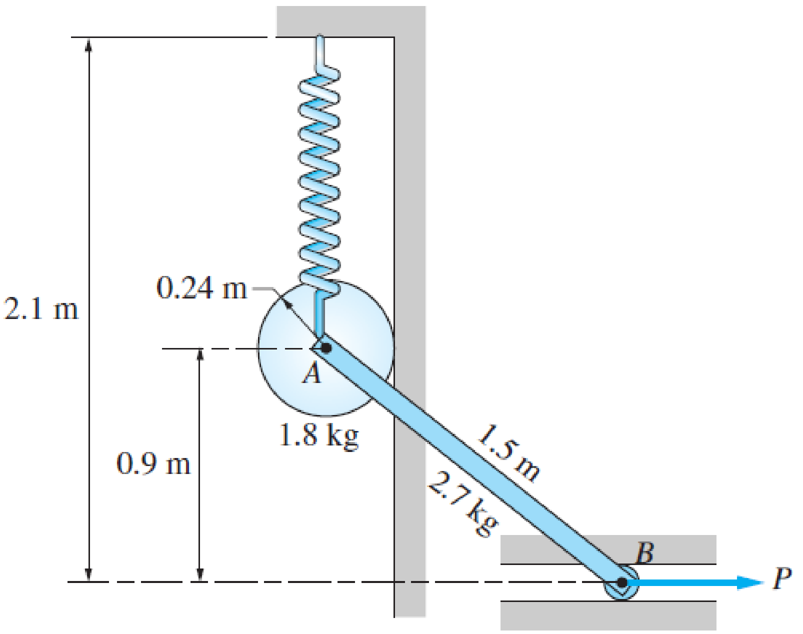
(លំហាត់៧៥)

៧៥. របារស្មើសាច់មានម៉ាស m_2 ត្រូវបានបោះរន្ធដាក់កន្លាស់ទៅនឹងគែមខាងនៃថាសស្មើសាច់មានម៉ាស m_1 ។ ប្រព័ន្ធត្រូវបានបន្លាស់ទីថ្នមៗពីទីតាំងដូចបង្ហាញ និងត្រូវបានលែងពីនៅស្ងៀម។ ចូររកល្បឿនមុំអតិបរមានៃថាស។ សន្មតថារមៀលមិនរអិល។

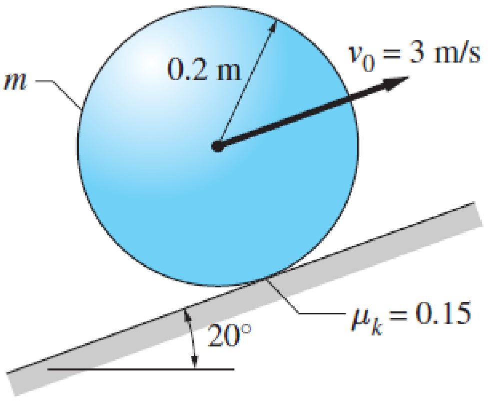
៧៦. ថាស A ស្មើសាច់មានម៉ាស 80 kg ត្រូវបានភ្ជាប់ដោយខ្សែកាបទៅដុំ B មានម៉ាស 80 kg ។ មេគុណកកិតស៊ីនេទិចរវាងដុំ និងផ្ទៃប្លង់ទេរគឺ 0.4 ។ បើប្រព័ន្ធត្រូវបានលែងពីនៅស្ងៀម នៅពេល $x=0$ ចូរកំណត់នៅពេលល្បឿនដុំ 5m/s ។ សន្មតថា ថាសរមៀលមិនរអិល។



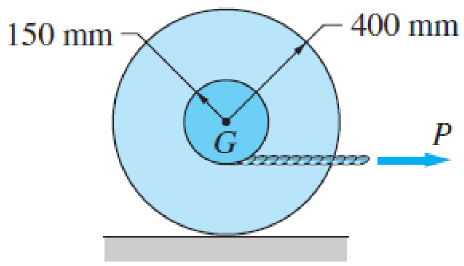
៧៧. ចុង B នៃរបារ AB មានម៉ាស 2.7 kg ត្រូវបានភ្ជាប់កង់តូចដែលចលនាក្នុងចង្អូរដេក។ ចុងមួយទៀតនៃរបារត្រូវបានបោះដាក់កន្លះទៅនឹងថាសស្មើសាច់ 1.8 kg ដែលរមៀលមិនរអិលលើផ្ទៃឈរ។ រ៉ឺស័រដែលភ្ជាប់ទៅ A មានប្រវែងដើម 0.3 m និងថេរកម្រាញ 58 N/m ។ បន្ទាប់មកប្រព័ន្ធត្រូវបានលែងពីនៅស្ងៀមក្នុងទីតាំងដូចបង្ហាញ ល្បឿននៃ A គឺ 3 m/s នៅពេល AB ទៅជាដេក។ ចូរកំណត់តម្លៃនៃកម្លាំង $\vec{P}$ ដែលមានអំពើលើរបារត្រង់ B ។



៧៨. បាល់ស្មើសាច់មានម៉ាស m ត្រូវបានចោលលើប្លង់ទេរនៅខណៈ t = 0 ជាមួយល្បឿន 3 m/s និងគ្មានស្ពី។ មេគុណកកិតស៊ីនេទិចរវាងបាល់និងប្លង់គឺ 0.15។ ចូរគណនាពេល នៅពេលដែលបាល់ឈប់អិលលើប្លង់ និងល្បឿនមុំនៃបាល់នៅខណៈនោះ។



(លំហាត់៧៨)

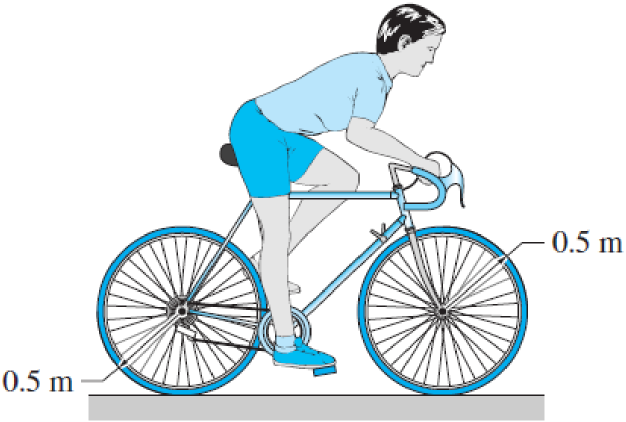


(លំហាត់៧៩)

៧៩. ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃហុង 60 kg វិលជុំវិញផ្ចិតម៉ាស G របស់វាគឺ $1.35\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$។ ហុងនៅស្ងៀមលើផ្ទៃដេកនៅពេលកម្លាំងថេរ P = 200 N ត្រូវបានអនុវត្តទៅខ្សែកាបដែលរុំជុំវិញដុំ(កង់តូច)។ ចូរគណនាល្បឿនមុំនៃហុងក្នុងពេលពីរវិនាទីក្រោយមក សន្មតថា មេគុណកកិតស្តាទិចក៏ដូចជាស៊ីនេទិចដែររវាងហុងនិងផ្ទៃគឺ៖

ក. $\mu = 0.2$ ខ. $\mu = 0.1$

៨០. បូកម៉ាសនៃអ្នកជិះកង់ និងតួកង់ដោយមិនគិតកង់(កង់វិល)គឺ 80 kg ។ កង់នីមួយៗមានម៉ាស 3 kg ។ បើអ្នកជិះកង់ចាប់ផ្តើមពីនៅស្ងៀម ចូរកំណត់ល្បឿនរបស់វាបន្ទាប់ពី 10 s ក្រោយមក ដោយសន្មតថា ប្រវាក់ផ្តល់ម៉ូម៉ង់បង្វិលថេរ 20 Nm លើលីបកង់ និងកង់មិនរអិលលើដី។



ជំពូក២០ ការីឡាក្រង់ និងហាមីលតុន

Lagrangian and Hamiltonian

គោលបំណង

- បង្ហាញការីឡាក្រង់ និងការីហាមីលតុង ព្រមទាំងរបៀបបង្កើតសមីការឡាក្រង់។
- បង្ហាញរបៀបដោះស្រាយចំណោទមេកានិចដោយគ្រាន់តែស្គាល់ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល និងថាមពលស៊ីនេទិច។
- ផ្តល់ការអនុវត្តការីឡាក្រង់នៅក្នុងអេឡិចត្រូម៉ាញេទិច។

ចលនានៃភាគល្អិតមួយ និងលក្ខណៈទូទៅនៃប្រព័ន្ធរូបធាតុ ត្រូវបានសិក្សាចេញពីអ្នកបង្កើតនិយម ត្រូវបាននិយាយវិភាគអភិវឌ្ឍន៍ដោយអ្នកគណិតវិទ្យាអ៊ីតាលី បារាំង A. Lagrange និងអ្នករូបវិទ្យា W. Hamilton។ អ្នកបង្កើតនិយមនេះបានដាក់គោលការណ៍លើស្កាលែអនុគមន៍ពីរដែលមានវិមាត្រជាថាមពលៈ ការីឡាក្រង់ L និង ការីហាមីលតុន H។ គោលការណ៍សំខាន់របស់វាពង្រីកនៅក្នុងមេកានិច និងរូបវិទ្យាផ្សេងទៀតដូចជាអុបទិច រូបវិទ្យាកង់ទិច។ល។

1. ការីឡាក្រង់និងសមីការឡាក្រង់

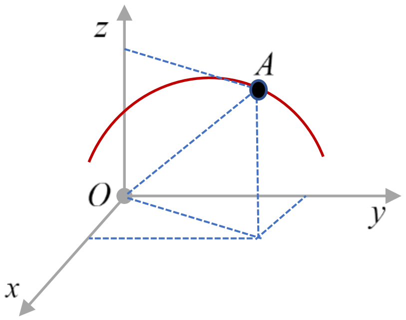
1.1. លំហនៃសណ្ឋានរូប

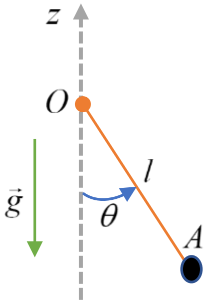
យើងពិនិត្យ ប្រព័ន្ធរូបធាតុដែលមានទីតាំងត្រូវបានកំណត់ដោយ n អថេរមិនអាស្រ័យ ឬ ដឺក្រេសេរី $q_1, q_2, ..., q_i ..., q_n$ កំណត់ដោយ $\{q_i\}$។ លំហនៃសណ្ឋានរូបជាលំហមាន n វិមាត្រដែលទីតាំងនៃប្រព័ន្ធត្រូវតាងដោយចំណុចមានកូអរដោនេ $\{q_i\}$។ នៅពេលចំណុចនេះគូសគន្លងនៅក្នុងលំហនេះ។

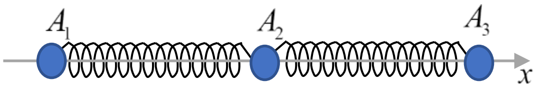
ចំពោះចំណុចរូបធាតុធ្វើចលនានៅក្នុងលំហរូបវិទ្យាជាទំលាប់ លំហនៃសណ្ឋានរូបត្រូវបានបញ្ជាក់លំហនេះដូចរូបក។ ផ្ទុយមកវិញ វាមិនដូចគ្នា ចំពោះប៉ោលទោលដែលមានទីតាំងរបស់វាចរិកលក្ខណៈដោយមុំ θ ដែលផ្គុំជាមួយទិសឈរដូចរូបខ ឬចំពោះសំណុំនៃចំណុចភាគល្អិតបីចលនាលើអ័ក្ស 0x ដូចគ្នា រូបគ។

ចំពោះប្រព័ន្ធមួយកើតពី N ភាគល្អិត ដោយចលនាណាមួយ មួយធៀបមួយផ្សេងទៀត ចំនួនដឺក្រេសេរីគឺ $n = 3N$ ។ ដូចនេះលំហនៃសណ្ឋានរូបនៅក្នុងករណីនេះ 3N វិមាត្រ។

យើងរំលឹកថា ចំណុចមួយនៃលំហសណ្ឋានរូបកំណត់ទីតាំងប្រព័ន្ធ និងមិនមែនភាពមេកានិចរបស់វា ម្យ៉ាងទៀត ការស្គាល់សំណុំនៃល្បឿន ឬបរិមាណចលនា។







1.2. ការឡាក្រង់

ក. និយមន័យ

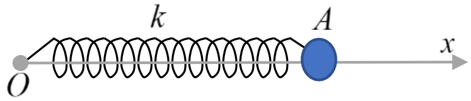
យើងពិនិត្យប្រព័ន្ធចំណុចរូបធាតុធ្វើចលនាធៀបទៅនឹងតម្រុយកាលីលេ ℜ ក្រោមអំពើនៃកម្លាំងក្រៅ និងកម្លាំងក្នុងដែលចេញពីថាមពលប៉ូតង់ស្យែលសរុប។ ក្នុងជំពូកនេះ យើងតាងថាមពលស៊ីនេទិចដោយ T និងថាមពលប៉ូតង់ស្យែលដោយ V ។ ការីឡាក្រង់នៃប្រព័ន្ធជាអនុគមន៍អាស្រ័យប៉ារ៉ាម៉ែតទីតាំង $\{q_i\}$ ដេរីវេរបស់វាធៀបនឹងពេល $\{\dot{q}_i\}$ គឺ $L = T - V$ ។

ចំណាំ៖ និយមន័យនេះមានតម្លៃតែនៅក្នុងមេកានិចញូតុន ហើយចំពោះភាគល្អិតផ្ទុកបន្ទុកដែលមិនអន្តរកម្មម៉ាញេទិច។ ជាការពិត ការីឡាក្រង់ត្រូវបានបង្កើតឡើងនៅពេលភាគល្អិតផ្ទុកបន្ទុក ចូលទៅក្នុងដែនអេឡិចត្រូម៉ាញេទិច មានតួបន្ថែម $L = T - V + q\vec{v}\cdot\vec{A}$ ដែល q ជាបន្ទុកអគ្គិសនី $\vec{v}$ ជាល្បឿន និង $\vec{A}$ វ៉ិចទ័រប៉ូតង់ស្យែល។

ខ. ឧទាហរណ៍

ឧទាហរណ៍១៖ ការីឡាក្រង់នៃលំយោលអាម៉ូនិចមួយវិមាត្រ៖

ថាមពលស៊ីនេទិច $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$



ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V = \frac{1}{2}k\,x^2$

ការីឡាក្រង់ $L = T - V$

$$L(\dot{x}, x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k\,x^2$$

x ជាសាច់លូតនៃរ៉ឺស័រមានថេរកម្រាញ k

ឧទាហរណ៍២៖ ការីឡាក្រង់នៃចំណុចរូបធាតុក្នុងចលនាទន្លាក់សេរី

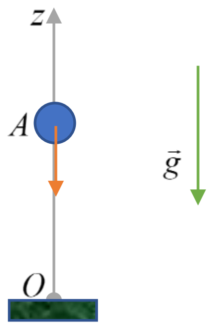
ថាមពលស៊ីនេទិច $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V = mgz$

ការីឡាក្រង់ $L = T - V$

$$L(\dot{z}, z) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$$

z ជាកូអរដោនេតាមទិសឈរទិសដៅឡើងលើ។



ឧទាហរណ៍៣៖ ការីឡាក្រង់នៃប៉ោលទោល

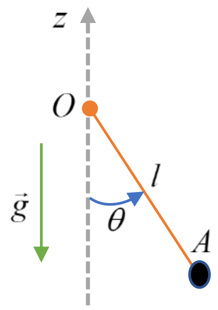
ថាមពលស៊ីនេទិច $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V = mgz = -mg\ell\cos\theta$

ការីឡាក្រង់ $L = T - V$

$$L(\dot{\theta}, \theta) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta$$

θ ជាមុំផ្តុំឡើងប៉ោលជាមួយទិសឈរ ទិសដៅចុះក្រោម។



1.3. សមីការឡាក្រង់

ក. ម៉ូម៉ង់ឆ្លាស់

ម៉ូម៉ង់ឆ្លាស់ p_i (កើតពីអថេរ q_i)ជាបរិមាណដូចតទៅ៖ $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

ចំពោះចំណុចរូបធាតុក្នុងចលនាទន្លាក់សេរី ម៉ូម៉ង់ឆ្លាស់គឺ $p_z = m\dot{z}$ គឺជាបរិមាណចលនាដែលមាននាមថាម៉ូម៉ង់លីនេអ៊ែ។

ចំពោះប៉ោលទោល ម៉ូម៉ង់ឆ្លាស់គឺ $p_\theta = m\ell^2\dot{\theta}$ នេះជាម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចរបស់វាដែលមាននាមថាម៉ូម៉ង់មុំ។

ខ. កន្សោមសមីការឡាក្រង់

សមីការឡាក្រង់នៃប្រព័ន្ធក្រោមអំពើតែកម្លាំងដែលចេញពីថាមពលប៉ូតង់ស្យែលគឺ n សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមចលនានៃប្រព័ន្ធមាន n ប៉ារ៉ាម៉ែតនៃសណ្ឋានរូប៖

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \text{ឬ} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

គេអាចឱ្យសមីការទាំងនេះ ចេញពីច្បាប់គ្រឹះឌីណាមិច ដែលអនុវត្តន៍លើចំណុចរូបធាតុនីមួយៗនៃប្រព័ន្ធ។ ការពន្យល់បង្ហាញសង្កត់ធ្ងន់លើសញ្ញាណនៃបន្លាស់ទីនិមិត និងកម្មន្តនិមិតនៃកម្លាំង។

នៅក្នុងការបង្ហាញនេះ យើងទទួលស្គាល់សមីការឡាក្រង់ដូចយើងបានទទួលស្គាល់ច្បាប់គ្រឹះឌីណាមិច ដើម្បីអភិវឌ្ឍន៍មេកានិចក្រោមទម្រង់វិចទ័រ។

គ. ឧទាហរណ៍

ឧទាហរណ៍៤៖ លំយោលអាម៉ូនិចក្នុងមួយវិមាត្រ

ដោយសារ $L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$ នោះ $p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$ និង $\frac{\partial L}{\partial x}=-k\,x$

សមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$

$\Rightarrow \frac{d(m\dot{x})}{dt}+kx=0$ ឬ $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$

សមីការមានទម្រង់ $\ddot{x}+\omega_0^2x=0$, $\omega_0^2=\frac{k}{m}$

ឧទាហរណ៍៥៖ ប៉ោលទោល

ដោយសារ $L=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2+mg\ell\cos\theta$, $p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=m\ell^2\dot{\theta}$ និង $\frac{\partial L}{\partial \theta}=-mg\ell\sin\theta$

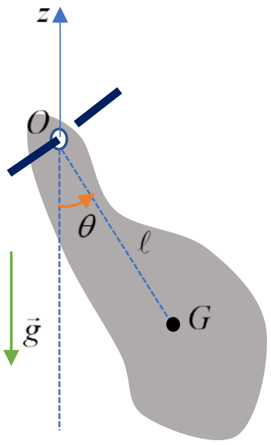
សមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$

យើងបាន $m\ell^2\ddot{\theta}+mg\ell\sin\theta=0$

ករណីលំយោលតូច $\sin\theta=\theta(\text{rad})$

$\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\theta=0$ សមីការមានទម្រង់ $\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$ ដោយ $\omega_0^2=\frac{g}{\ell}$

ឧទាហរណ៍៦៖ ប៉ោលទម្ងន់។



ថាមពលស៊ីនេទិច (ចលនារង្វិល) $T=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$, I ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃប៉ោលទម្ងន់វិលជុំវិញអ័ក្សរង្វិល។

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V=mgz=-mg\ell\cos\theta$

កាឡាក្រង់ $L=T-V$

$$L=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+mg\ell\cos\theta$$

ម៉ូម៉ង់ឆ្លាស់ $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta}$ និង $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell \sin\theta$

សមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(I\dot{\theta}\right) + mg\sin\theta = 0 \quad \text{ឬ} \quad I\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0$$

ករណីលំយោលតូច $\sin\theta = \theta(\text{rad})$

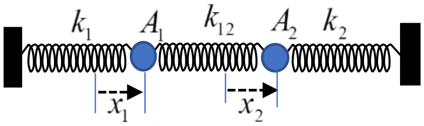
$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{I}\theta = 0$ មានទម្រង់ $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ ជាមួយ $\omega_0^2 = \frac{mg\ell}{I}$

ឧទាហរណ៍៧៖ លំយោលករយឺតជាអន្តរកម្ម។

ថាមពលស៊ីនេទិចនៃប៉ោលយឺតពីរដេកមានកន្សោម៖ $T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$

x_1 និង x_2 ជាកូអរដោនេនៃម៉ាសធៀបទៅនឹងទីតាំងលំនឹងរបស់វា។ ចំណែកឯ ថាមពលប៉ូតង់ស្យែលនៃភាពយឺតគឺ

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k_{12}\left(x_2 - x_1\right)^2$$



កាឡាក្រង់ $L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2x_2^2 - \frac{1}{2}k_{12}\left(x_2 - x_1\right)^2$

ជាលទ្ធផលម៉ូម៉ង់ឆ្លាស់ទាំងពីរ និងសមីការឡាក្រង់ទាំងពីរដែលទាក់ទងគឺ៖

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2 \quad \text{និង} \quad \dot{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial x_1} \quad \dot{p}_2 = \frac{\partial L}{\partial x_2}$$

ដោយបញ្ចូលសមីការទាំងពីរ យើងបាន៖

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_{12}\left(x_2 - x_1\right) \quad \text{និង} \quad m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 + k_{12}\left(x_1 - x_2\right)$$

ចលនានៃលំយោលករគូយឺត។

ឧទាហរណ៍៨៖ ភាគល្អិតមួយកំពុងធ្វើចលនា នៅក្នុងប៉ូតង់ស្យែល $v(x) = \alpha x^3$ ដែល α ជាចំនួនថេរ។ ចូររកសមីការចលនាចំពោះប្រព័ន្ធ។

ដំណោះស្រាយ

ថាមពលស៊ីនេទិច $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

ការីឡាក្រង់គឺ $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \alpha x^3$

ម្តងនេះ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$

ដូចនេះយើងរកឃើញថា $\frac{\partial L}{\partial x} = -3\alpha x^2$

សមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + 3\alpha x^2 = 0$ ជាសមីការចលនា។

ឧទាហរណ៍៩៖ ភាគល្អិតត្រូវបានភ្ជាប់ទៅកម្លាំងកាត់ផ្ចិតដោយកម្លាំងដែលប្រែប្រួលច្រាសគូបនៃចម្ងាយរបស់វាពីផ្ចិត។ ចូរបង្កើតសមីការចលនា និងដោះស្រាយវា ចំពោះគន្លង។ ចូរពីភាក្យា ប្រភេទធម្មជាតិនៃគន្លងអាស្រ័យប៉ារ៉ាម៉ែតនៃប្រព័ន្ធ។

ដំណោះស្រាយ

នៅពេលភាគល្អិតចលនាក្រោមកម្លាំងកាត់ផ្ចិត ចលនារបស់វាត្រូវបានបង្ខំនៅក្នុងប្លង់។ យើងប្រើកូអរដោនេប៉ូលែ នៅក្នុងប្លងនេះ ជាមួយគល់នៅកម្លាំងកាត់ផ្ចិត។ កម្លាំងមានទម្រង់៖

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^3}\vec{u}_r$$

ដែល k ជាថេរវិជ្ជមាន ថាមពលប៉ូតង់ស្យែលគឺ $V(r) = -\int_{\infty}^{r}\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\frac{k}{2r^2}$

ការីឡាក្រង់ $L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{k}{2r^2}$

សមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

នោះឱ្យ $mr^2\dot{\theta} = b$ (ថេរ) និង $m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{k}{r^3} = 0$

តាង $u = \frac{1}{r}$ (រូបមន្តប៊ីណេ)

$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{bu^2}{m}$ ហើយ $\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -\frac{b}{m}\frac{du}{d\theta}$

$\ddot{r} = -\frac{b}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{b^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}$

សមីការទី២ ក្លាយជា $\dfrac{d^2u}{d\theta^2}+\left(1-\dfrac{mk}{b^2}\right)u=0$

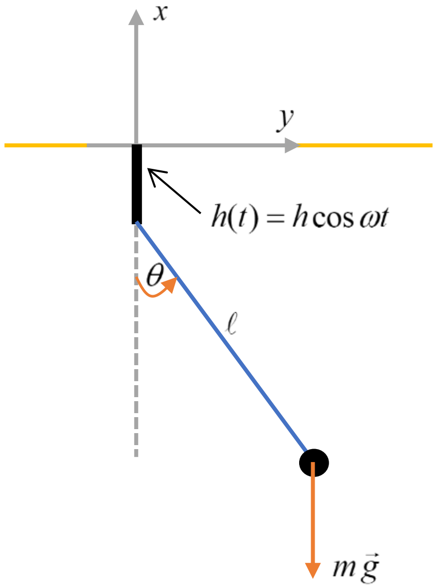
បើ $b^2>mk$ នោះ $u=\dfrac{1}{r_0}\cos\left[\sqrt{1-\dfrac{mk}{b^2}}(\theta-\theta_0)\right]$

ឬ $r\cos\left[\sqrt{1-\dfrac{mk}{b^2}}(\theta-\theta_0)\right]=r_0$

នៅទីនេះ (r_0,θ_0) ជាចំណុចនៅលើគន្លង។

ឧទាហរណ៍១០៖ ឥឡូវយើងពិនិត្យប៉ោលបួង់។ ប៉ោលត្រូវបានភ្ជាប់រំញ័រទ្រមានប្រេកង់មុំ ω ជាមួយអំព្លីទុត h។ ចូរសរសេរសមីការចលនាចំពោះមុំប៉ោល។

ដំណោះស្រាយ



យើងមាន៖ $h(t)=h\cos\omega t$

យើងបានកូអរដោនេ៖

$$x=\ell\sin\theta$$
$$y=-\ell\cos\theta-h\cos\omega t$$

ដូចនេះ៖

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(\ell\sin\theta)=\ell\dot{\theta}\cos\theta$$
$$\dot{y}=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(-\ell\cos\theta-h\cos\omega t)=\ell\dot{\theta}\sin\theta+\omega h\sin\omega t$$

ថាមពលស៊ីនេទិច៖

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2$$
$$=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}m\omega^2h^2\sin^2\omega t+m\ell\omega h\dot{\theta}\sin\theta\sin\omega t$$
$$=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\omega^2h^2\sin^2\omega t+m\ell\omega h\dot{\theta}\sin\theta\sin\omega t$$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែលគឺ៖ mgy ។ ក្នុងករណីនេះ

$$V=mgy=-mg\left(\ell\cos\theta+h\cos\omega t\right)$$

ការីឡាក្រង់គឺ៖ $L = T - V$

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2h^2\sin^2\omega t + m\ell\omega h\dot{\theta}\sin\theta\sin\omega t + mg(\ell\cos\theta + h\cos\omega t)$$

សមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

យើងបាន $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta} + m\ell\omega h\sin\theta\sin\omega t$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\ddot{\theta} + m\ell\omega^2h\sin\theta\cos\omega t + m\ell\omega h\dot{\theta}\cos\theta\sin\omega t$ និង

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m\ell\omega h\dot{\theta}\sin\omega t - mg\ell\sin\theta$

សមីការឡាក្រង់ ៖

$$m\ell^2\ddot{\theta} + m\ell\omega^2h\sin\theta\cos\omega t + m\ell\omega h\dot{\theta}\cos\theta\sin\omega t - m\ell\omega h\dot{\theta}\cos\theta\sin\omega t + mg\ell\sin\theta$$
$$= m\ell^2\ddot{\theta} + m\ell\omega^2h\sin\theta\cos\omega t + mg\ell\sin\theta = 0$$

សម្រួល m យើងបាន៖

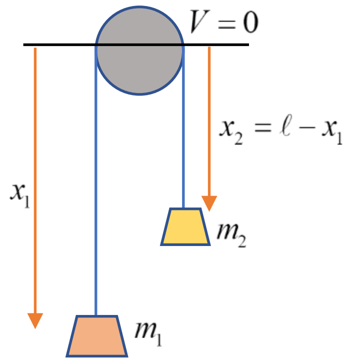
$$\ell^2\ddot{\theta} + \ell\omega^2h\sin\theta\cos\omega t + g\ell\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{\omega^2h\sin\theta}{\ell}\cos\omega t + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

ឧទាហរណ៍១១៖ ម៉ាស៊ីន Atwood ដូចបង្ហាញ។ វាមានម៉ាស m_1 និង m_2 ត្រូវបានព្យួរដោយខ្សែមិនគិតម៉ាស មិនយឺត គ្មានកកិត ម៉ាសរ៉កមិនគិត។ ចូរឱ្យការីឡាក្រង់ និងទទួលបានសមីការចលនា។

ដំណោះស្រាយ

ថាមពលស៊ីនេទិចគឺ៖ $T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$



និងថាមពលប៉ូតង់ស្យែលគឺ $V = -m_1g\,x_1 - m_2g\,x_2$

ដែលយើងជ្រើសរើស V=0 នៅផ្ចិតនៃរ៉ក។

ប្រព័ន្ធរងការរឹតត្បិត $x_1 + x_2 = \ell =$ ថេរ ។ ការីឡាក្រង់គឺ

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + m_1gx_1 + m_2gx_2$$

ប៉ុន្តែដោយប្រើ $x_2 = \ell - x_1$ យើងអាចសរសេរឡើងវិញនូវកាវឡាក្រង់ជាអនុគមន៍នៃអថេរទោល

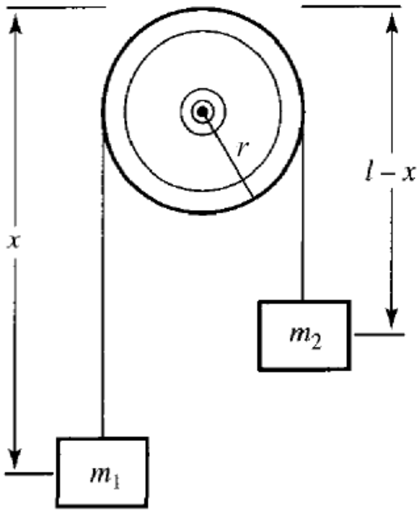
$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + m_1 g x_1 + m_2 g(\ell - x_1) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + (m_1 - m_2)g x_1 + m_2 g\ell$$

សមីការចលនាគឺ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m_1 + m_2)\dot{x}_1 - (m_1 - m_2)g = 0$

ដូចនេះសំទុះ៖ $\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$

ឧទាហរណ៍១២៖ ពិនិត្យម៉ាស៊ីន Atwood មានរ៉កមួយមានម៉ូម៉ង់និចលភាព I វិលជុំវិញអ័ក្សកាត់តាមផ្ចិតរបស់វា ហើយកែងទៅនឹងប្លង់របស់វា។ ប្រវែងខ្សែមិនយឺតត្រូវបានចងភ្ជាប់ម៉ាសពីរ និងរត់លើរ៉កគឺ l ។ ចូរគណនាសំទុះរបស់ប្រព័ន្ធ។

ដំណោះស្រាយ



សំទុះរបស់ប្រព័ន្ធ

ទីតាំងរបស់ម៉ាសនីមួយៗត្រូវបានកំណត់នៅលើរូប។

យើងបានល្បឿននៃម៉ាសនីមួយៗគឺ

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \ , \quad v_2 = \frac{d(l-x)}{dt} = -\dot{x}$$

និងល្បឿនមុំនៃរ៉ក $\omega = \frac{v}{r}$ ដោយ $v = |v_1| = |v_2| = \dot{x}$

ដូចនេះថាមពលស៊ីនេទិចសរុបនៃប្រព័ន្ធគឺ

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\frac{\dot{x}^2}{r^2}$$

នៅពេលថាមពលប៉ូតង់ស្យែលនៃប្រព័ន្ធគឺ $V = -m_1 g x - m_2 g(l - x)$

កាវឡាក្រង់នៃប្រព័ន្ធគឺ $L = T - V = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}\right)\dot{x}^2 + g(m_1 - m_2)x + m_2 g l$

មានតែមួយដឺក្រេដឺក្រេសេរី ដែលមានកូអរដោនេទូទៅ $q = x$ ។ សមីការឡាក្រង់គឺ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

យើងបាន៖ $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\left(m_1+m_2+\dfrac{I}{r^2}\right)\dot{x}$, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\left(m_1+m_2+\dfrac{I}{r^2}\right)\ddot{x}$ និង $\dfrac{\partial L}{\partial x}=g(m_1-m_2)$

ជំនួសក្នុងសមីការឡាក្រង់ទទួលបាន៖ $\left(m_1+m_2+\dfrac{I}{r^2}\right)\ddot{x}=g(m_1-m_2)$

$$\Rightarrow\ \ddot{x}=\frac{g(m_1-m_2)}{\left(m_1+m_2+I/r^2\right)}$$

បើ $I=0:\ \ddot{x}=\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$

បើ $m_1>m_2$ ម៉ាស m_1 ចលនាចុះក្រោមជាមួយសំទុះថេរ។

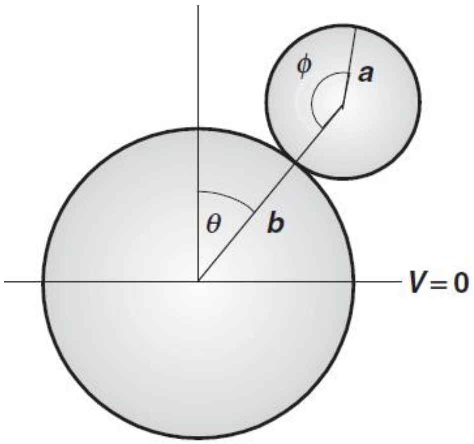
បើ $m_1<m_2$ ម៉ាស m_1 ចលនាឡើងលើជាមួយល្បឿនថេរ។

ឧទាហរណ៍១៣៖ ស៊ីឡាំងមានកាំ a និងម៉ាស m រមៀលមិនរអិលលើស៊ីឡាំងនៅស្ងៀមមានកាំ b ។ ចូរឱ្យតម្លៃការីឡាក្រង់ និងទទួលបានសមីការចលនា សម្រាប់រយៈពេលខ្លីមុនស៊ីឡាំងចាកចេញ។ មើលរូប៥។

ដំណោះស្រាយ

ថាមពលស៊ីនេទិចនៃស៊ីឡាំងតូចជាថាមពលស៊ីនេទិចនៃបម្លែងផ្ចិតម៉ាសរបស់វាបូកនិងថាមពលស៊ីនេទិចនៃរង្វិលជុំវិញផ្ចិតម៉ាសរបស់វា។ នោះគឺ

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+\frac{1}{2}I\dot{\phi}^2$$



ដែល r ជាចម្ងាយរវាងផ្ចិតស៊ីឡាំងទាំងពីរ និង $I=\dfrac{1}{2}ma^2$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែលគឺ $V=mgr\cos\theta$

ការីឡាក្រង់ $L=\dfrac{1}{2}m\left((\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+\dfrac{1}{2}I\dot{\phi}^2-mgr\cos\theta$

ប៉ុន្តែមាន constraint ពីរ ឱ្យនាំ $r=a+b$ និង $a\phi=b\theta$

ដូចនេះ $\dot{r}=0$ និង $\dot{\phi}=\dfrac{b}{a}\dot{\theta}$ នោះ៖

$$L=\frac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ma^2\right)\left(\frac{b}{a}\dot{\theta}\right)^2-mg(a+b)\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2}m\left(a^2+2ab+\frac{3}{2}b^2\right)\dot{\theta}^2-mg(a+b)\cos\theta$$

និងសមីការឡាក្រង់គឺ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$

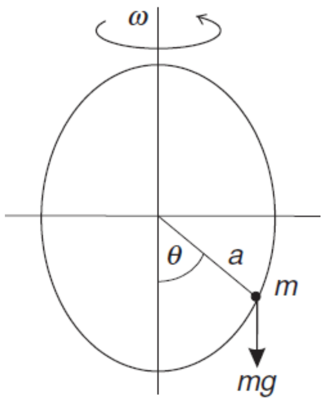
ដោយ $\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=m\left(a^2+2ab+\frac{3}{2}b^2\right)\dot{\theta}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=m\left(a^2+2ab+\frac{3}{2}b^2\right)\ddot{\theta}$

និង $\frac{\partial L}{\partial\theta}=mg(a+b)\sin\theta$

យើងបាន៖ $m\left(a^2+2ab+\frac{3}{2}b^2\right)\ddot{\theta}-mg(a+b)\sin\theta=0$

ឬសមីការចលនា $\ddot{\theta}-\frac{(a+b)g}{a^2+2ab+\frac{3}{2}b^2}\sin\theta=0$

ឧទាហរណ៍១៤៖ អង្កាំមួយមានម៉ាស m រអិលលើកងធំមានកាំ a ។ កងធំវិលនៅល្បឿនមុំថេរ ω ជុំវិញអ័ក្សឈរ។ មើលរូប៦។ ចូរកំណត់កាឡាក្រង់ និងសមីការចលនា។



ដំណោះស្រាយ

បើកងធំធ្ងន់គ្រប់គ្រាន់ ចលនានៃអង្កាំនឹងមិនប៉ះពាល់អត្រាវង្វិលនៃកងធំ។ ដូចនេះ យើងមិនអើពើថាមពលកងធំ។ ថាមពលស៊ីនេទិចជាថាមពលរបស់អង្កាំបណ្តាលមកពីវង្វិលនៃកងធំ ព្រមទាំងថាមពលស៊ីនេទិចនៃអង្កាំបណ្តាលមកពីចលនារបស់វាលើកងធំដែលបានបង្កើតជាមួយការផ្លាស់ប្តូរមុំ θ ។

ថាមពលស៊ីនេទិច៖ $T=\frac{1}{2}m\vec{v}_a^2=\frac{1}{2}m\left(\vec{v}_e+\vec{v}_r\right)^2$

ដោយ $v_e=a\omega\sin\theta$, $v_r=a\dot{\theta}$ (ល្បឿននាំ និងល្បឿនធៀបកែងគ្នា)

នោះ៖ $T=\frac{1}{2}m\left(a^2\omega^2\sin^2\theta+a^2\dot{\theta}^2\right)$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V=-mga\cos\theta$

កាវីឡាក្រង់ $L = T - V$

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta + mga\cos\theta$$

សមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$

ដោយ $\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = ma^2\ddot{\theta}$ និង $\frac{\partial L}{\partial\theta} = ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta - mga\sin\theta$

សមីការចលនាគឺ

$$ma^2\ddot{\theta} - ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + mga\sin\theta = 0$$

ឬ $\ddot{\theta} + \omega^2\cos\theta\sin\theta + \frac{g}{a}\sin\theta = 0$

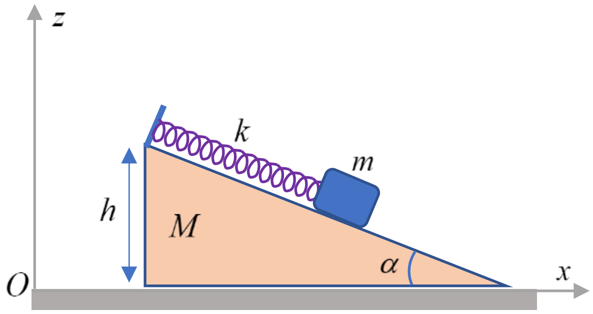
ឧទាហរណ៍១៥៖ ដុំមានម៉ាស m ត្រូវបានចងភ្ជាប់ទៅជើងមានម៉ាស M ដោយរ៉ឺស័រមានថេរកម្រាញ k ។ ផ្ទៃប្លង់ទេរគ្មានកកិត មានមុំចំណោត α ។ ជើងរអិលដោយសេរីតាមទិសដេកដោយគ្មានកកិត។

ក. ចូរបង្ហាញថា កាវីឡាក្រង់នៃប្រព័ន្ធគឺ

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + m\dot{x}\dot{s}\cos\alpha - \frac{1}{2}k(s-\ell)^2 - mg(h - s\sin\theta)$$

ដែល ℓ ជាប្រវែងដើមរ៉ឺស័រ, x ជាកូអរដោនេរបស់ជើង និង s ជាប្រវែងរ៉ឺស័រ ។

ខ. ដោយប្រើសមីការឡាក្រង់ ចូរបង្ហាញថា



សមីការចលនាគឺ

$$(M+m)\ddot{x} + m\ddot{s}\cos\alpha = 0$$

$$m\ddot{x}\cos\alpha + m\ddot{s} + k(s - s_0) = 0$$

ដែល $s_0 = \ell + (mg\sin\alpha)/k$ ។

គ. ដោយប្រើសមីការចលនាសំណួរខ ចូររកប្រេកង់ ចំពោះលំយោលមានអំព្លីទុតតូចនៃប្រព័ន្ធនេះ។

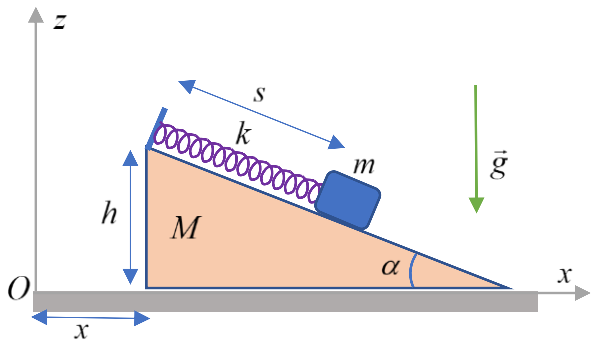
ដំណោះស្រាយ

ក. ល្បឿន v នៃម៉ាស m ធៀបទៅនឹងផ្ទៃដេកត្រូវបានឱ្យដោយបន្សំ $\dot{s}$ និង $\dot{x}$ ។

កុំប៉ូសង់នៃល្បឿននេះគឺ

$v_x = \dot{x} + \dot{s}\cos\alpha$ និង $v_y = -\dot{s}\sin\alpha$

$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s}\cos\alpha$



ថាមពលស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធ

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\alpha)$$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល(រ៉ឺស័រ និងទំនាញ)៖

$$V = \frac{1}{2}(s-\ell)^2 + mg(h - s\sin\alpha)$$

ការីឡាក្រង់ $L = T - V = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + m\dot{x}\dot{s}\cos\alpha - \frac{1}{2}(s-\ell)^2 - mg(h - s\sin\alpha)$

ខ. កូអរដោនេទូទៅគឺ $q_1 = x$ និង $q_2 = s$

សមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0$

សមីការចលនា $(M+m)\ddot{x} + m\ddot{s}\cos\alpha = 0$ និង $m\ddot{x}\cos\alpha + m\ddot{s} + k(s - s_0) = 0$

ដែល $s_0 = \ell + (mg\sin\alpha)/k$

យក $x = A\sin\omega t$ និង $s - s_0 = B\sin\omega t \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 A\sin\omega t$, $\ddot{s} = -B\omega^2\sin\omega t$

ដោយជំនួស $A(M+m) + B\cos\alpha = 0$ និង $Am\omega^2\cos\alpha + B(m\omega^2 - k) = 0$

ដោយបំបាត់ A និង B យើងបាន៖ $\omega = \sqrt{\frac{k(M+m)}{m(M + m\sin^2\alpha)}}$

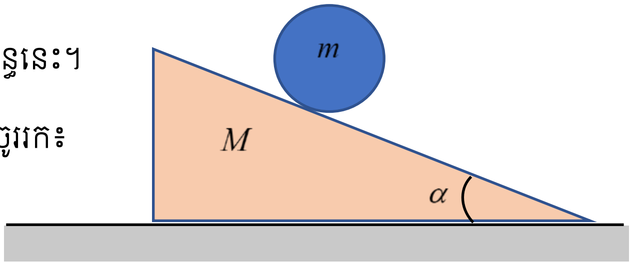
ឧទាហរណ៍១៦៖ ស្វ៊ែស្មើសាច់មានម៉ាស m រមៀលដោយគ្មានរអិលលើជើងទេរមានម៉ាស M មុំ α ដែលអាចរអិលដោយខ្លួនវាគ្មានកកិតលើតុដេក។ ប្រព័ន្ធចលនាក្នុងប្លង់ដូចបង្ហាញលើរូប។

ក. ចូររកសមីការឡាក្រង់ និងសមីការចលនានៃប្រព័ន្ធនេះ។

ខ. សម្រាប់ករណីពិសេស M = m និង $\alpha = \pi/4$ ចូររក៖

១). សំទុះនៃជើង

២). សំទុះនៃស្វ៊ែធៀបទៅនឹងជើង។



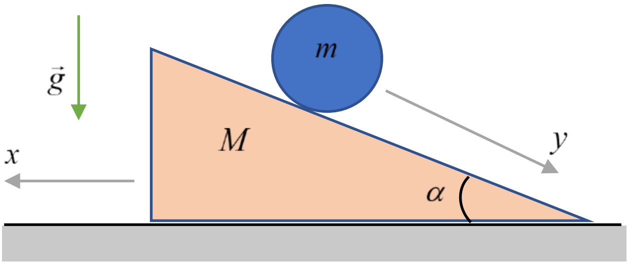
ដំណោះស្រាយ

ក. កាឡែ្រង់

ថាមពលស៊ីនេទិចនៃស្វ៊ែ $T_1 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\times\frac{2}{5}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{7}{10}mv^2$

$v_x = \dot{x} + \dot{y}\cos\alpha$ និង $v_y = \dot{y}\sin\alpha$

$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha$



ថាមពលស៊ីនេទិចនៃជើង

$$T_2 = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2$$

ថាមពលស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធ

$$T = T_1 + T_2 = \frac{7}{10}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha\right) + \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}$$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែលនៃប្រព័ន្ធ(ស្មើថាមពលប៉ូតង់ស្យែលស្វ៊ែ)៖ $V = -mgy\sin\alpha$

កាឡែ្រង់ $L = T - V = \frac{7}{10}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha\right) + \frac{1}{2}(M+m)\dot{x} + mgy\sin\alpha$

សមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$

សមីការក្លាយជា

$$\frac{7m}{5}\ddot{x} + \frac{7m}{5}\ddot{y}\cos\alpha + (M+m)\ddot{x} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{7m}{5}\ddot{y}'' + \frac{7m}{5}\ddot{x}\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0 \qquad (2)$$

ដោះស្រាយសមីការ(1)និង(2) ឱ្យ

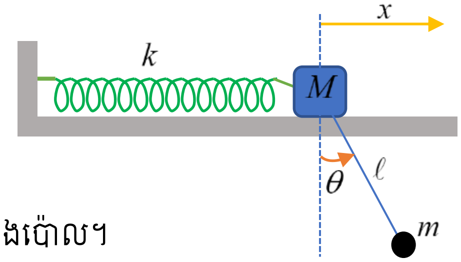
$$\ddot{x} = -\frac{5mg\sin\alpha\cos\alpha}{5M + m(5+7\sin^2\alpha)} \quad \text{(សម្រាប់ជើង)}$$

$$\ddot{y} = \frac{5(5M+12m)g\sin\alpha}{7(5M + m(5+7\sin^2\alpha)} \quad \text{(សម្រាប់ស្វ៊ែ)}$$

ចំពោះ M = m និង $\alpha = \pi/4 \Rightarrow \ddot{x} = \frac{50}{27}$ m/s^2 និង $\ddot{y} = \frac{85\sqrt{2}}{189}$ m/s^2

ឧទាហរណ៍១៧៖ ប៉ោលទោលមានប្រវែង ℓ និងម៉ាស m ត្រូវបានដាក់ចំណុចរង្វិលនៅដុំមានម៉ាស M ដែលរអិលលើប្លង់ដេករលោង ដូចបង្ហាញលើរូប។ ចូររកសមីការចលនា ដោយប្រើសមីការឡាក្រង់។

ដំណោះស្រាយ



យក $x(t)$ ជាបន្លាស់ទីនៃដុំ និង $\theta(t)$ ជាមុំដែលប៉ោលងាក។

ថាមពលស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធបានមកពីចលនានៃដុំ និងប៉ោល។

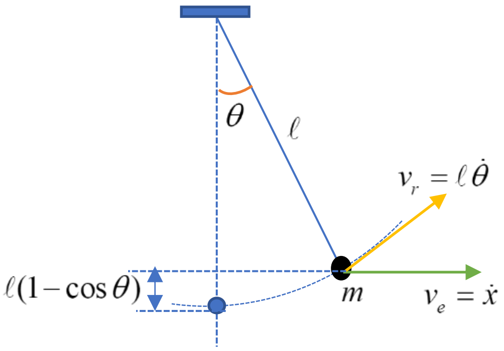
ថាមពលប៉ូតង់ស្យែលបានមកពីថាមពលប៉ូតង់ស្យែលយឺតនៃរ៉ឺស័រ និងប៉ោល។

ល្បឿនដាច់ខាតនៃប៉ោល៖

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \quad \Rightarrow \quad v_a^2 = v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos\theta$$

$$v_a^2 = \dot{x}^2 + \left(\ell\dot{\theta}\right)^2 + 2\dot{x}\ell\dot{\theta}\cos\theta$$

ថាមពលស៊ីនេទិច៖ $T = \frac{1}{2}M\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mv_a^2$



សម្រាប់មុំតូច $\cos\theta \to 1$

$$T = \frac{1}{2}M\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\ell\dot{\theta}\right)$$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល៖

$$V = \frac{1}{2}k\,x^2 - mg\ell(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}k\,x^2 - mg\ell\frac{\theta^2}{2}$$

ការីឡាក្រង់៖

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\right) - \frac{1}{2}k\,x^2 + mg\ell\frac{\theta^2}{2}$$

សមីការឡាក្រង់៖

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0\,,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

ដោយជំនួស យើងបាន សមីការចលនា៖

$$(M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} + k\,x = 0 \quad \text{និង} \quad \ell\ddot{\theta} + \ddot{x} - g\theta = 0$$

ឧទាហរណ៍១៨៖

ក. ចូរបង្ហាញថា ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃដងស្តើងវិលជុំវិញផ្ចិតម៉ាសរបស់វាគឺ $\frac{1}{12}ml^2$ ។

ខ.តាមបំពង់ស្តើងមិនគិតម៉ាសត្រូវបានដាក់ឱ្យវិល ដើម្បីឱ្យ វាវិលដោយគ្មានកកិតនៅក្នុងប្លង់ដេក។ ដងស្តើងមានម៉ាស M និងប្រវែង l រអិលដោយគ្មានកកិតនៅក្នុងបំពង់។ ចូរជ្រើសរើសប្រព័ន្ធកូអរដោនេសមរម្យ និងសរសេរសមីការឡាក្រង់សម្រាប់ប្រព័ន្ធនេះ។

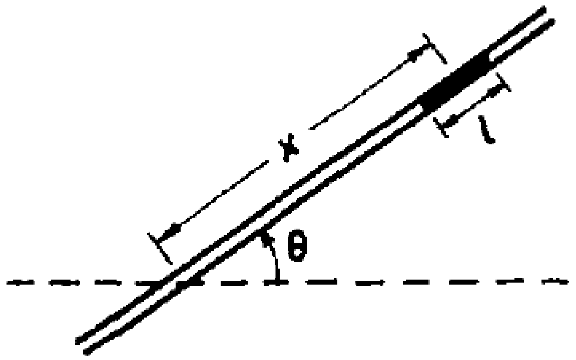
គ. ដំបូង ផ្ចិតម៉ាសដងត្រួតជាមួយចំណុចរង្វិល ហើយបំពង់វិលជាមួយល្បឿនមុំ ω_0 ។ ចូរបង្ហាញថា ដងមិនស៊ប់នៅក្នុងទីតាមងនេះ រួចពណ៌នា សំណុំចលនាបន្ទាប់ បើវាត្រូវបានរំខានតិចតួច។ គណនាល្បឿនរ៉ាដ្យាល់ និងល្បឿនមុំនៃដង ក្រោយរយៈពេលយូរ។ (សន្មត បំពង់វែងល្មមដែលដងនៅតែក្នុងនោះ)

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា ម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃដងស្តើងវិលជុំវិញផ្ចិតម៉ាសរបស់វាគឺ $\frac{1}{12}ml^2$

តាមនិយមន័យម៉ូម៉ង់និចលភាពគឺ

$$I=\sum_i r_i^2\Delta m_i=\int_{-l/2}^{l/2}x^2\rho dx=\frac{1}{12}\rho l^3=\frac{1}{12}ml^2$$



ខ. យកមុំ θ រវាងបំពង់ស្តើង និងទិសដេក

កាត់តាមចំណុចរង្វិល និងចម្ងាយ x នៃផ្ចិតម៉ាស

របស់ដងស្តើង ពីចំណុចរង្វិលនៃបំពង់

ដូចបង្ហាញលើរូប។ យើងបាន៖

ថាមពលស៊ីនេទិច $T=\frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2+x^2\dot{\theta}^2\right)+\frac{1}{24}M\,l^2\dot{\theta}^2$

ថាមពលប៉ុតង់ស្យែល $V=0$

ការីឡាក្រង់ $L=\frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2+x^2\dot{\theta}^2\right)+\frac{1}{24}M\,l^2\dot{\theta}^2$

នោះសមីការឡាក្រង់ឱ្យ៖ $\ddot{x}=x\dot{\theta}^2$ និង $M\left(x^2+\frac{1}{12}l^2\right)\dot{\theta}=$ ថេរ = C

គ. នៅលក្ខខណ្ឌដើម $x=0,\ \dot{\theta}=\omega_0$ ឱ្យ $C=\frac{1}{2}M\,l^2\omega_0$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta}=\frac{l^2\omega_0}{12x^2+l^2} \quad \text{នោះ យើងបាន} \quad \ddot{x}=\frac{1}{2}\frac{d\dot{x}^2}{dx}=\frac{l^4\omega_0^2 x}{\left(12x^2+l^2\right)^2}$$

ដោយធ្វើអាំងតេក្រាលជាមួយលក្ខខណ្ឌដើម $x=0, \dot{x}=0$ យើងទទួលបាន៖

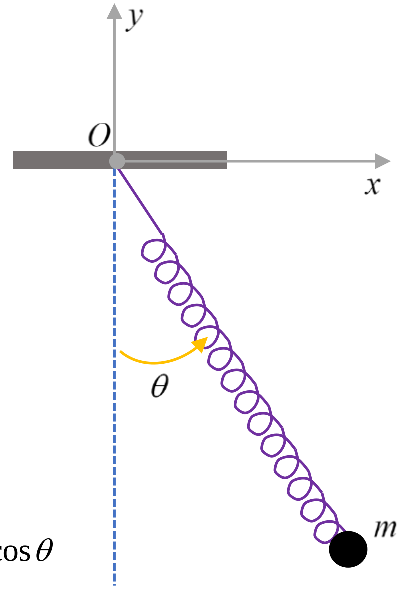
$$\dot{x}^2=\frac{l^2\omega_0^2 x^2}{12x^2+l^2}$$

ចំណាំថា ល្បឿននៃជងនៅក្នុងបំពង់គឺ $\dot{x}=\dfrac{l\omega_0}{\sqrt{12+\dfrac{l^2}{x^2}}}$

កើនឡើងនៅពេលចម្ងាយរបស់វាពីទីតាំងដើមកើនឡើង។ ដូចនេះ ជងមិនស៊ប់នៅទីតាំងដើម។ ចំពោះ $t\to\infty$, $x\to\infty, \dot{\theta}\to 0$ និង $\dot{x}\to\dfrac{l\omega_0}{\sqrt{12}}$ ។ បន្ទាប់ពីរយៈពេលវែង ការវង្វិលនឹងថយចុះទៅសូន្យ នៅពេលល្បឿននៃជងនៅក្នុងបំពង់ទំនោរទៅលីមីតលើ។ ប៉ុន្តែ ចម្ងាយ x នឹងកើនឡើងរហូត។

ឧទាហរណ៍១៩៖ ប៉ោលរ៉ឺស័រមានម៉ាស m ភ្ជាប់ទៅចុងម្ខាងនៃរ៉ឺស័រគ្មានម៉ាសជាមួយថេរកម្រាញ k ។ ចុងមួយទៀតនៃរ៉ឺស័រចងភ្ជាប់ទៅទម្រនឹង។ នៅពេលគ្មានទម្ងន់លើរ៉ឺស័រប្រវែងវាគឺ l ។ សន្មតថា ចលនានៃប្រព័ន្ធនៅក្នុងប្លង់ឈរ។ ចូរធ្វើដេរីវេសមីការចលនា។ ចូរដោះស្រាយសមីការចលនា នៅក្នុងការប្រមាណមុំតូច និងបន្លាស់ទីរ៉ាដ្យាល់ពីលំនឹង។

ដំណោះស្រាយ



ប្រើប្រព័ន្ធកូអរដោនេប៉ូលែ

ម៉ាស m មានកូអរដោនេ $(r\sin\theta, -r\cos\theta)$

និងកុំប៉ូសង់ល្បឿន $\left(r\dot{\theta}\cos\theta+\dot{r}\sin\theta,\ r\dot{\theta}\sin\theta-\dot{r}\cos\theta\right)$

ថាមពលស៊ីនេទិច $T=\dfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V=\dfrac{1}{2}k(r-l)^2-mgr\cos\theta$

ការីឡាក្រង់ $L=T-V=\dfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-\dfrac{1}{2}k(r-l)^2+mgr\cos\theta$

សមីការឡាក្រង់ $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial q_i}=0$

ដូចនេះ ឱ្យសមីការចលនា $m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2+k(r-l)-mg\cos\theta=0$ និង $r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}+g\sin\theta=0$

ទីតាំងលំនឹងនៅក្នុងកូអរដោនប៉ូលែ (r_0,θ_0) ឱ្យដោយ $\ddot{r}=\ddot{\theta}=0, \dot{r}=\dot{\theta}=0$ គឺ

$$\theta_0=0\ ,\quad r_0=l+\frac{mg}{k}$$

ចំពោះលំយោលតូចជុំវិញទីតាំងលំនឹង θ ជាមុំតូច ។ តាង $\rho=r-r_0$ ដោយ $\rho\ll r_0$ និងសរសេរសមីការចលនាជា

$$m\ddot{\rho}-m(r_0+\rho)\dot{\theta}^2+k\rho=0 \text{ និង } (r_0+\rho)\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\dot{\theta}+g\theta=0$$

មិនគិតតួលំដាប់ខ្ពស់នៃបរិមាណតូច $\rho,\dot{\rho},\dot{\theta}$ ៖ $\ddot{\rho}+\frac{k}{m}\rho=0$ និង $\ddot{\theta}+\frac{g}{r_0}\theta=0$

ទាំងបន្លាស់ទីរ៉ាដ្យាល់ និងមុំ ធ្វើចលនាអាម៉ូនិចជុំវិញទីតាំងលំនឹងជាមួយប្រេកង់មុំ $\sqrt{\frac{k}{m}}$, $\sqrt{\frac{g}{r_0}}$ ។ ចម្លើយ

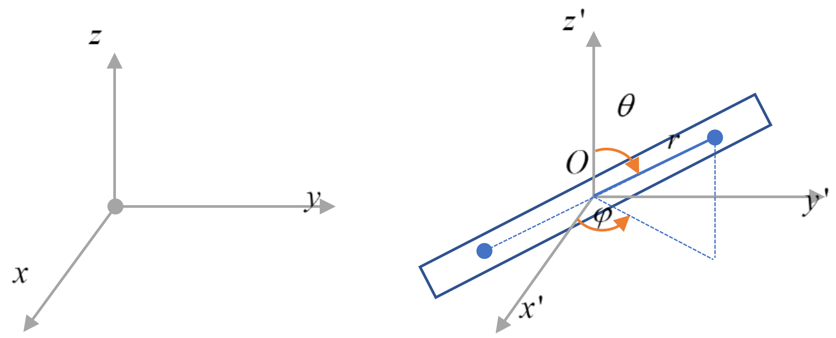
សមីការ $\rho=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_1\right)$ ឬ $r=l+\frac{mg}{k}+A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_1\right)$

និង $\theta=B\cos\left(\sqrt{\frac{kg}{kl+mg}}t+\varphi_2\right)$ ដែលចំនួនថេរ $A,\ \varphi_1,\ B,\ \varphi_2$ ត្រូវបានកំណត់ពីលក្ខខណ្ឌដើម។

ឧទាហរណ៍២០៖ ភាគល្អិតពីរមានម៉ាសដូចគ្នា m ត្រូវបានបង្ខំឱ្យរអិលតាមដងស្តើងមានម៉ាស M និងប្រវែង l ដែលខ្លួនវាផ្ទាល់ចលនាសេរី នៅក្នុងរបៀបណាក៏ដោយ។ រ៉ឺស័រឯកលក្ខណ៍ពីរភ្ជាប់ភ្ជាប់ភាគល្អិតទាំងនេះ ជាមួយចំណុចកណ្តាលនៃដង។ ចូរពិនិត្យ តែចលនានៃប្រព័ន្ធនេះ ដែលប្រវែងនៃរ៉ឺស័រ (មានន័យថា ចម្ងាយនៃភាគល្អិតទាំងពីរពីផ្ចិតនៃដង) ស្មើគ្នា។ ដោយយកទាំងនេះជាប្រព័ន្ធត្រមោចដាក់នៅក្នុងលំហ ចូររកសមីការចលនា ចំពោះវា និងដោះស្រាយវា (រហូតដល់ចំណុចធ្វើអាំងតេក្រាល)។ ចូរពណ៌នាចលនា។

ដំណោះស្រាយ

ជ្រើសរើសតម្រុយ ℜ' មានគល់តម្រុយនៅផ្ចិតដង ហើយធ្វចលនារំកិលធៀបតម្រុយកាលីលេ ℜ ។



ជ្រើសរើសកូអរដោនេស្វ៊ែ (r,θ,φ) ដែលភ្ជាប់ជាមួយ ℜ'។

យក (x,y,z) ជាកូអរដោនេនៃចំណុចគល់ O' នៅក្នុងតម្រុយ ℜ ។

ថាមពលស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធស្មើនឹងថាមពលស៊ីនេទិចត្រង់ផ្ចិតម៉ាសបូកនឹងថាមពលស៊ីនេទិចនៃចលនាជុំវិញផ្ចិតម៉ាស។ ដោយសារ O' ជាផ្ចិតម៉ាសនៃប្រព័ន្ធ យើងបាន៖

$$T=\frac{1}{2}(M+2m)\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)+T_{rot}$$

ដែល T_{rot} ជាថាមពលស៊ីនេទិចនៃចលនារង្វិលរបស់ដង។ ល្បឿនមុំនៃដងវិលជុំ O' គឺ

$$\vec{\omega}=\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{u}_r-\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\theta-\dot{\theta}\,\vec{u}_\varphi$$

បំបែកតាមអ័ក្សមេ ម៉ូម៉ង់និចលភាពទាក់ទងគឺ $I_r=0,\quad I_\theta=\frac{1}{12}M\,l^2,\ \ I_\varphi=\frac{1}{12}M\,l^2$

ថាមពលស៊ីនេទិចនៃចលនារង្វិល៖

$$T_{rot}=\frac{1}{12}\left(I_r\omega_r^2+I_\theta\omega_\theta^2+I_\varphi\omega_\varphi^2\right)=\frac{1}{24}M\,l^2\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)$$

ប្រព័ន្ធនៅក្នុងលំហសេរី ដូចនេះមានតែថាមពលប៉ូតង់ស្យែលដែលជាថាមពលបណ្ដាលមកពីអំពើនៃរ៉ឺស័រ

$$V=2\times\frac{1}{2}k(r-r_0)^2=k(r-r_0)^2$$

ដែល k និង r_0 ជាថេរកម្រាញ និងប្រវែងដើមនៃរ៉ឺស័រនីមួយៗ។ ដូចនេះ ការីឡាក្រង់

$$L=T-V=\frac{1}{2}(M+2m)\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$$
$$+\frac{1}{24}M\,l^2\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)-k(r-r_0)^2$$

សមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$

ឱ្យថេរនៃចលនា

$(M+2m)\dot{x}=$ ថេរ

$(M+2m)\dot{y}=$ ថេរ

$(M+2m)\dot{z}=$ ថេរ

$$\left(2mr^2+\frac{1}{12}Ml^2\right)\dot{\varphi}\sin^2\theta = \text{ថេរ}$$

សមីការបីដំបូង បង្ហាញថា ល្បឿន $(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ នៃផ្ចិតម៉ាសរបស់ប្រព័ន្ធជាវ៉ិចទ័រថេរ។ ដូចនេះ ផ្ចិតម៉ាសចលនាត្រង់ស្មើ។ សមីការចុងក្រោយ បង្ហាញថា កុំប៉ូសង់នៃម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចរិលជុំវិញអ័ក្ស z' ជាចលនាថេរ។ ដោយសារ អ័ក្សជាអ័ក្សណាមួយត្រូវបានជ្រើសរើស នេះមានន័យថា ម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចត្រូវបានរក្សា។

សមីការឡាក្រង់ឱ្យសមីការចលនាដូចតទៅ៖

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\frac{k}{m}(r-r_0)=0$$

$$\left(r^2+\frac{Ml^2}{24m}\right)\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta}-\left(r^2+\frac{Ml^2}{24m}\right)\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta=0$$

ទាំងនេះ និងសមីការ $\dot{\varphi}$ ខាងលើពណ៌នាចលនាជុំវិញផ្ចិតម៉ាសនៃប្រព័ន្ធ។

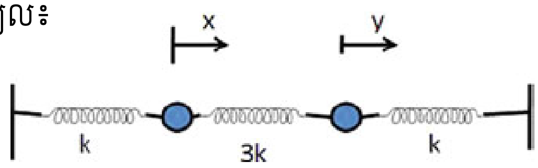
ដូចនេះ ក្រោមការបង្ខំដែលម៉ាស m ទាំងពីរ រអិលតាមដងស៊ីមេទ្រីជៀបទៅនឹងចំណុចកណ្តាល O' ចលនាផ្ចិតម៉ាសនៃប្រព័ន្ធជាចលនាត្រង់ស្មើហើយចលនានៃប្រព័ន្ធជុំវិញ O' គឺថាម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចរិលជុំវិញ O' ត្រូវបានរក្សា។

ឧទាហរណ៍២១៖ ពិនិត្យប្រព័ន្ធមានម៉ាសពីរឯកលក្ខណ៍ ដែលអាចចលនាតាមទិសដេក ត្រូវបានភ្ជាប់ដោយរ៉ឺស័រដូចរូប។ យក x, y ជាបន្លាស់ទីដេកនៃម៉ាសទាមងពីរ ពីទីតាំងលំនឹង។

ក. ចូររកថាមពលស៊ីនេទិច និងថាមពលប៉ូតង់ស្យែលនៃប្រព័ន្ធ និងទាញរកការីឡាក្រង់។

ខ. ចូរបង្ហាញថា សមីការឡាក្រង់ ឱ្យគូសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-4kx+3ky \\ m\ddot{y}=3kx-4ky \end{cases}$$



គ. ចូររកម៉ូតធម្មតានៃលំយោលនៃប្រព័ន្ធនេះ និងខួបលំយោលរបស់ពួកវា។

ដំណោះស្រាយ

ក. ថាមពលស៊ីនេទិច និងថាមពលប៉ូតង់ស្យែលនៃប្រព័ន្ធ និងទាញរកការីឡាក្រង់

ថាមពលស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធ $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែលនៃប្រព័ន្ធ $V=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}3k(x-y)^2+\frac{1}{2}ky^2=k\left(2x^2-3xy+2y^2\right)$

ការឡាក្រង់ $L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - k\left(2x^2 - 3xy + 2y^2\right)$

ខ. បង្ហាញថា សមីការឡាក្រង់ ឱ្យគូសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -4kx + 3ky \\ m\ddot{y} = 3kx - 4ky \end{cases}$$

សមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$

ដោយជំនួស យើងបាន៖ $\begin{cases} m\ddot{x} = -4kx + 3ky \\ m\ddot{y} = 3kx - 4ky \end{cases}$

គ. ម៉ូតធម្មតានៃលំយោលនៃប្រព័ន្ធនេះ និងខួបលំយោលរបស់ពួកវា

យក $x = A\sin\omega t$, $y = B\sin\omega$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -A\omega^2 \sin\omega t,\ \ddot{y} = -B\omega^2 \sin\omega t$$

ជំនួសក្នុងសមីការចលនាខាងលើ ទទួលបាន៖

$$\left(4k - m\omega^2\right)A - 3kB = 0 \text{ និង } -3kA + \left(4k - m\omega^2\right)B = 0$$

សមីការប្រេកង់ទទួលបានដោយឱ្យដេទែមីណង់នៃសមីការសូន្យ បង្កើតដោយមេគុណ A និង B ៖

$$\begin{vmatrix} \left(4k - m\omega^2\right) & -3k \\ -3k & \left(4k - m\omega^2\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(4k - m\omega^2\right)^2 - 9k^2 = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} ,\ \omega_2 = \sqrt{\frac{7k}{m}}$$

ខួបនៃលំយោល $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{7k}}$

បើយក $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow A = B$

បើយក $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{7k}{m}} \Rightarrow A = -B$

ទី១ទាក់ទងទៅនឹងម៉ូតស៊ីមេទ្រីនៃលំយោល និងទី២ទាក់ទងទៅម៉ូតមិនស៊ីមេទ្រី។

កូអរដោនេធម្មតា q_1 និង q_2 ត្រូវបានបង្កើតដោយបន្សំលីនេអ៊ែ x និង y ៖

$$q_1 = x - y\ ,\ q_2 = x + y \quad \Rightarrow\ x = \frac{q_1 + q_2}{2},\ y = \frac{q_2 - q_1}{2}$$

ជំនួសក្នុង សមីការចលនា ទទួលបាន៖

$$\frac{m}{2}(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) = -2k(q_1 + q_2) + \frac{3k}{2}(q_2 - q_1) \qquad (1)$$

$$\frac{m}{2}(\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1) = \frac{3k}{2}(q_1 + q_2) - 2k(q_2 - q_1) \qquad (2)$$

យកសមីការ(1) + (2)៖ $m\ddot{q}_2 = -kq_2$ (3)

យកសមីការ (2)-(1)៖ $m\ddot{q}_1 = -7kq_1$ (4)

ថាមពលស៊ីនេទិច $T = \frac{m}{4}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$

ថាមពលប៉ុតង់ស្យែល $V = \frac{k}{4}(7q_1^2 + q_2^2)$

សមីការ (3) ទទួលបានប្រេកង់មុំ $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (ម៉ូតស៊ីមេទ្រី a)

សមីការ (4) ទទួលបានសមីការមុំ $\omega_2 = \sqrt{\frac{7k}{m}}$ (ម៉ូតមិនស៊ីមេទ្រី b)

ឧទាហរណ៍២២៖ ភាគល្អិតមានម៉ាស m ត្រូវបានបង្ខំឱ្យមានចលនាលើអេលីប E នៅក្នុងប្លង់ឈរ ប៉ារ៉ាម៉ែត កំណត់ដោយ $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ ដែល $a,\ b > 0$ និង $a \neq b$ ហើយ y មានទិសដៅវិជ្ជមានទៅលើ។ ភាគល្អិតត្រូវបានភ្ជាប់ទៅគល់តម្រុយ ដោយរ៉ឺស័រ ដូចបង្ហាញលើរូប ហើយវាទទួលរងទំនាញដី។ ថាមពលប៉ុតង់ស្យែលនៅក្នុងរ៉ឺស័រគឺ $\frac{1}{2}kr^2$ ដែល r ជាចម្ងាយនៃចំណុចម៉ាសពីគល់តម្រុយ ដូចរូប។

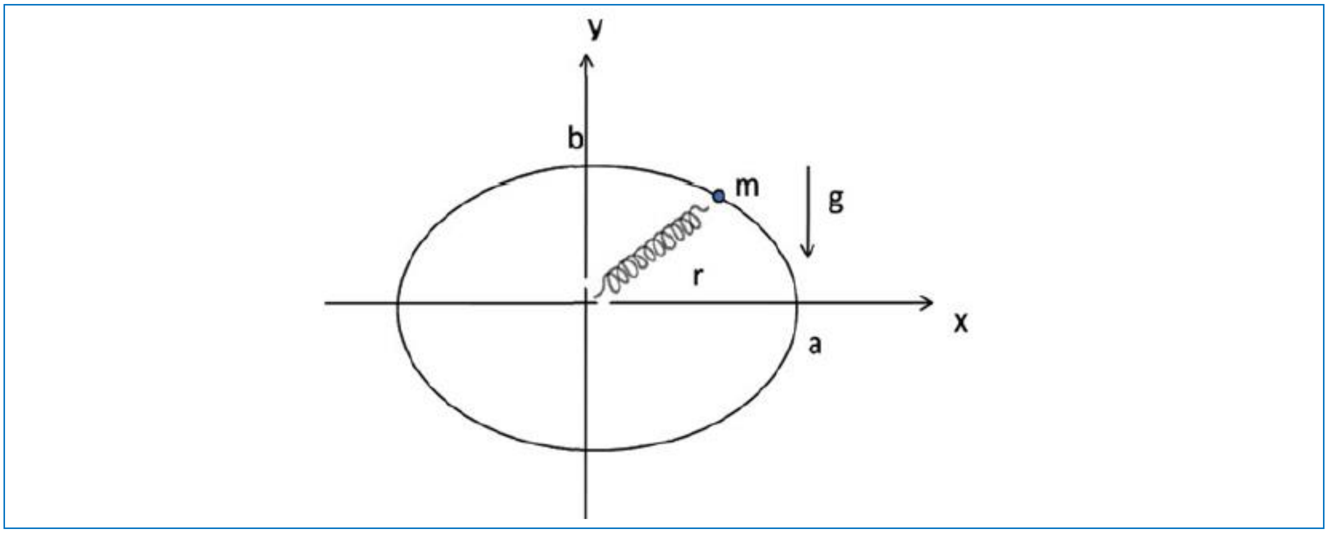
ក. ដោយប្រើ θ ជាកូអរដោន ចូររកថាមពលស៊ីនេទិច និងថាមពលប៉ុតង់ស្យែលនៃភាគល្អិត នៅពេលចលនាលើអេលីប។ ចូរសរសេរសមីការឡាក្រង់ និងបង្ហាញថា សមីការឡាក្រង់

$$m(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\ddot{\theta} = (a^2 - b^2)(k - m\dot{\theta}^2)\sin\theta\cos\theta - mgb\cos\theta$$

ខ. ចូរបង្ហាញថា $\theta = \pm\pi/2$ ជាចំណុចលំនឹងពីរ និងចូររកចំណុចលំនឹងផ្សេងទៀត ។

គ. ចូរកំណត់ ភាពស៊ប់នីមួយៗនៃចំណុចលំនឹងទាំងពីរ $\theta = \pm\pi/2$ (អាចជួយដើម្បីពិនិត្យករណី $a > b$ និង $a < b$ ដោយឡែកពីគ្នា)។

ឃ. នៅពេល ចំណុចលំនឹងនៅ $\theta = -\pi/2$ ជាលំនឹងស៊ប់ ចូរកំណត់ខួបនៃលំយោលតូច។



ដំណោះស្រាយ

ក. កូអរដោនេ

$$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta\ ,\ r^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow\ \dot{x} = -a\dot{\theta}\sin\theta\ ,\ \dot{y} = b\dot{\theta}\cos\theta$$

ថាមពលស៊ីនេទិច $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)\dot{\theta}^2$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V = mgy + \frac{1}{2}k\,r^2 = mgb\sin\theta + \frac{1}{2}k\left(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta\right)$

ការីឡាក្រង់ $L = T - V = \frac{1}{2}m\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)\dot{\theta}^2 - mgb\sin\theta - \frac{1}{2}k\left(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta\right)$

សមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$

នាំឱ្យ $m\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)\ddot{\theta} + m\left(a^2\sin\theta\cos\theta - b^2\sin\theta\cos\theta\right)\dot{\theta}^2$

$$+mgb\cos\theta + k\left(-a^2\sin\theta\cos\theta + b^2\sin\theta\cos\theta\right) = 0$$

ឬ $m\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)\ddot{\theta} - \left(a^2 - b^2\right)\left(k - m\dot{\theta}^2\right)\sin\theta\cos\theta + mgb\cos\theta = 0$

ខ. ចំណុចលំនឹងស្ថិតនៅកន្លែងដែលកម្លាំងសូន្យ ឬ $\frac{\partial V}{\partial\theta} = 0$

$\frac{\partial V}{\partial\theta} = mgb\cos\theta + k\left(b^2 - a^2\right)\sin\theta\cos\theta$ ឬ $\left[mgb + k\left(b^2 - a^2\right)\sin\theta\right]\cos\theta = 0$

នោះ $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm\pi/2$ និងចំណុចលំនឹងផ្សេងទៀត ទទួលបាន នៅពេល

$mgb + k\left(b^2 - a^2\right)\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \dfrac{mgb}{k(a^2 - b^2)}$ ដែលបានផ្ដល់ $a > b$ ។

គ. ចំណុចលំនឹង គឺស៊ប់ បើ $\dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} > 0$ និងមិនស៊ប់ បើ $\dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} < 0$

យើងបាន៖ $\dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = k(b^2 - a^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - mgb\sin\theta$

ចំពោះ $\theta = \pi/2$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = k(a^2 - b^2)(\cos^2\theta - mgb$$

បើ $\dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = k(a^2 - b^2)(\cos^2\theta - mgb > 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 > b^2 + \dfrac{mgb}{k}$ នោះ $\theta = \pi/2$ ជាចំណុចលំនឹងស៊ប់។

ចំពោះ $\theta = -\pi/2$

បើ $\dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = k(a^2 - b^2)(\cos^2\theta + mgb > 0 \Rightarrow a^2 < b^2 - \dfrac{mgb}{k}$ នោះ $\theta = -\pi/2$ ជាចំណុចលំនឹងស៊ប់។

ឧទាហរណ៍២៣៖ ភាគល្អិតមួយមានម៉ាស m ត្រូវបានបង្ខំឱ្យមានចលនាគ្មានកកិតលើផ្ទៃខាងក្នុងនៃកងវង់មានកាំ r ម៉ាសមាឌស្មើ និងម៉ាស M ។ កងនៅក្នុងប្លង់ xy អាចរមៀលលើបន្ទាត់នឹង(អ័ក្ស x) ប៉ុន្តែ មិនរអិល មិនអាចបាត់ការប៉ះជាមួយអ័ក្ស x ។ ភាគល្អិតរងកម្លាំងទំនាញដីតាមទិស y អវិជ្ជមាន។ នៅខណៈ t = 0 សន្មត កងនៅនឹង។ នៅខណៈនេះ ភាគល្អិតនៅកម្ពូលនៃកង និងផ្តល់ល្បឿន v_0 តាមអ័ក្ស x ។ គណនាល្បឿន v_f ធៀបទៅនឹងអ័ក្សនឹង នៅពេលភាគល្អិតទៅបាតនៃកង។ ចូរសម្រួលចម្លើយក្នុងលីមីត $\dfrac{m}{M} \to 0$ និង $\dfrac{M}{m} \to 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

កូអរដោនេនៃម៉ាស m $(x + r\sin\theta,\ r + r\cos\theta)$ និងល្បឿន $\left(\dot{x} + r\dot{\theta}\cos\theta, -r\dot{\theta}\sin\theta\right)$

កងមានម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច Mr^2 ហើយប្រព័ន្ធមានថាមពលស៊ីនេទិច៖

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2r\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2$$

និងថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V = mg(r + r\cos\theta)$

ការីឡាក្រង់ $L = T - V = M\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2r\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) - mgr(1 + \cos\theta)$

សមីការឡាក្រង់ ឱ្យ៖ $(2M+m)\dot{x}+mr\dot{\theta}\cos\theta=$ ថេរ (1)

នៅខណៈ t = 0 , m នៅកម្ពលនៃកង់ $\dot{x}=0,\ \theta=0,\ r\dot{\theta}=v_0$ ឱ្យតម្លៃថេរគឺ mv_0។ នៅពេល m នៅបាតក្រោមនៃកង់ $\theta=\pi$ ល្បឿននៃម៉ាសគឺ $v_f=\dot{x}+r\dot{\theta}\cos\pi=\dot{x}-r\dot{\theta}$

ហើយសមីការ(1)ក្លាយជា $2M\dot{x}+mv_f=mv_0$

ថាមពលសរុបត្រូវបានរក្សា ដើម្បីឱ្យទាំងនោះនៅចន្លោះចំណុចទាំងពីរនេះ យើងបាន៖

$$M\dot{x}^2+\frac{1}{2}mv_f^2=\frac{1}{2}mv_0^2+2mgr$$

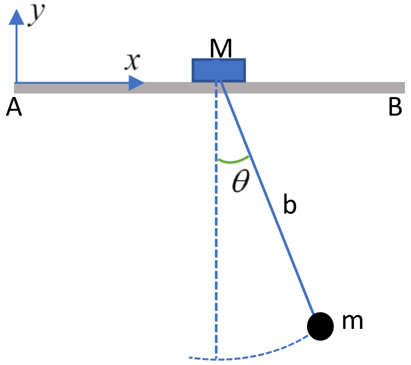
ដោយលុបបំបាត់ $\dot{x}$ រវាងសមីការទាំងពីរចុងក្រោយ ឱ្យ៖

$$(2M+m)v_f^2-2mv_0v_f-\left[(2M-m)v_0^2+8Mgr\right]=0$$

ចម្លើយនេះគឺ $v_f=\dfrac{mv_0\pm2\sqrt{M^2v_0^2+2(2M+m)Mgr}}{2M+m}$

នៅក្នុងលីមីត $m/M\to0,\ v_f\to\pm\sqrt{v_0^2+4gr}$ ។ សញ្ញាអវិជ្ជមានត្រូវបានជ្រើសរើសសម្រាប់ $M>>m,\ \dot{x}$ គឺតូច និង $v_f\approx-r\dot{\theta}$ ។ នៅក្នុងលីមីត $M/m\to0,\ v_f\to v_0$ ។

ឧទាហរណ៍២៤៖ ម៉ាស M ត្រូវបានបង្ខំឱ្យរអិលដោយគ្មានកកិតលើផ្លូវ AB ដូចបង្ហាញលើរូប។ ម៉ាស m ត្រូវបានចងភ្ជាប់ទៅ M ដោយខ្សែមិនយឺត មិនគិតម៉ាស។ (ធ្វើការប្រមាណមុំតូច)



ក. ចូរសរសេរកាវីឡាក្រង់នៃប្រព័ន្ធនេះ។

ខ. ចូររកកូអរដោនេកែង (និងពណ៌នាវា)។

គ. ចូររកកន្សោមសម្រាប់កូអរដោនេកែងជាអនុគមន៍នៃពេល។

ដំណោះស្រាយ

ក. កាវីឡាក្រង់នៃប្រព័ន្ធ

ប្រើកូអរដោនេដូចបង្ហាញលើរូប M និង m មានកូអរដោនេ៖

$$(x,\ 0)\ ,\left(x+b\sin\theta,\ -b\cos\theta\right)$$

កាវីឡាក្រង់នៃប្រព័ន្ធ $L=T-V=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+b^2\dot{\theta}^2+2b\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right)+mgb\cos\theta$

ខ. ចំពោះលំយោលតូច θ និង $\dot{\theta}$ ជាបរិមាណតូច យើងបានការប្រមាណកាឡាក្រង់

$$L=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+b^2\dot{\theta}^2+2b\dot{x}\dot{\theta}\right)+mgb\left(1-\frac{1}{2}\theta^2\right)$$

សមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$

បន្ទាប់ឱ្យ $(m+M)\dot{x}+mb\dot{\theta}=C$, $\ddot{x}+b\ddot{\theta}+g\theta=0$

នៅខាងលើ សមីការទី១អាចត្រូវបានសរសេរជា $(m+M)\dot{\eta}=C$ (1)

ដោយតាង $\eta=x+\frac{mb\theta}{m+M}$

ដោយសារ $(m+M)\ddot{x}+mb\ddot{\theta}=0$ សមីការទី២អាចត្រូវបានសរសេរជា

$$\frac{Mb\ddot{\theta}}{m+M}+g\theta=0 \qquad (2)$$

សមីការថ្មីទាំងពីរនៃចលនាមិនអាស្រ័យគ្នាទៅវិញទៅមក។

ដូចនេះ η និង θ ជាកូអរដោនេធម្មតានៃប្រព័ន្ធ។ ផ្ចិតម៉ាសនៃប្រព័ន្ធកើតឡើងនៅចម្ងាយ $\frac{mb}{m+M}$ ពី M តាមខ្សែ។ ដូចនេះ η ជាកូអរដោនេ x នៃផ្ចិតម៉ាស។ សមីការ (1) បង្ហាញថា ចលនាតាមទិសដេកនៃផ្ចិតម៉ាសគងកសណ្ឋាន។ កូអរដោនេធម្មតាផ្សេងទៀត θ ជាមុំដែលខ្សែធ្វើជាមួយទិសឈរ។

គ. សមីការ(1)មានចម្លើយ

$$\eta=\frac{Ct}{m+M}+D$$

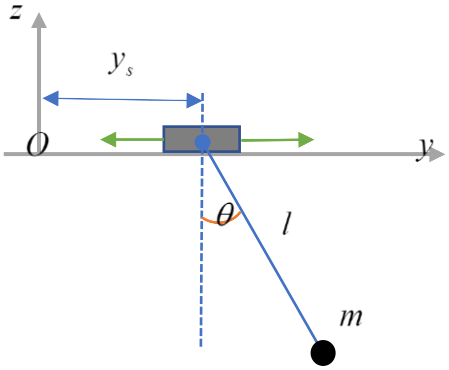
និងសមីការ(2)មានចម្លើយ $\theta=A\cos(\omega t+B)$ ដែល $\omega=\sqrt{\frac{(m+M)g}{Mb}}$ ជាប្រេកង់មុំលំយោលតូចនៃខ្សែ និង A, B, C, D ជាចំនួនថេរ។

ឧទាហរណ៍២៥៖ ប៉ោលទោលមួយត្រូវបានភ្ជាប់ទៅទម្រដែលមានចលនាដេករូបរូប។

ក. ចូរបង្កើតកាឡាក្រង់ សម្រាប់ប្រព័ន្ធជាអនុគមន៍នៃកូអរដោនេទូទៅ θ និង y ដែលជាបន្លាស់ទីមុំពីលំនឹង និង $y(t)$ ជាទីតាំងដេកនៃទម្ររបស់ប៉ោល។

ខ. ចូររកសមីការចលនាសម្រាប់ θ ។

គ. សម្រាប់បម្លាស់មុំតូច និងចលនាស៊ីនុយសូអ៊ីតនៃទម្រ $y=y_0\cos\omega t$ ។ ចូររកចម្លើយសមីការចលនា។



ដំណោះស្រាយ

ក. ការីឡាក្រង់

ម៉ាស m មានកូអរដោនេ $(y_s + l\sin\theta,\ -l\cos\theta)$ និងល្បឿន $\left(\dot{y}_s + l\dot{\theta}\cos\theta,\ l\dot{\theta}\sin\theta\right)$

ដូចនេះការីឡាក្រង់ $L = T - L = \dfrac{1}{2}m\left(\dot{y}_s^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{y}_s\dot{\theta}\cos\theta\right) + mgl\cos\theta$

ខ. សមីការឡាក្រង់

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ នោះឱ្យ $l\ddot{\theta} + \ddot{y}_s\cos\theta + g\sin\theta = 0$

គ. ចំពោះ $y_s = y_0\cos\omega t$ និង θ តូច ខាងលើបង្រួមទៅ $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \dfrac{y_0}{l}\omega^2\cos\omega t$

ដោយ $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{l}{g}}$ ។ ចម្លើយពិសេសទទួលបានដោយយក $\theta = A\cos\omega t$ នោះ៖

$\dot{\theta} = -A\omega\sin\omega t\,,\ \ddot{\theta} = -A\omega^2\cos\omega t$

$$\Rightarrow\ -A\omega^2\cos\omega t + \omega_0^2 A\cos\omega t = \frac{y_0}{l}\omega^2\cos\omega t \quad \Rightarrow\ A = \frac{y_0\omega^2}{l\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $\theta = \dfrac{y_0\omega^2\cos\omega t}{l\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} + C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t$

រេសូណង់នឹងកើតមានឡើង បើ $\omega \approx \omega_0$ ។ ដរាបណា $\omega \neq \omega_0$ ចលនានៃប្រព័ន្ធគឺស្ថិរភាព។

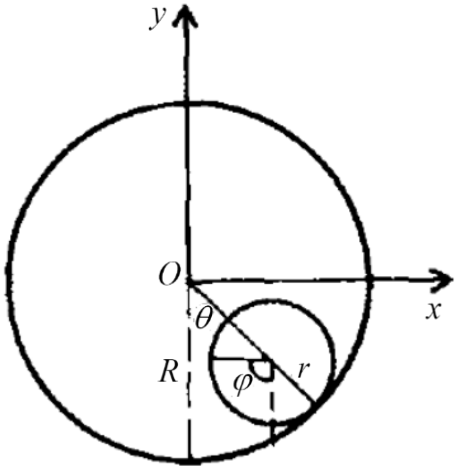
ឧទាហរណ៍២៦៖ អង្គធាតុស្មើសាច់មានរាងជាស៊ីឡាំងមានកាំ r និងម៉ាស m រមៀលដោយមិនរអិលលើខាងក្នុងស៊ីឡាំងធំនៅស្ងៀមមានកាំ R ដូចបង្ហាញលើរូប។

ក. បើស៊ីឡាំងតូចចាប់ផ្ដើមពីនៅស្ងៀមពីមុំ θ_0 ពីទិសឈរ គណនាកម្លាំងសរុបទិសដៅចុះក្រោម ដែលវាអនុវត្តលើស៊ីឡាំងក្រៅ នៅពេលវាឆ្លងកាត់ចំណុចទាបបំផុត។

ខ. ចូរកំណត់សមីការចលនានៃស៊ីឡាំងខាងក្នុងដោយប្រើវិធីសាស្ត្រកាវីឡាក្រង់។

គ. ចូររកខួបនៃលំយោលតូចជុំវិញទីតាំងលំនឹង។

ដំណោះស្រាយ



យកប្រព័ន្ធកូអរដោនេដូចបង្ហាញលើរូប។

ផ្ចិតម៉ាសនៃស៊ីឡាំងរមៀលមានកូអរដោនេ៖

$$\big((R-r)\sin\theta,\ -(R-r)\cos\theta\big)$$

និងល្បឿន $\big((R-r)\dot\theta\cos\theta,\ (R-r)\dot\theta\sin\theta\big)$

ស៊ីឡាំងមានម៉ូម៉ង់និចលភាព $\frac{1}{2}mr^2$ និងលក្ខខណ្ឌ

រមៀលមិនរអិល មានន័យថា $(R-r)\theta = r\varphi$

ក. នៅលក្ខខណ្ឌដើម $\dot\theta = 0$ នៅ $\theta=\theta_0$។ ឧបមាស៊ីឡាំងមានល្បឿន v នៅពេលវាឆ្លងកាត់ចំណុចទាបបំផុត $\theta = 0$ ។ ការរក្សាថាមពលសរុប $T+V$ ឱ្យ

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot\varphi^2 - mg(R-r) = -mg(R-r)\cos\theta_0$$

ដោយ $r\dot\varphi = (R-r)\dot\theta,\ \ v=(R-r)\dot\theta$

$$\Rightarrow\ mv^2 = \frac{4}{3}(R-r)(1-\cos\theta_0)mg$$

កម្លាំងអនុវត្តដោយស៊ីឡាំងលើស៊ីឡាមងខាងក្រៅ នៅពេលវាឆ្លងកាត់ចំណុចទាបបំផុត ចុះតាមទិសឈរ និងមានតម្លៃ $mg + m(R-r)\dot\theta^2 = mg + \dfrac{mv^2}{(R-r)}$

$$mg + m(R-r)\dot\theta^2 = mg + \frac{4}{3}(1-\cos\theta_0)mg = \frac{1}{3}mg\left(7-4\cos\theta_0\right)$$

ខ. កាវីឡាក្រង់នៃស៊ីឡាំងគឺ

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot\theta^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot\varphi^2 + mg(R-r)\cos\theta = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot\theta^2 + mg(R-r)\cos\theta$$

សមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$ ឱ្យ $\ddot{\theta}+\frac{2}{3}\left(\frac{g}{R-r}\right)\sin\theta=0$

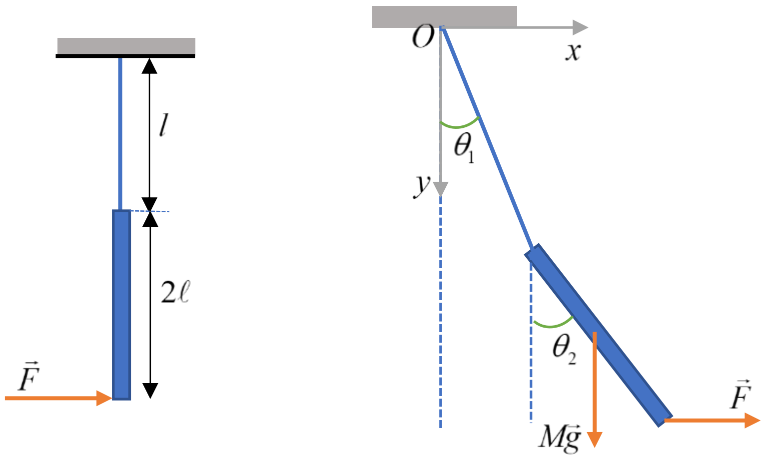
គ. ចំពោះលំយោលតូចជុំវិញទីតាំងលំនឹង $\theta=0$ សមីការចលនាបន្ថយត្រឹម

$$\ddot{\theta}+\frac{2}{3}\left(\frac{g}{R-r}\right)\theta=0$$

នេះមានទម្រង់នៃសមីការ សម្រាប់ចលនាលំយោលអាម៉ូនិចងាយ។ ដូចនេះ លំនឹងជាលំនឹងស៊ប់មានខួប៖

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi\sqrt{\frac{6(R-r)}{g}}$$

ឧទាហរណ៍២៧៖ ដងស្តើង ស្មើសាច់មានប្រវែង $2l$ និងម៉ាស M ត្រូវបានព្យួរដោយខ្សែមិនគិតម៉ាសប្រវែង ℓ ចងទៅដែកគោល។ ដូចបង្ហាញលើរូប កម្លាំងដេក F ត្រូវបានអនុវត្តលើចុងដងសេរី។ ចូរសរសេរសមីការឡាក្រង់ចំពោះប្រព័ន្ធនេះ។ សម្រាប់រយៈពេលដ៏ខ្លី (ដើម្បីឱ្យគ្រប់មុំតូច) កំណត់មុំដែលខ្សែ និងដងធ្វើជាមួយទិសឈរ។ ចាប់ផ្តើមពីនៅនឹង នៅខណៈ $t=0$ ។ ចូរគូសដ្យាក្រាមដើម្បីពន្យល់បង្ហាញចលនាដំបូងនៃដង។



ដំណោះស្រាយ

នៅពេលអនុវត្តកម្លាំង F ក្នុងទិសដេក ហើយដំបូង ខ្សែងនិងដងក្នុងទិសឈរ ចលនាត្រូវបានបង្ខំនៅក្នុងប្លង់ឈរ។ យកតម្រុយដេកាតមកសិក្សា។

កូអរដោនេផ្ចិតម៉ាសនៃដង $(\ell\sin\theta_1+l\sin\theta_2,\ -\ell\cos\theta_1-l\cos\theta_2)$ និងល្បឿនរបស់វា

$$\left(\ell\dot{\theta}_1\cos\theta_1+l\dot{\theta}_2\cos\theta_2,\ \ell\dot{\theta}_1\sin\theta_1+l\dot{\theta}_2\sin\theta_2\right)$$

ម៉ូម៉ង់និចលភាពជុំវិញអ័ក្សកែងទៅនឹងអ័ក្សកាត់តាមផ្ចិតម៉ាសរបស់វាគឺ $\frac{1}{3}Ml^2$

ថាមពលស៊ីនេទិចគឺ $T=\frac{1}{2}M\left[\ell^2\dot{\theta}_1^2+l^2\dot{\theta}_2^2+2l\ell\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right]+\frac{1}{6}M\,l^2\dot{\theta}_2^2$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែលគឺ $V=-Mg(\ell\cos\theta_1+l\cos\theta_2)$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល U នៃកម្លាំងដេកត្រូវឱ្យដោយនិយមន័យ៖

$$U=-\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=-F\left(\ell\sin\theta_1+2l\sin\theta_2\right)$$

ដូចនេះ ការីឡាក្រង់ $L=T-V-U$

$$L=\frac{1}{2}M\left[\ell^2\dot{\theta}_1^2+l^2\dot{\theta}_2^2+2l\ell\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right]+\frac{1}{6}M\,l^2\dot{\theta}_2^2$$
$$+Mg(\ell\cos\theta_1+l\cos\theta_2)+F\left(\ell\sin\theta_1+2l\sin\theta_2\right)$$

សមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$

$$M\ell\ddot{\theta}_1+Ml\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+M\ell\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)+Mg\sin\theta_1-F\cos\theta_1=0$$

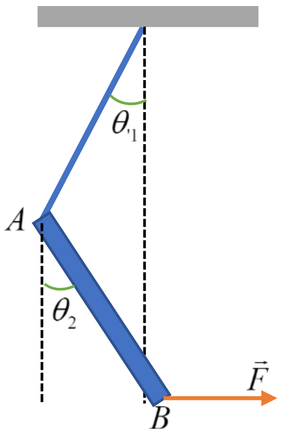
បន្ទាប់ឱ្យ $Ml\ddot{\theta}_1+M\ell\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+M\ell\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)+Mg\sin\theta_1-F\cos\theta_1=0$

$$\frac{4}{3}M\ell\ddot{\theta}_2+Ml\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-Ml\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)+Mg\sin\theta_2-2F\cos\theta_2=0$$

ចំណាំថា បើ F តូច ដើម្បីឱ្យ $\theta_1,\ \theta_2,\ \dot{\theta}_1,\ \dot{\theta}_2$ ជាត្រូវបានចាត់ទុកតូច នៅតែតួលំដាប់មួយ សមីការខាងលើក្លាយជា៖

$$Ml\ddot{\theta}_1+M\ell\ddot{\theta}_2+Mg\theta_1-F=0$$

$$\frac{4}{3}M\ell\ddot{\theta}_2+Ml\ddot{\theta}_1+Mg\theta_2-2F=0$$



ចលនាចាប់ផ្ដើមពីនៅនឹងនៅ t = 0 ។ ចំពោះរយៈពេលខ្លី Δt បន្ទាប់មកកម្លាំងអាចត្រូវបានពិចារណា នៅពេលឱ្យលេចឡើង ចំពោះអាំពុលស្យុង $F\Delta t$ និងម៉ូម៉ង់អាំពុលស្យុង $F\ell\Delta t$ ធៀបផ្ចិតម៉ាសនៃដង។ នោះយើងបាន៖

$F\Delta t=M(l\dot{\theta}_1\cos\theta_1+\ell\dot{\theta}_2\cos\theta_2)\approx Ml\dot{\theta}_1+M\ell\dot{\theta}_2$

នៅពេលមុំ θ_1,θ_2 នៅតែមុំតូច និង $F\ell\Delta t=\frac{1}{3}M\ell^2\dot{\theta}^2$

ដោយបំបាត់ $F\Delta t$ ពីខាងលើ យើងបាន៖ $\dot{\theta}\approx-\frac{2\ell}{3l}\dot{\theta}_2$

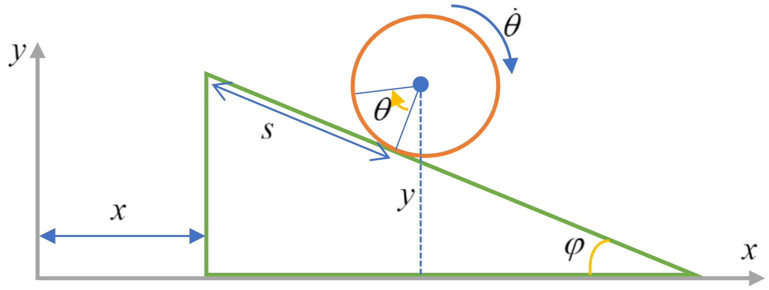
នៅពេល $\theta_1 = \bar{\dot{\theta}}\Delta t \approx \frac{1}{2}\dot{\theta}_1\Delta t, \quad \theta_2 \approx \frac{1}{2}\dot{\theta}_2\Delta t$ ខាងលើឱ្យ $\theta_1 \approx -\frac{2\ell}{3l}\theta_2$

សណ្ឋានរូបដើមនៃប្រព័ន្ធត្រូវបានបង្ហាញដូចរូប។

ឧទាហរណ៍២៨៖ ស្វ៊ែមានម៉ាស M និងកាំ R រមៀលមិនរអិលចុះតាមជុំត្រីកោណមានម៉ាស m ដែលធ្វើចលនាសេរីលើផ្ទៃដេកគ្មានកកិត ដូចបង្ហាញលើរូប។

ក. ចូររកកាឡាក្រង់និងសមីការឡាក្រង់ ចំពោះប្រព័ន្ធនេះរងនូវកម្លាំងទំនាញនៅផ្ទៃដី។

ខ. ចូររកចលនានៃប្រព័ន្ធដោយធ្វើអាំងតេក្រាលសមីការឡាក្រង់ ដំបូងវត្ថុទាំងអស់នៅស្ងៀម និងផ្ចិតស្វ៊ែនៅចម្ងាយ H ពីលើផ្ទៃ។



ដំណោះស្រាយ

ក. កាឡាក្រង់និងសមីការឡាក្រង់៖

ដោយប្រើតម្រុយនឹងដូចរូប និងមុំ θ ជាមុំរង្វិលរបស់ស្វ៊ែ។ នៅពេលរមៀលមិនរអិលចុះតាមប្លង់ទេរ ផ្ចិតរបស់វាមានកូអរដោនេ $(x+(s_0+R\theta)\cos\varphi,\ H-R\theta\sin\varphi)$ និងល្បឿន $\left(\dot{x}+R\dot{\theta}\cos\varphi,\ -R\dot{\theta}\sin\varphi\right)$

នៅខណៈ: $t=0, x=0, \theta=0, s=s_0, y+H, \dot{x}=\dot{\theta}=0$

កាឡាក្រង់

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{x}\dot{\theta}\cos\varphi\right) + \frac{1}{5}MR^2\dot{\theta}^2 - Mg\left(H - R\theta\sin\varphi\right)$$

សមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

ឱ្យ $(m+M)\ddot{x} + MR\ddot{\theta}\cos\varphi = 0$ និង $\ddot{x}\cos\varphi + \frac{7}{5}R\ddot{\theta} - g\sin\varphi = 0$

ខ. សមីការចលនានៃប្រព័ន្ធ៖

ដោយលុបបំបាត់ $\ddot{x}$ ពីខាងលើឱ្យ $\left(\frac{7}{5}-\frac{M\cos^2\varphi}{m+M}\right)\ddot{\theta}=\frac{g\sin\varphi}{R}$

ដោយធ្វើអាំងតេក្រាលជាមួយលក្ខខណ្ឌដើម ទទួលបាន៖ $\theta=\frac{5(m+M)\sin\varphi}{2\left[7(m+M)-5M\cos^2\varphi\right]}\frac{gt^2}{R}$

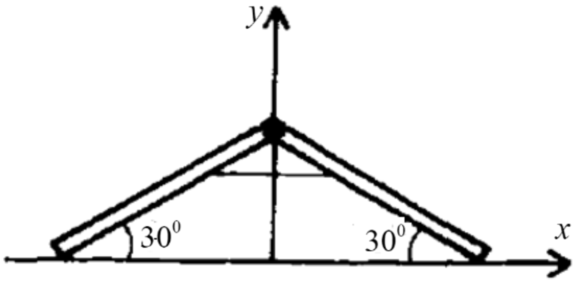
និង $x=-\frac{MR\cos\varphi}{m+M}=-\frac{5M\sin(2\varphi)}{4\left[7(m+M)-5M\cos^2\varphi\right]}gt^2$

ចំណាំថា នៅពេលស្វ៊ែរមៀលចុះប្លង់ទេរ ដុំត្រីកោណចលនាទៅឆ្វេង ដោយគោរពច្បាប់រក្សាបរិមាណចលនា។

ឧទាហរណ៍២៩៖ របារស្តើងពីរមានម៉ាស m និង l ភ្ជាប់ដោយកន្លះគ្មានកកិត និងខ្សែ។ ប្រព័ន្ធត្រូវបានដាក់ស្មៀមនៅលើផ្ទៃរលោង ដូចបង្ហាញលើរូប។ នៅខណៈ $t=0$ ខ្សែត្រូវបានកាត់។ មិនគិតម៉ាសខ្សែ និងកន្លះ។

ក. ចូររកល្បឿននៃកន្លះ នៅពេលវាមកដល់កម្រាល។

ខ. ចូររករយៈពេលដែលកន្លះមកដល់កម្រាល ។



ដំណោះស្រាយ

ក. ដោយសារ ស៊ីមេទ្រី កន្លះធ្លាក់តាមទិសឈរ។

កូអរដោនេនៃផ្ចិតម៉ាសនៃរបារ

$x_1=\frac{1}{2}l\cos\theta,\ y_1=\frac{1}{2}l\sin\theta$ និង $x_2=-\frac{1}{2}l\cos\theta,\ y_2=\frac{1}{2}l\sin\theta$

កុំប៉ូសង់នៃល្បឿន $\dot{x}_1=-\frac{1}{2}l\dot{\theta}\sin\theta,\ \dot{y}_1=\frac{1}{2}l\dot{\theta}\cos\theta$ និង $\dot{x}_2=\frac{1}{2}l\dot{\theta}\sin\theta,\ y_2=\frac{1}{2}l\dot{\theta}\cos\theta$

របារនីមួយៗមានម៉ូម៉ង់និចលភាព $\frac{1}{12}ml^2$ វិលជុំវិញអ័ក្សដេកកាត់តាមផ្ចិតម៉ាស។ ការីឡាក្រង់នៃប្រព័ន្ធគឺ

$$L=T-V=\frac{1}{4}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}^2-mgl\sin\theta=\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2-mgl\sin\theta$$

សមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$

នោះ ឱ្យ $\ddot{\theta}+\frac{3g}{2l}\cos\theta=0$ ដោយ $\ddot{\theta}=\frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$ និង $\dot{\theta}=0$ នៅពេល $\theta=30^0$

ធ្វើអាំងតេក្រាល សមីការខាងលើ ទទួលបាន៖ $\dot{\theta}^2=\frac{3g}{2l}(1-2\sin\theta)$

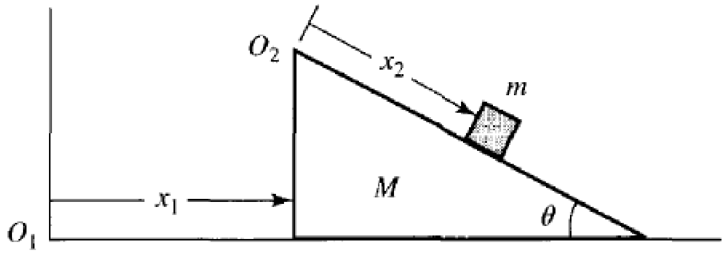
ដូចនេះ នៅពេល កន្លះមកដល់កម្រាល $\theta = 0$ និង $\dot{\theta} = -\sqrt{\dfrac{3g}{2l}}$

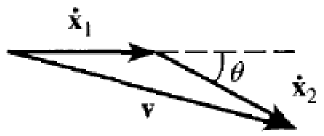
មានន័យថា $v = l\dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{3gl}{2}}$

ខ. រយៈពេលដែលកន្លះមកដល់កម្រាល ឱ្យដោយៈ

$$t = \int_{30^0}^{0} \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \int_{30^0}^{0} \frac{d\theta}{-\sqrt{\dfrac{3g}{2l}}(1-2\sin\theta)} = \sqrt{\frac{2l}{3g}} \int_{0}^{30^0} \frac{d\theta}{1-2\sin\theta}$$

ឧទាហរណ៍៣០៖ ជុំប្លង់ទេរមានម៉ាស M កំពុងរអិលលើផ្ទៃដេក នៅពេលភាគល្អិតមានម៉ាស m កំពុងរអិលលើផ្ទៃប្លង់ទេររលោងដូចបង្ហាញលើរូប។ ចូររកសមីការចលនានៃភាគល្អិត និងប្លង់ទេរ។





ដំណោះស្រាយ

ប្រព័ន្ធមានពីរដឺក្រេសេរី ដូចនេះ យើងត្រូវការកូអរដោនេទូទៅពីរ ដើម្បីពណ៌នាសណ្ឋានរូបនៃប្រព័ន្ធ។ កូអរដោនេទាំងពីរ x_1 និង x_2 ដូចបង្ហាញលើរូប តាងបន្លាស់ទីនៃ M និង m ពីគល់ O_1 និង O_2 រៀង។

$\dot{x}_1$ ជាល្បឿននៃ M ធៀបទៅនឹង O_1 និង $\dot{x}_2$ ជាល្បឿននៃ m ធៀបទៅនឹង O_2 ។ $\vec{v}$ ជាល្បឿននៃ m ធៀបទៅនឹង O_1 ដែល $\vec{v} = \dot{\vec{x}}_1 + \dot{\vec{x}}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad \Rightarrow \; v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\theta}$

ថាមពលស៊ីនេទិច $T = \dfrac{1}{2}Mv_1^2 + \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}Mv_1^2 + \dfrac{1}{2}m\left(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\theta\right)^2$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V = -mgx_2\sin\theta$

ការីឡាក្រង់ $L = T - V = \dfrac{1}{2}Mv_1^2 + \dfrac{1}{2}m\left(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\theta\right)^2 + mgx_2\sin\theta$

សមីការឡាក្រង់មានពីរគឺ $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0$ និង $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0$

ជាលទ្ធផលនៃសមីការទាំងពីរគឺ $m\ddot{x}_2 + m\ddot{x}_1\cos\theta = 0$ និង $\left(M\,\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2\cos\theta\right) - mg\sin\theta = 0$

ដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទទួលបាន ចម្លើយ៖

$$\ddot{x}_1 = \frac{-1}{m\cos^2\theta - M - m} mg\sin\theta \quad \text{និង} \quad \ddot{x}_2 = \frac{1}{m\cos^2\theta - M - m} mg\sin\theta\cos\theta$$

ដោយដឹងថាលក្ខខណ្ឌដើម យើងអាចដោះស្រាយសមីការទាំងនេះ ចំពោះល្បឿន និងបន្លាស់ទីដោយធ្វើអាំងតេក្រាល $\ddot{x}_1$ និង $\ddot{x}_2$ ។

1.4. គោលការណ៍ហាមីលតុន

N សមីការឡាក្រង់ដែលសាកសមប្រព័ន្ធចំណុចរូបធាតុរក្សា ចំពោះ n ដឺក្រេសេរី អាចត្រូវបង្កើតរូបមន្តតាមបែបបម្រែបម្រួល ដូចគោលការណ៍ Fermat នៅក្នុងអុបទិចធរណីមាត្រ។ ការបង្កើតរូបមន្តនេះត្រូវបានស្គាល់នៅក្នុងមេកានិចក្រោមនាមគោលការណ៍ហាមីលតុន។

ពំនោល: ចន្លោះខណៈពីរ t_1 និង t_2 ចលនានៃប្រព័ន្ធរូបធាតុដែលជាចលនាបង្កើតតម្លៃជញ្ជ្រុំនៃអំពើ A៖

$$\delta A = 0 \text{ ដោយ } A = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt$$

ពាក្យជញ្ជ្រុំមានន័យដូចក្នុងគោលការណ៍ Fermat៖ កាលណាគេគណនាអាំងតេក្រាល A តាមបណ្តោយផ្លូវជិតគ្នា ដែលខណៈ t_1 និង t_2 នៅនឹង ផលគន្លងដើរតាមប្រព័ន្ធជាផ្លូវដែលបង្កើតអប្បបរមានៃ A ឬក៏អតិបរមា។

2. ការីហាមីលតុន និងសមីការកាណូនិច

2.1. លំហផាស

នៅក្នុងទ្រឹស្តីនៃសមីការឡាក្រង់ អថេរជា n ដឺក្រេសេរី ឬកូអរដោនេនៃតំណាងចំណុចរបស់ប្រព័ន្ធរូបធាតុនៅក្នុងលំហនៃសណ្ឋានរូប។ n សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ពីរធៀបទៅនឹងអថេរទាំងនេះបង្កើតសមីការចលនា។

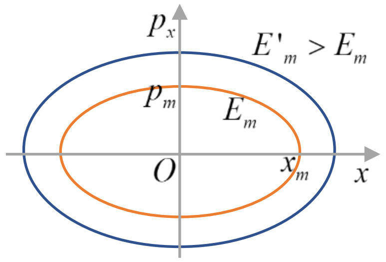
នៅក្នុងទ្រឹស្តីហាមីលតុន គេចាប់អារម្មណ៍ភាពមេកានិចនៃប្រព័ន្ធ ដែលអាស្រ័យ 2n អថេរមិនអាស្រ័យៈ n កូអរដោនេ $\{q_i\}$ នៃលំហសណ្ឋានរូប និង n ម៉ូម៉ង់ធ្លាស់ $\left\{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right\}$ ។

គេហៅលំហផាស លំមាន 2n វិមាត្រដែលចំណុចរូបធាតុមួយតាងភាពមេកានិចនៃប្រព័ន្ធ។ ចំនួនអថេរនេះត្រូតជាមួយលក្ខខណ្ឌដើមដែលចរិកលក្ខណៈភាពដើមនៃប្រព័ន្ធៈ ជាទូទៅ n ប៉ារ៉ាម៉ែតនៃទីតាំង និង n ប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបរិមាណចលនា។

ឧទាហរណ៍៣១៖ លំយោលកអាម៉ូនិច។

នោះ $q_1 = x$, $p_1 = m\dot{x}$ ។ អថេរទាំងនេះ q_1 និង $p_x = m\dot{x}$ ត្រូវបានបង្កើតដោយសមីការរក្សាថាមពលមេកានិច៖

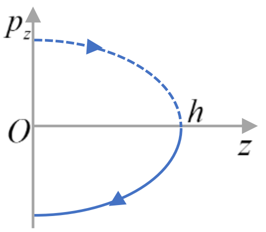
$$E_M = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = \text{ថេរ} \text{ ឬក៏ } \frac{p_x^2}{2mE_M} + \frac{kx^2}{2E_M} = 1$$



នៅក្នុងលំហផាស គន្លងគូសដោយចំណុចតំណាងនៃភាពមេកានិចជាអេលីប ដែលមានកន្លះអ័ក្ស $(2mE_M)^{1/2}$ និង $\left(\frac{2E_M}{k}\right)^{1/2}$ (ដែលអាស្រ័យថាមពល) តាងតម្លៃអតិបរមា x_m និង p_m នៃអេឡុងកាស្យុងនិងបរិមាណចលនា។ ងាយស្រួលសរសេរ៖

$$\left(\frac{p_x}{p_m}\right)^2 + \left(\frac{x}{x_m}\right)^2 = 1 \text{ ដោយ } p_m = (2mE_M)^{1/2} \text{ និង } x_m = \left(\frac{2E_M}{k}\right)^{1/2}$$

ឧទាហរណ៍៣២៖ ទន្លាក់សេរី។



អថេរ $q_1 = z$ និង $p_1 = m\dot{z}$ ត្រូវបានបង្កើតដោយសមីការរក្សាថាមពលមេកានិច៖

$$E_M = \frac{p_z^2}{2m} + mgz = \text{ថេរ} = mgh$$

បើដំបូង $p_z = 0$ និង $z = h$។ ដូចនេះ នៅក្នុងលំហផាស ខ្សែកោងគូសដោយចំណុចតាងភាពមេកានិចនៃប្រព័ន្ធជាកំណាត់ប៉ារ៉ាបូលដែល $p_z < 0$។ ចំណាំថា មែកវិជ្ជមាននៃប៉ារ៉ាបូល $(p_z > 0)$ ទាក់ទងទៅនឹងគន្លងគូសរវើកស៊ីប មានន័យថាដោយសញ្ញាប៉ារ៉ាម៉ែតបរិវត្ត៖ ចំណុចរូបធាតុឡើងតាមអ័ក្សឈរចេញពីទីតាំងរបស់វាក្រោមបំផុតជាមួយល្បឿនដើមមួយមិនសូន្យរហូតដល់កម្ពស់hដែលល្បឿនរបស់វាសូន្យ។

2.2. ការីហាមីលតុន

ក. និយមន័យ

ចំពោះប្រព័ន្ធរូបធាតុធ្វើចលនាធៀបនឹងតម្រុយកាលីលេ ℛ ក្រោមអំពើនៃកម្លាំងក្រៅនិងកម្លាំងក្នុងដែលជាដេរីវេនៃថាមពលប៉ុតង់ស្យែល $E_P(\pi\{q_i\},t)$ ការីហាមីលតុងជាអនុគមន៍(អាស្រ័យប៉ារ៉ាម៉ែតទីតាំង $\{q_i\}$)នៃម៉ូម៉ង់ធ្លាស់ $\{p_i\}$ នោះ៖

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

បម្លែងនេះត្រូវបានស្គាល់ក្រោមនាម បម្លែង Legendre។ វាអនុញ្ញាតឆ្លងកាត់ការីឡាក្រង់ (អនុគមន៍បង្កើតជាមួយអថេរ $(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)$)ទៅការីហាមីលតុន (អនុគមន៍នៃភាពអថេរ $(\{q_i\},\{p_i\},t)$)។ ជាការពិត៖

$$dL = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

និង $dH = d\sum_i p_i\dot{q}_i - dL = \sum_i (p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i) - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt$

ដោយសារ $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ និង $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ ៖

$$dH = \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

ខ. ករណីប្រព័ន្ធធម្មជាតិ

ប្រព័ន្ធមួយត្រូវបានហៅថា ធម្មជាតិ បើថាមពលប៉ូតង់ស្យែល និង constraint ដែលមិនអាស្រ័យពេល។ វាជាលទ្ធផលថាកូអរដោនេនៃចំណុចAណាមួយនៃប្រព័ន្ធ អនុគមន៍តែប៉ារ៉ាម៉ែតសណ្ឋានរូប $\{q_i\}:\overrightarrow{OA}(\{q_i\})$។ គេទាញបានកន្សោមវ៉ិចទ័រល្បឿននៃ A ៖

$$\vec{v}_A = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \overrightarrow{OA}}{\partial q_i}\right)\frac{dq_i}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \overrightarrow{OA}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i$$

ថាមពលស៊ីនេទិច $E_C = \sum_A \frac{1}{2}m_A v_A^2 = \sum_A\sum_i\sum_j \left(\frac{\partial \overrightarrow{OA}}{\partial q_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial \overrightarrow{OA}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j = \sum_i\sum_j a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$

ដោយតាង $a_{ij} = \sum_A \left(\frac{\partial \overrightarrow{OA}}{\partial q_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial \overrightarrow{OA}}{\partial q_j}\right)$

ថាមពលស៊ីនេទិចមិនអាស្រ័យពេល។ ម្យ៉ាងទៀត ដោយសារ $E_P = E_P(\{q_i\})$ វាក្លាយជា

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j a_{ij}\dot{q}_j \quad \text{និង} \quad \sum_i p_i\dot{q}_i = 2\sum_i\sum_j a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = 2E_C$$

ដូចនេះ $H = \sum_i p_i\dot{q}_i - L = E_C + E_P = E$

ការីហាមីលតុននៃប្រព័ន្ធធម្មជាតិមួយបញ្ជាក់អត្តសញ្ញាណថាមពលរបស់វា។

2.3. សមីការកាណូនិច

យើងឱ្យតម្លៃ(តាមពីររបៀប) ឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអនុគមន៍ហាមីលតុន។ ដោយពិនិត្យ H ដូចអនុគមន៍មាន 2n អថេរ $(\{q_i, p_i\})$ និងពេល t យើងបាន៖

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt$$

ពីកន្សោមខាងលើ $dH=\sum_i(\dot{q}_i dp_i-\dot{p}_i dq_i)-\frac{\partial L}{\partial t}dt$

យើងទាញបាន $\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$ និង $\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}$

2n សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃលំដាប់១នៃ q_i និង p_i ត្រូវបានអនុវត្តន៍សមីការកាណូនិចនៃចលនា៖

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i} \text{ និង } \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

ឧទាហរណ៍៣៣៖ យើងពិនិត្យភាគល្អិតមួយផ្លាស់ទីនៅក្នុងប្លង់ក្រោមអំពើនៃកម្លាំងកាត់ផ្ចិតដែលជាថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V(r)$ ។ នៅក្នុងកូអរដោនេប៉ូលែប្លង់ យើងបាន៖

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)$$

នាំឱ្យ $p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}$, $p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$

ទាញបានការីហាមីលតុន $H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)+V(r)$

និងសមីការចលនា $\dot{r}=\frac{p_r}{m}$ $\quad \dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2}$ $\quad \dot{p}_\theta=0$ $\quad \dot{p}_r=-\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{p_\theta^2}{mr^3}$

យើងឃើញថាការរក្សាម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច ($p_\theta=$ ថេរ)ហើយសមីការចលនារ៉ាដ្យាល់(តាមកាំ)។

ឧទាហរណ៍៣៤៖ ចូររកសមីការចលនាគ្រាប់បាញ់ឡើងលើដោយប្រើការីហាមីលតុន ។

ដំណោះស្រាយ

យើងឃើញថា ការីឡាក្រង់ $L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2-mgy$

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2-mgy\right)=m\dot{x} \text{ និង } p_y=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2-mgy\right)=m\dot{y}$$

$$\Rightarrow \dot{x}=\frac{p_x}{m},\ \dot{y}=\frac{p_y}{m} \text{ នោះ: } L=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}-mgy$$

ឥឡូវយើងបាន៖ $\sum_i p_i\dot{x}_i=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}=\frac{p_x^2}{m}+\frac{p_y^2}{m}$

ការីហាមីលតុន: $H=\sum_i p_i\dot{x}_i-L=\frac{p_x^2}{m}+\frac{p_y^2}{m}-\left(\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}-mgy\right)=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+mgy$

សមីការចលនា: $\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{\partial}{\partial p_x}\left(\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+mgy\right)=\frac{p_x}{m}$

បន្ទាប់ $\frac{dp_x}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+mgy\right)=0$

នេះជាបរិមាណចលនាតាមទិស x ថេរគឺ៖ $\frac{dx}{dt}=\frac{p_x}{m} \quad \Rightarrow \quad x(t)=\frac{p_x}{m}t+x_0$

ឥឡូវតាមទិស y ៖ $\frac{dy}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_y}=\frac{\partial}{\partial p_y}\left(\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+mgy\right)=\frac{p_y}{m}$

និង $\frac{dp_x}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+mgy\right)=-mg$

ដូចនេះ $\frac{dp_y}{dt}=-mg \quad \Rightarrow \quad p_y=-mgt+p_{0y}$

ដូចនេះ កូអរដោនេ y គឺ៖

$$\frac{dy}{dt}=\frac{p_y}{m}=-gt+\frac{p_{0y}}{m} \quad \Rightarrow \quad y(t)=-\frac{1}{2}g\,t^2+\frac{p_{0y}}{m}+y_0$$

2.4. ការរក្សាថាមពលនិងម៉ូម៉ង់ធ្លាស់

ក. ការរក្សាថាមពល

ចំពោះប្រព័ន្ធរូបធាតុធម្មជាតិ(ចលនាធៀបទៅនឹងតម្រុយកាលីលេ)ការីហាមីលតុន H មិនអាស្រ័យពេល។

យើងទាញបាន៖ $\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}=0$ នាំឱ្យ $H=E=$ថេរ

អាំងវ៉ារ្យង់ធៀបនឹងពេលនៃការីហាមីលតុននាំទៅការរក្សាថាមពលនៃប្រព័ន្ធ។ គេនិយាយថា ចំពោះប្រព័ន្ធដែលឱ្យ ពេលគឺអូម៉ូសែន។

ខ. ការរក្សាម៉ូម៉ង់ធ្លាស់

កាលណាអថេរមួយនៃក្នុងចំណោមអថេរ q_i នៃលំហសណ្ឋានរូបមិនបានលេចឡើងនៅក្នុងការីហាមីលតុន ការីឡាក្រង់ ម៉ូម៉ង់ធ្លាស់ p_i គឺថេរ។ តាមសមីការឡាក្រង់ នោះម៉ូម៉ង់ធ្លាស់៖ $p_i=$ថេរ

នៅក្នុងករណីភាគល្អិតរងតែកម្លាំងកាត់ផ្ចិត ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V(r)$ មិនអាស្រ័យអថេរមុំ θ ម៉ូម៉ង់ធ្លាស់ p_θ ដែលបញ្ជាក់អត្តសញ្ញាណម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៃភាគល្អិត គឺថេរ។

ជាទូទៅ បើការីហាមីលតុងជាអាំងវ៉ារ្យង់ធៀបទៅនឹងកូអរដោនេទាំងបីនៃដេកាត x, y, z នៃផ្ចិតម៉ាស C មានន័យថាចលនារំកិល ម៉ូម៉ង់ឆ្លាស់ p_x, p_y, p_z គឺថេរ។

អាំងវ៉ារ្យង់នៃការីហាមីលតុនដោយរំកិលនាំទៅការរក្សាបរិមាណចលនានៃប្រព័ន្ធ។ គេនិយាយថា លំហាគឺអូម៉ូសែន។ តាមរបៀបស្រដៀងគ្នា បើការីហាមីលតុនជាអាំងវ៉ារ្យង់ធៀបទៅកូអរដោនេមុំទាំងបីនៅក្នុងចលនាជុំវិញផ្ចិតម៉ាស C មានន័យថាដោយរង្វិល ម៉ូម៉ង់ឆ្លាស់ទាំងបី L_1, L_2, L_3 គឺថេរ។ អាំងវ៉ារ្យង់នៃការីហាមីលតុនដោយរង្វិលនាំទៅការរក្សាម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធ។ គេនិយាយថា លំហាគឺអ៊ីសូត្រូប។

ឧទាហរណ៍៣៥៖ ភាគល្អិតមួយចលនា នៅក្នុងប្លង់ដេក ក្នុងប៉ូតង់ស្យែលកម្លាំងកាត់ផ្ចិត $U(r)$ ។ នៅក្នុងប្រព័ន្ធកូអរដោនេប៉ូលែ ចូររកម៉ូម៉ង់ឆ្លាស់ p_r និង p_θ និងការី Hamilton ។ ចូរបង្ហាញថា ថាមពល និងម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចនៃភាគល្អិតត្រូវបានរក្សា។

ដំណោះស្រាយ

សំដែងកូអរដោនដេកាត ជាអនុគមន៍នៃកូអរដោនេប៉ូលែ៖ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

កុំប៉ូសង់ល្បឿន $\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$, $\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$

នោះ $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

ថាមពលស៊ីនេទិច $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V = U(r)$

ការីឡាក្រង់ $L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - U(r)$

ម៉ូម៉ង់ឆ្លាស់ $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$, $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$

ការី Hamilton $H = T + V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r)$

ការរក្សាថាមពល៖ ជាទូទៅ H អាចមានអាស្រ័យពេល ដូចនៅក្នុងប្រព័ន្ធកម្លាំងខ្លះ៖ គឺ $H = H(q, p, t)$

នោះ H ប្រែប្រួលជាមួយពេល សម្រាប់ហេតុផលពីរ: ទី១ ដោយសារ អាស្រ័យ t និងទី២ ដោយសារ អថេរ q និង p ជាអនុគមន៍នៃពេល។ យើងបាន៖

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k}\dot{p}_k$$

សមីការ Hamilton $\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k$, $\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_k \left[\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right] \quad \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

សមីការនេះថា H ប្រែប្រួលតែជាមួយពេល តាមរយៈនិមិតនៃពេលអាស្រ័យជាក់លាក់របស់វា។ បម្រែបម្រួលសរុបត្រូវបានបង្កើតដោយ ការពិតដែលបម្រែបម្រួល q និង p ជាមួយពេលគឺសូន្យ។

ឥឡូវ នៅក្នុងប្រព័ន្ធរក្សា ទាំង T និង V ក៏មិនមានភាពជាក់លាក់អាស្រ័យពេលដែរ។

ដូចនេះ $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dH}{dt} = 0$ នេះនាំទៅច្បាប់រក្សាថាមពល។

$$H = T + V = E = \text{ថេរ}$$

រូបមន្តការី Hamilton អាចនាំទៅរកច្បាប់រក្សាផ្សេងទៀត។

ការរក្សាម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចៈ ការី Hamilton អាចត្រូវបានសរសេរ៖ $H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$

នៅក្នុងប្រព័ន្ធកូអរដោនេប៉ូលែ

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}^2 - U(r) \right) \text{ ឬ } H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + U(r)$$

នោះ $-\dot{p}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$ នេះនាំទៅ ការរក្សាម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច $p_\theta = L = \text{ថេរ}$

ឧទាហរណ៍៣៦៖

ក. អង្គធាតុមានម៉ាស m ត្រូវបានបង្ខំដើម្បីឱ្យចលនា ក្រោមទំនាញ តាមខ្សែរឹងដែលមានរាងប៉ារ៉ាបូល $y = \frac{x^2}{\ell}$ ដែល x និង y ជាអ័ក្សអរដោនេ។ ចូរបង្ហាញថា ការីឡាក្រង់សម្រាប់ប្រព័ន្ធគឺ $L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \left(1 + \frac{4x^2}{\ell^2}\right) - \frac{mgx^2}{\ell}$ ។

ខ. ចូរធ្វើដេរីវេ ការី Hamilton សម្រាប់ភាគល្អិតទោលមានម៉ាស m ចលនានៅក្នុងមួយវិមាត្រ រងកម្លាំងរក្សាជាមួយប៉ូតង់ស្យែល $U(r)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា ការីឡាក្រង់សម្រាប់ប្រព័ន្ធគឺ $L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \left(1 + \frac{4x^2}{\ell^2}\right) - \frac{mgx^2}{\ell}$ ៖

យើងមាន $y = \frac{x^2}{l} \Rightarrow \dot{y} = \frac{2x\dot{x}}{l}$

ល្បឿន $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2\left(1+\frac{4x^2}{l^2}\right)$

ថាមពលស៊ីនេទិច $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1+\frac{4x^2}{l^2}\right)$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V = mgy = \frac{mgx^2}{l}$

ការីឡាក្រង់ $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1+\frac{4x^2}{l^2}\right) - \frac{mgx^2}{l}$

ខ. ការី Hamilton សម្រាប់ភាគល្អិតទោលមានម៉ាស m ចលនានៅក្នុងមួយវិមាត្រ រងកម្លាំងរក្សា ជាមួយប៉ូតង់ស្យែល $U(r)$ ៖

ការីឡាក្រង់ $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - U(r)$

ម៉ូម៉ង់ឆ្លាស់ $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$ និង $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$

ការី Hamilton $H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + U(r)$

ឧទាហរណ៍៣៧៖ ភាគល្អិតមានម៉ាស m ត្រូវបានទាញសំដៅចំណុចដែលឱ្យដោយកម្លាំងមានតម្លៃ k/r^2 ដែល k ជាចំនួនថេរ។ ចូរធ្វើដេរីវេសម្រាប់ការី Hamilton និងសមីការចលនានៃ Hamilton ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើប្រព័ន្ធកូអរដោនេប៉ូលែប្លង់ (r,θ) ៖

ថាមពលស៊ីនេទិច $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int \frac{k}{r^2}dr = -\frac{k}{r}$

ការីឡាលក្រង់ $L = L(r,\dot{r},\dot{\theta}) = T - V = T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{k}{r}$

ម៉ូម៉ង់ឆ្លាស់ $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$ និង $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$

ថាមពលស៊ីនេទិចអាចត្រូវបានសរសេរ៖

$$T=\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{p_r}{m}\right)^2+r^2\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2\right]=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}$$

ដូចនេះ ការី Hamilton ក្លាយជា $H=H(r,p_r,p_\theta)=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)-\frac{k}{r}$

សមីការចលនាចលនាត្រូវបានរកឃើញចេញពីសមីការកាណូនិចៈ

$$\frac{\partial H}{\partial q_k}=-\dot{p}_k \text{ និង } \frac{\partial H}{\partial p_k}=\dot{q}_k$$

កូអរដោនេទូទៅគឺ r,θ,p_r និង p_θ នោះ៖

$$-\dot{p}_r=\frac{\partial H}{\partial r}=-\frac{p_\theta^2}{mr^3}+\frac{k}{r^2} \Rightarrow \dot{p}_r=\frac{p_\theta^2}{mr^3}-\frac{k}{r^2}$$

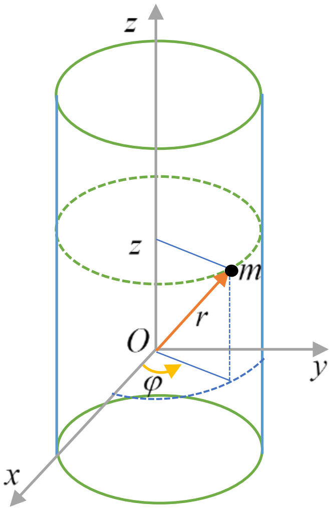
$$-\dot{p}_\theta=\frac{\partial H}{\partial \theta}=0 \text{ ឬ } \dot{p}_\theta=0 \Rightarrow p_\theta=\text{ថេរ}$$

ល្បឿនរ៉ាដ្យាល់ $\dot{r}=\frac{\partial H}{\partial p_r}=\frac{p_r}{m} \Rightarrow p_r=m\dot{r}$

ល្បឿនមុំ $\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2} \Rightarrow p_\theta=mr^2\dot{\theta}$

ឧទាហរណ៍៣៨៖ ចូរពណ៌នាចលនានៃភាគល្អិតមានម៉ាស m បង្ខំឱ្យមានចលនាលើផ្ទៃនៃស៊ីឡាំងមានកាំ R និងទាញសំដៅទៅគល់តម្រុយដោយកម្លាំងដែលសមាមាត្រទៅនឹងចម្ងាយនៃភាគល្អិតពីគល់។

ដំណោះស្រាយ



ចលនានៃភាគល្អិតអាចត្រូវបានពណ៌នាដោយប្រព័ន្ធកូអរដោនេដេកាត

x, y, z ឬប្រព័ន្ធកូអរដោនេស៊ីឡាំង ρ, φ, z ។

សមីការ constraint គឺ $x^2+y^2=R^2$ នៅពេលកម្លាំងទំនាញគឺ $\vec{F}=-k\vec{r}$

ដែល k ជាចំនួនថេរ ហើយ $r^2=x^2+y^2+z^2$ ។

ដោយប្រើប្រព័ន្ធកូអរដោនេស៊ីឡាំង ថាមពលស៊ីនេទិចគឺ

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\right)$$

ដោយ $\rho=R \Rightarrow \dot{\rho}=0$ នោះ៖ $T=\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\right)$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V=\frac{1}{2}k\,r^2=\frac{1}{2}k\left(x^2+y^2+z^2\right)=\frac{1}{2}k\left(R^2+z^2\right)$

ការីឡាក្រង់ $L=L(z,\dot{\varphi},\dot{z})=T-V=\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\right)-\frac{1}{2}k\left(R^2+z^2\right)$

យើងជំនួស $\dot{\varphi}$ និង $\dot{z}$ ដោយ p_φ និង p_r នោះ

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=mR^2\dot{\varphi}\ \Rightarrow\ \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mR^2}$$

$$p_z=\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}=m\dot{z}\ \Rightarrow\ \dot{z}=\frac{p_z}{m}$$

ថាមពលស៊ីនេទិច $T=\frac{1}{2}m\left[R^2\left(\frac{p_\varphi}{mR^2}\right)^2+\left(\frac{p_z}{m}\right)^2\right]=\frac{p_\varphi^2}{2mR^2}+\frac{p_z^2}{2m}$

ការី Hamilton $H=H(z,\varphi,p_\varphi,p_z)=T+V=\frac{p_\varphi^2}{2mR^2}+\frac{p_z^2}{2m}+\frac{1}{2}k\,z^2$

ដោយប្រើសមីការកាណូនិច $\frac{\partial H}{\partial q_k}=-\dot{p}_k$ និង $\frac{\partial H}{\partial p_k}=\dot{q}_k$

កូអរដោនេទូទៅ $z,\ \varphi,\ p_z$ និង p_φ យើងទទួលបាន៖

$$\dot{z}=\frac{\partial H}{\partial p_z}=\frac{p_z}{m}\ \Rightarrow\ p_z=m\dot{z}$$

$$\dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}=\frac{p_\varphi}{mR^2}\ \Rightarrow\ p_\varphi=mR^2\dot{\varphi}$$

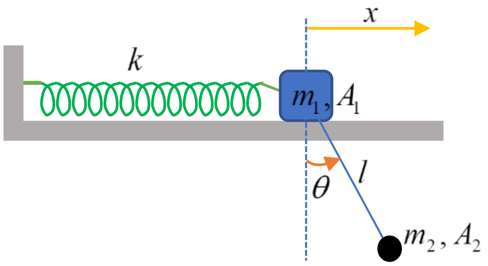
$$-\dot{p}_z=\frac{\partial H}{\partial z}=k\,z\ \Rightarrow\ \dot{p}_z=-k\,z$$

$$-\dot{p}_\varphi=\frac{\partial H}{\partial\varphi}=0\ \Rightarrow\ \dot{p}_\varphi=0\ \Rightarrow\ p_\varphi=\text{ថេរ}$$

ពីសមីការខាងលើនេះទទួលបាន $m\ddot{z}+kz=0$ ដែលបញ្ជាក់ថាចលនាតាមអ័ក្ស z ជាចលនាអាម៉ូនិចងាយជាមួយប្រេកង់មុំ $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ ។

សមីការខាងលើក៏ទាញបានផងដែរ $p_\varphi=\text{ថេរ}=mR^2\dot{\varphi}$ គឺថាម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចវិលជុំវិញអ័ក្ស z គឺថេរ ដោយសារអ័ក្ស z ជាអ័ក្សស៊ីមេទ្រី។

ឧទាហរណ៍៣៩៖ ប៉ោលយឺត(ម៉ាស m_1 ថេរកម្រាញ k ប្រវែងដើម l_0)យោលដេកនាំប៉ោលទោល(ម៉ាស m_2 ប្រវែង l)ដូចរូប។



ក. ចូរសំដែងបរិមាណចលនា ថាមពលស៊ីនេទិច និងថាមពលប៉ូតង់ស្យែលជាអនុគមន៍នៃអេឡុងកាស្យុង x នៃរ៉ឺស័រ និងមុំ θ។

ខ. ចូរបង្កើតសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទាំងពីរនៃចលនា។

គ. ចូររកសមីការខាងលើឡើងវិញដោយប្រើសមីការឡាក្រង់។

ឃ. សន្មតលំយោលតូច និង $m_1 = 2m_2 = 3m,\ k = 4mg/l = 4m\omega_0^2$ ។

ឃ.១. ចូររកសមីការលីនេអ៊ែនៃចលនា។

ឃ.២. ចូរទាញរកពុលសាស្យុងផ្ទាល់នៃប្រព័ន្ធ។

ឃ.៣. ចូរបង្កើតកន្សោម $x(t)$ និង $\theta(t)$ កាលនាប្រព័ន្ធត្រូវបានលែងដោយគ្មានល្បឿនជាមួយ $x=0$ និង $\theta=\theta_0$ ។

ឃ.៤. គណនាកូអរដោនេណរម៉ាល់នៃប្រព័ន្ធ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បរិមាណចលនានៃប្រព័ន្ធ៖

$\vec{p} = m_1\vec{v} + m_2\vec{v}_2$ ដោយ $\vec{v}_1 = \dot{x}\vec{i}$ និង

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \dot{\theta}\vec{k} \times \overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix}\dot{x}\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}l\sin\theta\\-l\cos\theta\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{x}\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}l\dot{\theta}\cos\theta\\l\dot{\theta}\sin\theta\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{x}+l\dot{\theta}\cos\theta\\l\dot{\theta}\sin\theta\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \vec{p} = m_1\dot{x}\vec{i} + m_2\left[(\dot{x}+l\dot{\theta}\cos\theta)\vec{i} + l\dot{\theta}\sin\theta\vec{j}\right] = \left[(m_1+m_2)\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)\right]\vec{i} + m_2 l\dot{\theta}\sin\theta\vec{j}$$

ថាមពលស៊ីនេទិចនៃប្រព័ន្ធ៖

$$K = \frac{1}{2}\left(m_1v_1^2 + m_2v_2^2\right) = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left[(\dot{x}+l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (l\dot{\theta}\sin\theta)^2\right]$$

ដោយពន្លាត រួចធ្វើប្រមាណវិធីទទួលបាន៖ $K = \dfrac{1}{2}\left(m_1\dot{x}^2 + m_2\dot{x}^2 + m_2l^2\dot{\theta}^2 + m_2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right)$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែលនៃប្រព័ន្ធ៖ $V = \dfrac{1}{2}kx^2 - m_2gl\cos\theta$

ខ. បង្កើតសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទាំងពីរនៃចលនា៖

តាមទ្រឹស្តីបរិមាណចលនា (គោលការណ៍គ្រឹះឌីណាមិច)

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\left[(m_1+m_2)\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)\right]\vec{i} + m_2 l\dot{\theta}\sin\theta\vec{j}\right)$$

សមីការតាមអ័ក្សដេក x ៖ $-kx = \dfrac{d\left[(m_1+m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\theta}\cos\theta\right]}{dt}$

ឬ $(m_1+m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\theta}\cos\theta - m_2 l\dot{\theta}^2\sin\theta = -kx$

ចំណែកឯទ្រឹស្តីម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិច៖

$\dfrac{d\vec{L}_{A_1}}{dt} + \vec{v}_1 \times m_2\vec{v}_2 = \overrightarrow{A_1A_2} \times m_2\vec{g}$ ដោយ $\vec{L}_{A_1} = \overrightarrow{A_1A_2} \times m_2\vec{v}_2$

$$\vec{L}_{A_1} = \begin{pmatrix} l\sin\theta \\ -l\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times m_2 \begin{pmatrix} \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \\ l\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l^2\dot{\theta} + m_2 l\dot{x}\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{L}_{A_1}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l^2\ddot{\theta} + m_2 l\ddot{x}\cos\theta - m_2 l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

និង $\vec{v}_1 \times m_2\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times m_2 \begin{pmatrix} \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \\ l\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$

ហើយ $\overrightarrow{A_1A_2} \times m_2\vec{g} = \begin{pmatrix} l\sin\theta \\ -l\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 g \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_2 gl\sin\theta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l^2\ddot{\theta} + m_2 l\ddot{x}\cos\theta - m_2 l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_2 gl\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow m_2 l^2\ddot{\theta} + m_2 l\ddot{x}\cos\theta = -m_2 gl\sin\theta$$

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាម θ គឺ $l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0$

គ. ការីឡាក្រង់៖

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{x}^2 + m_2\dot{x}^2 + m_2 l^2\dot{\theta}^2 + m_2 l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) - \frac{1}{2}kx^2 + m_2 gl\cos\theta$$

យើងបាន៖ $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\theta}\cos\theta$ និង $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2 l\dot{\theta} + m_2 l\dot{x}\cos\theta$

នាំឱ្យ $\frac{dp_x}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$ និង $\frac{dp_\theta}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{1}{2}m_2 l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - m_2 gl\sin\theta$

យើងទទួលបានសមីការដូចខាងលើដែរ។

ឃ.១. ក្នុងការប្រមាណលំយោលតូច យើងបានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលពីរនៃចលនាគឺ

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{l}{4}\ddot{\theta} = 0 \text{ និង } l\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta + \ddot{x} = 0$$

ជ្រើសរើសចម្លើយកុំផ្លិចមានទម្រង់ $x = Ae^{i\Omega t}$ និង $\theta = Be^{i\Omega t}$

$$\dot{x} = i\Omega Ae^{i\Omega t}\ ,\ \ddot{x} = -\Omega^2 Ae^{i\Omega t}\ ,\ \dot{\theta} = i\Omega Be^{i\Omega t}\ ,\ \ddot{\theta} = -\Omega^2 Be^{i\Omega t}$$

ឱ្យសមីការតម្លៃផ្ទាល់ $\Omega^4 - \frac{8}{3}\omega_0^2\Omega^2 + \frac{4}{3}\omega_0^4 = 0$ មានចម្លើយ $\Omega_1^2 = \frac{2}{3}\omega_0^2$ និង $\Omega_2^2 = 2\omega_0^2$

ឃ.២. យើងទាញបានមេគុណ $C_1 = 2/l$ និង $C_2 = -2/l$

ដោយប្រើលក្ខខណ្ឌដើម យើងទទួលបាន៖

$$x = \frac{l\theta_0}{4}\left[\cos(\Omega_1 t) - \cos(\Omega_2 t)\right] \text{ និង } \theta = \frac{\theta_0}{2}\left[\cos(\Omega_1 t) + \cos(\Omega_2 t)\right]$$

ឃ.៣. កូអរដោនេណរម៉ាល់ទាញបានយ៉ាងងាយ ដោយបន្សំ x និង θ ៖

$$x + \frac{l\theta}{2} = \frac{l\theta_0}{2}\cos(\Omega_1 t) \text{ និង } -x + \frac{l\theta}{2} = \frac{l\theta_0}{2}\cos(\Omega_1 t)$$

3. ភារីឡាក្រង់ និងហាមីលតុននៃភាគល្អិតផ្ទុកបន្ទុកអគ្គិសនី

3.1. ភារីឡាក្រង់

នៅក្នុងករណីសំខាន់ក្នុងរូបវិទ្យានៃភាគល្អិតផ្ទុកបន្ទុកអគ្គិសនី(បន្ទុក q) ដាក់នៅក្នុងដែនអេឡិចត្រូម៉ាញេទិច $(\vec{E},\vec{B})$ យើងបង្ហាញថាកន្សោមនៃឡាក្រង់ដូចតទៅ៖

$$L = E_C - qV + q\vec{v}\cdot\vec{A}$$

ដែល $(V,\vec{A})$ កំណត់ប៉ូតង់ស្យែលអេឡិចត្រូម៉ាញេទិច ទទួលយកបានជាមួយគោលការណ៍គ្រឹះមេកានិច និងជាមួយកន្សោមកម្លាំង Lorentz៖

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

តាមអ័ក្ស x ម៉ូម៉ង់ធ្លាស់ p_x ត្រូវបានសរសេរ៖ $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x = p_x + qA_x = P_x$

អញ្ចឹងម៉ូម៉ង់ធ្លាស់ $\vec{P}$ នៃភាគល្អិតផ្ទុកបន្ទុកនៅក្នុងដែនអេឡិចត្រូម៉ាញេទិចមិនបានបញ្ជាក់អត្តសញ្ញាណចំពោះបរិមាណចលនារបស់វា $\vec{p} = m\vec{v}$ ៖

$$\vec{P} = \vec{p} + q\vec{A}$$

សមីការឡាក្រង់តាមអ័ក្ស x ៖

$$\frac{dP_x}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \text{ឬក៏} \quad \frac{dp_x}{dt} + q\frac{dA_x}{dt} = -q\frac{\partial V}{\partial x} + q\left(v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

ដោយសារ $\vec{A}\,(x,y,z,t)$ យើងបានផងដែរ៖

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ជាលទ្ធផល៖ $$\frac{dp_x}{dt} = -q\frac{\partial V}{\partial x} - q\frac{\partial A_x}{\partial t} + qv_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + qv_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)$$

ទំនាក់ទំនងរវាងដែននិងប៉ូតង់ស្យែលអេឡិចត្រូម៉ាញេទិចគឺ៖

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{និង} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

ច្បាប់គ្រឹះឌីណាមិច $\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$ ឱ្យកុំប៉ូសង់៖

$$\frac{dp_x}{dt} = -q\frac{\partial V}{\partial t} - q\frac{\partial A_x}{\partial t} + qv_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - qv_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

ការីឡាក្រង់ចំពោះភាគល្អិតផ្ទុកបន្ទុកអគ្គិសនី នៅក្នុងមេកានិចញូតុន៖

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - qV + q\vec{v} \cdot \vec{A}$$

3.2. ការីហាមីលតុននៃភាគល្អិតផ្ទុកបន្ទុកអគ្គិសនី

តាមបម្លែង Lagendre $H = \vec{v} \cdot \vec{P} - L$ យើងបាន៖

$$H = \vec{v} \cdot \left(\vec{p} + q\vec{A}\right) - E_C + qV - q\vec{v} \cdot \vec{A} = \vec{v} \cdot \vec{p} - E_C + qV = E_C + qV$$

ដោយសារ $\vec{v}\cdot\vec{p}=2E_C$

ដូចនេះ ការីហាមីលតុងនៃភាគល្អិតផ្ទុកបន្ទុកអគ្គិសនីបញ្ជាក់អត្តសញ្ញាណថាមពលសរុបរបស់វា:

$$H=\frac{p^2}{2m}+qV=\frac{\left(\vec{P}-q\vec{A}\right)}{2m}+qV$$

ឧទាហរណ៍៤០៖ ប្រព័ន្ធកូអរដោនេដេកាតជាមួយអ័ក្ស x',y',z' វិលធៀបទៅនឹងតម្រុយនិចលភាព ជាមួយល្បឿនមុំថេរ ω ជុំវិញអ័ក្ស z'។ ភាគល្អិតមានម៉ាស m ចលនាក្រោមកម្លាំងដែលមានថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V(x',y',z')$។ ចូរបង្កើតសមីការឡាក្រង់នៃចលនានៅក្នុងប្រព័ន្ធកូអរដោនេ $O'x'y'z'$។ ចូរបង្ហាញថា សមីការរបស់ពួកវាដូចសមីការ ចំពោះភាគល្អិតនៅក្នុងប្រព័ន្ធកូអរដោនេនឹង មានអំពើលើវាដោយកម្លាំង $-\vec{\nabla}V$ និងកម្លាំងអាចដេរីវេពីប៉ូតង់ស្យែលអាស្រ័យល្បឿន U ។ ចូររក U ។

ដំណោះស្រាយ

យកតម្រុយនិចលភាព(តម្រុយកាលីលេ) $Oxyz$ មានគល់ត្រុយត្រួតជាមួយត្រុយ $O'x'y'z'$ ។

តាមច្បាប់បន្សំល្បឿន $\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$

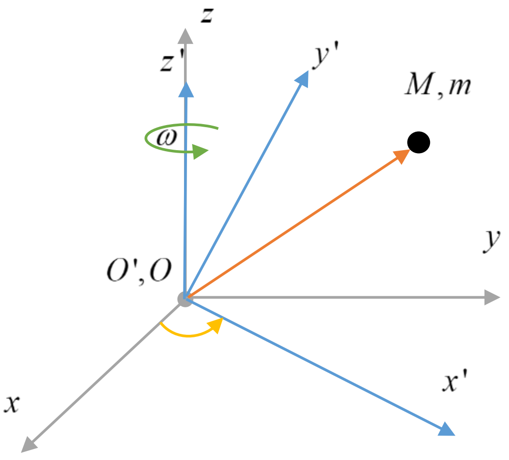
$$\vec{v}_r=\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{\Re'}=\dot{x}'\vec{i}\,'+\dot{y}'\vec{j}\,'+\dot{z}'\vec{k}\,'$$

ដោយ $\Re'$ ធ្វើតែចលនារំកិល នោះ៖ $\vec{v}_e=\vec{\omega}\times\overrightarrow{O'M}=\vec{\omega}\times\vec{r}$

$$\vec{v}_a=\vec{\omega}\times\vec{r}+\vec{v}_r$$

$$\Rightarrow\quad v_a^2=\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)^2+2\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{v}_r+v_r^2$$

$$v_a^2=\omega^2\left(\dot{x}'^2+\dot{y}'^2\right)+2\omega(x'\dot{y}'-\dot{x}'y')+\dot{x}'^2+\dot{y}'^2+\dot{z}'^2$$



ការឡាក្រង់នៃភាគល្អិតនៅក្នុងតម្រុយកាលីលេ សំដែងជាបរិមាណតម្រុយវិល

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}'^2+\dot{y}'^2+\dot{z}'^2\right)+m\omega\left(x'\dot{y}'-\dot{x}'y'\right)+\frac{1}{2}m\omega^2\left(x'^2+y'^2\right)-V$$

សមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$

នោះឱ្យ $m\ddot{x}'-2m\omega\dot{y}'-m\omega^2x'+\frac{\partial V}{\partial x'}=0$

$$m\ddot{y}'-2m\omega\dot{x}'-m\omega^2y'+\frac{\partial V}{\partial x'}=0$$

$$m\ddot{z}'+\frac{\partial V}{\partial z}=0$$

ចំពោះភាគល្អិតមានម៉ាស m ចលនានៅក្នុងតម្រុយ $O'x'y'z'$ ក្រោមកម្លាំង $-\vec{\nabla}V$ និងបន្ថែមប៉ូតង់ស្យែល អាស្រ័យល្បឿន U ការីឡាក្រង់គឺ

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}'^2+\dot{y}'^2+\dot{z}'^2\right)-V-U$$

ប្រៀបធៀបការីឡាក្រង់នេះ ទៅនឹងការីឡាក្រង់ខាងលើ ឱ្យ៖

$$U=-m\omega\left(x'\dot{y}'-\dot{x}'y'\right)-\frac{1}{2}m\omega^2\left(x'^2+y'^2\right)$$

ការីឡាក្រង់នេះ ផ្តល់សមីការចលនាដដែល។

☞ សង្ខេបមេរៀន

- ការីឡាក្រង់ $L = T - V$ និងសមីការឡាក្រង់ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$
- ការីឡាក្រង់នៅក្នុងដែនអេឡិចត្រូម៉ាញ៉េទិច $L = T - V + q\vec{v}\cdot\vec{A}$
- ម៉ូម៉ង់ឆ្លាស់ p_i (កើតពីអថេរ q_i)ជាបរិមាណ $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$
- ការី Hamilton៖ $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ និង $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$
- កន្សោមវ៉ិចទ័រល្បឿននៃ A ៖ $\vec{v}_A = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \overrightarrow{OA}}{\partial q_i}\right)\frac{dq_i}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \overrightarrow{OA}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i$
- ថាមពលស៊ីនេទិច $E_C = \sum_A \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \sum_A \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial \overrightarrow{OA}}{\partial q_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial \overrightarrow{OA}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_i \sum_j a_{ij}\dot{q}_i \dot{q}_j$
- ការីហាមីលតុងនៃភាគល្អិតផ្ទុកបន្ទុកអគ្គិសនីបញ្ជាក់អត្តសញ្ញាណថាមពលសរុបរបស់វា៖

  $H = \frac{p^2}{2m} + qV = \frac{\left(\vec{P} - q\vec{A}\right)}{2m} + qV$

ចំណោទ

១. ភាគល្អិតមួយធ្វើចលនាក្នុងអណ្តូងប៉ូតង់ស្យែលមួយវិមាត្រព័ណនាដោយៈ $V(x)=x^2-x$ ។ ចូរសរសេរសមីការរបស់វា។

២. ឧបមាភាគល្អិតធ្វើចលនានៅក្នុងប្លង់ដែលមានប៉ូតង់ស្យែល $V=r\theta$ ។ ចូរសរសេរសមីការឡាក្រង់ចំពោះប្រព័ន្ធនេះ។

៣. តើសមីការចលនាដូចម្តេចចំពោះលំហាត់២?

៤. អង្គាំមួយធ្វើចលនានៅលើកងមានកាំ R វិលដោយល្បឿនមុំ Ω ។ ទីតាំងរបស់អង្គាំឱ្យដោយៈ

$$x=R\sin\theta\cos\Omega t$$
$$y=R\sin\theta\sin\Omega t$$
$$z=-R\cos\theta$$

ថាមពលប៉ូតង់ស្យែលនៃអង្គាំគឺៈ $V=mgR(1-\cos\theta)$ ។

ក. គណនាថាមពលស៊ីនេទិចរបស់អង្គាំ។

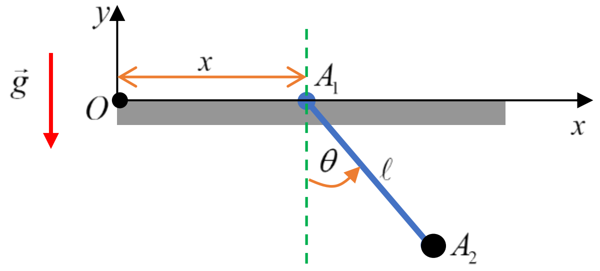
ខ. ចូរសរសេរការីឡាក្រង់។

គ. ចូររកសមីការចលនារបស់អង្គាំ។

ឃ. ចូរប្រើការីហាមីលតុន ចំពោះសមីការចលនា។

៥. អង្គធាតុរឹងមួយផ្សំពីដងស្មើសាច់មានប្រវែង ℓ ម៉ាស m ចុងនៃដងផ្សាភ្ជាប់ A_1 និង A_2 មានម៉ាស m_1 និង m_2 ដូចរូប។ ចុង A_1 រអិលដោយគ្មានកកិតតាមអ័ក្សដេក Ox នៃតម្រុយដី $\Re=Oxyz$ ហើយដងចលនានៅក្នុងប្លង់ឈរ Oxy។

ក. ចូរសំដែងថាមពលស៊ីនេទិច ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល ការីឡាក្រង់ និងម៉ូម៉ង់ឆ្លាស់ p_x និង p_θ ជាអនុគមន៍នៃ $x=\overline{OA_1}$ និង $\theta=(-Oy,\overrightarrow{A_1A_2})$ ។



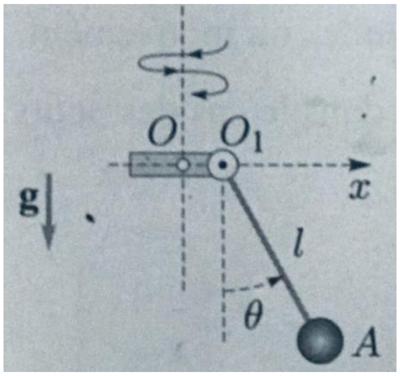
ខ. ចូររកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃចលនា។

គ. ចូរទាញរកប្រភេទនៃចលនាតិចៗ ដោយដឹងថានៅខណៈដើម $x=0,\ \theta=\theta_0,\ \dot{x}=0,\ \dot{\theta}=0$ ។

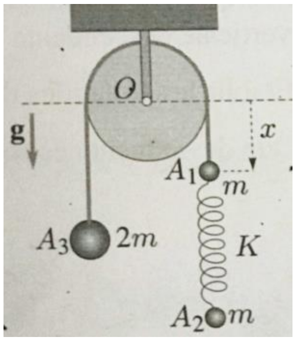
៦. ចុង O_1 នៃប៉ោលទោលមានប្រវែង ℓ ម៉ាស m ធ្វើចលនាយោលដេកមានទម្រង់ $x_1=D_m\cos\omega t$ ដូចរូប។

ក. ចូរបង្កើតសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃចលនាប៉ោល។ តាង $\omega_0^2=\dfrac{g}{\ell}$ ។

ខ. ចូរសិក្សាករណីចលនាតូច។



៧. យើងពិនិត្យប្រព័ន្ធដូចរូបផ្សំពីវត្ថុបី A_1 , A_2 , A_3 មានម៉ាសរៀង m , m , 2m ត្រូវបានចងភ្ជាប់គ្នាដោយរ៉ឺស័រមានថេរកម្រាញ k និងខ្សែមិនយឺត។ ប៉ារ៉ាម៉ែតនៃសណ្ឋានរូបគឺទីតាំង x នៃ A_1 តាមទិសឈរចុះក្រោម និងអេឡុងកាស្យុង y នៃរ៉ឺស័រ។ រ៉កមានកាំ r និងម៉ាសអាចចោលបាន។



ក. ចូរឱ្យកន្សោមម៉ូម៉ង់ឆ្លាស់។

ខ. ចូររកការីហាមីលតុននៃប្រព័ន្ធ។

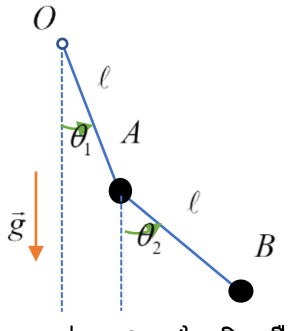
គ. ចូរទាញរកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនិងប្រភេទចលនា ដោយដឹងថានៅខណៈដើម $x=0,\ y=2mg/k,\ \dot{x}=0,\ \dot{y}=0$ ។ តាង $\omega_1^2=4k/(3m)$ ។

៨. ចំណុចរូបធាតុមួយមានម៉ាស μ រងនូវកម្លាំងដែលជាដេរីវេថាមពលប៉ុតង់ស្យែល $V(r)=\dfrac{k}{r}$ ។

ក. ចូររកកន្សោមការីហាមីលតុនជាអនុគមន៍នៃអថេរ (r,θ) និងម៉ូម៉ង់ឆ្លាស់ (p_r, p_θ) ។

ខ. ចូរទាញរកសមីកាចលនា។

៩. នៅចុង A នៃប៉ោលទោល OA (ម៉ាស m ប្រវែង ℓ) គេភ្ជាប់ប៉ោលទោលទី២ AB ឯកលក្ខណ៍ដូចរូប។ គេកំណត់ θ_1 និង θ_2 ជាមុំដែលទិសឈរផ្តុំជាមួយ OA និង AB រៀង។

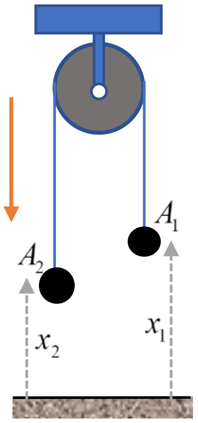


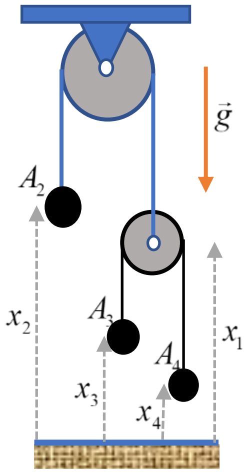
ក. ចូរបង្កើតសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃចលនា។

ខ. តើសមីការទាំងនេះក្លាយជាយ៉ាងណាបើនៅក្នុងករណីមុំតូច?

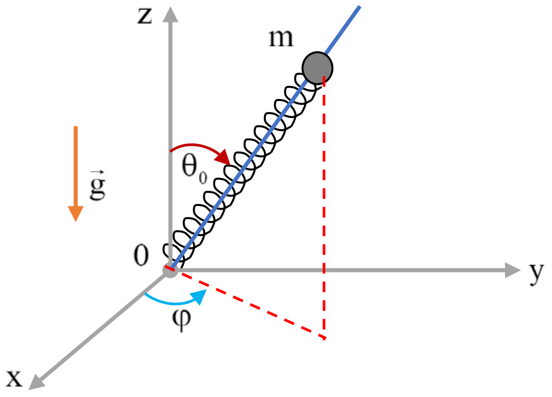
១០. ក. ម៉ាស៊ីន Atwood ផ្សំពីចំណុចរូបធាតុពីរ A_1 និង A_2 មានម៉ាសរៀង m_1 និង m_2 ភ្ជាប់គ្នាដោយខ្សែមិនយឺតដូចរូប។ ចូរបង្កើតសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល និងប្រភេទចលនា ដោយដឹងថាម៉ាសរ៉កមិនគិត។

ខ. គេជំនួស A_1 ដោយម៉ាស៊ីន Atwood មួយទៀតដោយម៉ាសរ៉កអាចចោលបាន។ ចូររកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃចលនា។





១១. ចំណុចរូបធាតុ A(មានម៉ាស m)អាចរអិលដោយគ្មានកកិតតាមបណ្តោយដងដែលវិលជុំវិញអ័ក្សឈរ។ ដងនេះមានចុង O នៅនឹង ទ្រេតបានមុំ θ_0 ថេរធៀបនឹងអ័ក្សឈរ Oz ដូចរូប។ រ៉ឺស័រមានថេរកម្រាញ k និងប្រវែងដើម ℓ_0 ភ្ជាប់ចំណុចរូបធាតុទៅ O។



ក. ចូររកកន្សោមឡាក្រង់នៃ A នៅក្នុងតម្រុយពិសោធន៍ ℜ ជាអនុគមន៍នៃមុំ $\varphi, r = 0A$។

ខ. ចូរទាញរកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃចលនាជាអនុគមន៍នៃ φ និង r។

គ. យក $\dot{\varphi} = \Omega =$ ថេរ។ តើចលនារបស់Aយ៉ាងដូចម្តេច? ដោយដឹងថានៅខណៈដើម $r = r_0, \dot{r} = 0$។ ចូរសិក្សាករណីទោលដែល $r_0 = \dfrac{g\cos\theta_0}{\Omega^2 \sin^2\theta_0^2}$ ។

១២. ពិនិត្យភាគល្អិតមួយមានម៉ាស m កំពុងចលនានៅក្នុងប្លង់ក្រោមកម្លាំងទំនាញ $\mu m / r^2$ ទិសដៅសំដៅទៅគល់តម្រុយនៃកូអរដោនេប៉ូលែ r, θ។ ចូរកំណត់សមីការចលនា

១៣. ក. ចូរសរសេរការីឡាក្រង់សម្រាប់ប៉ោលទោលបង្ខំឱ្យមានចលនា នៅក្នុងតែប្លង់ឈរ។ ចូររកសមីការចលនា និងបង្ហាញថា ចំពោះបន្លាស់ទីតូច ពីទីតាំងលំនឹង ប៉ោលសំដែងចលនាអាម៉ូនិចងាយ។

ខ. ពិនិត្យភាគល្អិតមានម៉ាស m ចលនាក្នុងមួយវិមាត្រ ក្រោមកម្លាំងជាមួយប៉ូតង់ស្យែល $U(x) = k(2x^3 - 5x^2 + 4x)$ ដែលថេរ k > 0 ។ ចូរបង្ហាញថា ចំណុច x = 1 ទាក់ទងទៅនឹងទីតាំងលំនឹងស៊ប់នៃភាគល្អិត។ ចូររកប្រេកង់នៃលំយោលមានអំព្លីទុតតូចនៃភាគល្អិតជុំវិញទីតាំងលំនឹងនេះ។

១៤. ប្រព័ន្ធមេកានិចពិសេសអាស្រ័យលើកូអរដោនេពីរ u និង v មានថាមពលស៊ីនេទិច $T = v^2\dot{u}^2 + 2\dot{v}^2$ និងថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V = u^2 - v^2$ ។ ចូរសរសេរការីឡាក្រង់នៃប្រព័ន្ធ និង សមីការចលនារបស់វា។

១៥. ភាគល្អិតមួយមានម៉ាស m រអិលលើប្លង់ទេរលោងនៅចំណោតមុំ α ។ ប្លង់ទេរមិនអនុញ្ញាតិឱ្យមានចលនា ចូរកំណត់សំទុះនៃភាគល្អិត។

១៦. ដុំមានម៉ាស m និងទំហំមិនគិត រអិលលើប្លង់ទេរគ្មានកកិតដែលមានម៉ាស M និងមុំចំណោត θ ធៀបនឹងទិសដេក។ ដុំប្លង់ទេរនៅលើតុដេករលោង ។ ចូរកំណត់សំទុះនៃដុំ និងសំទុះនៃដុំប្លង់ទេរ។

១៧. អង្កាំមួយមានម៉ាស m រអិលដោយសេរី លើខ្សែត្រង់រលោងមិនគិតម៉ាស ដែលត្រូវបង្ខិតបង្ខំដើម្បីវិល នៅក្នុងប្លង់ឈរជាមួយល្បឿនមុំថេរ ω ជុំវិញចំណុចនឹង។ ចូរកំណត់សមីការចលនា និងរកចម្ងាយ x ពីចំណុចនឹងនៅខណៈ t។ សន្មតថា នៅខណៈ $t=0$ ខ្សែគឺដេក។

១៨. ពិនិត្យប៉ោលដែលមានម៉ាសតូច m ត្រូវបានភ្ជាប់ទៅចុងមួយនៃខ្សែមិនយឺតប្រវែង ℓ វិលជុំវិញចុងមួយទៀតដែលនៅនឹង។ ប៉ោលចលនាលើផ្ទៃស្វ៊ែ។ ដូចនេះ មាននាមថា ប៉ោលស្វ៊ែ។ មុំទេរ φ នៅក្នុងប្លង់ xy អាចផ្លាស់ប្តូរដោយឯករាជ្យ។

ក. រកសមីការចលនា សម្រាប់ប៉ោលស្វ៊ែ។

ខ. ចូរពិភាក្សា លក្ខខណ្ឌដែលចលនាប៉ោលស្វ៊ែត្រូវបានបម្លែងទៅជា៖

១). ប៉ោលទោល ២). ប៉ោលកោន

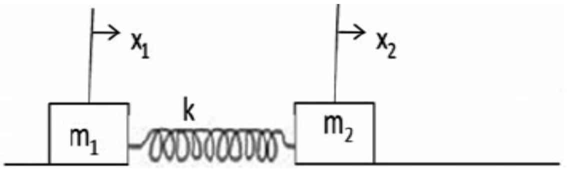
១៩. ដុំពីរមានម៉ាស m និង M ត្រូវបានភ្ជាប់ដោយរ៉ឺស័រមិនគិតម៉ាសមានថេរកម្រាញ k ត្រូវបានដាក់លើតុដេករលោង។ ចូរកំណត់ សមីការចលនាដោយប្រើការីឡាក្រង់។

២០. ដោយប្រើសមីការ Hamilton ដើម្បីទទួលបាន សមីការចលនានៃដងធ្ងន់ស្មើសាច់មានម៉ាស M និងប្រវែង 2a វិលជុំវិញចុងមួយដែលនៅនឹង ។

២១. លំយោលករអាម៉ូនិចមួយវិមាត្រ មានការី Hamilton $H=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\omega^2q^2$ ។ ចូរសរសេរសមីការ Hamilton និងរកចម្លើយទូទៅ។

២២. ចូរកំណត់សមីការសម្រាប់ចលនាប្លង់ដោយប្រើសមីការ Hamilton ។

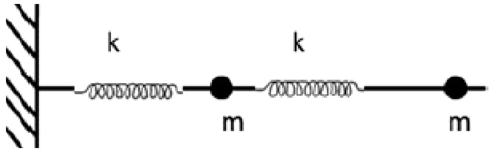
២៣. ដុំពីរមានម៉ាស m_1 និង m_2 ត្រូវបានចងភ្ជាប់គ្នាដោយរ៉ឺស័រមានថេរកម្រាញ k ត្រូវបានដាក់លើតុដេករលោង ដូចបង្ហាញលើរូប។ ចូរកំណត់ប្រេកង់ធម្មជាតិនៃប្រព័ន្ធ។



២៤. ចូរកំណត់សមីការចលនានៃសត្វល្អិតមានម៉ាស m វារដោយល្បឿនថេរ v លើដងស្មើសាច់មានម៉ាស M និងប្រវែង 2a ដែលវិលជុំវិញចុងនឹង។ សន្មតថា t = 0 សត្វល្អិតនៅចំណុចពាក់កណ្ដាលដង ហើយវាវារចុះក្រោម។

២៥. ដងស្មើសាច់មានម៉ាស M និងប្រវែង 2a ត្រូវបានចងភ្ជាប់ចុងមួយដោយខ្សែប្រវែង ℓ ដែលវិលជុំវិញចំណុចនឹង។ ចូរគណនាមុំលំងាកនៃខ្សែនិងដង នៅពេលខ្សែបូកដង ប្រព័ន្ធវិលជុំវិញទិសឈរកាត់ចំណុចរង្វិលជាមួយល្បឿនមុំថេរ ω ។

២៦. អង្គាំពីរមានម៉ាស m នីមួយៗអាចចលនាដោយគ្មានកកិតតាមខ្សែដេក ហើយភ្ជាប់ទៅជញ្ជាំងនឹងជាមួយរ៉ឺស័រពីរមានថេរកម្រាញ k ដូចបង្ហាញរូប។

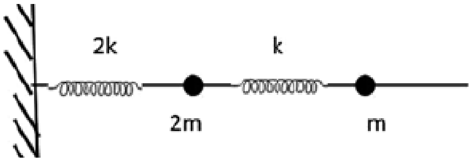


ក. ចូររកសមីការឡាក្រង់នៃប្រព័ន្ធ និងសមីការចលនា។

ខ. ចូររកប្រេកង់នៃលំយោលមានអំព្លីទុតតូច។

គ. ចំពោះម៉ូតនីមួយៗ ចូរគូសប្រព័ន្ធ នៅពេលវាមានបន្លាស់ទីអតិបរមា។

២៧. អង្គាំពីរមានម៉ាស 2m និង m អាចចលនាដោយគ្មានកកិតតាមខ្សែដេក។ ពួកវាត្រូវបានភ្ជាប់ទៅជញ្ជាំងនឹងជាមួយរ៉ឺស័រ មានថេរកម្រាញ 2k និង k បង្ហាញដូចរូប។



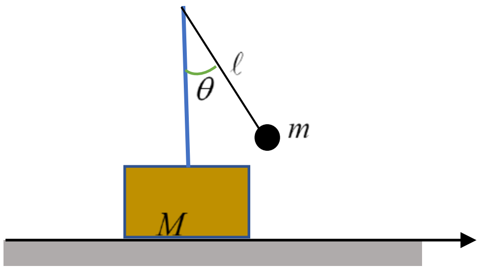
ក. ចូររកសមីការឡាក្រង់ សម្រាប់ប្រព័ន្ធនេះ និងសមីការចលនានៃអង្គាំ។

ខ. ចូររកប្រេកង់នៃលំយោលមានអំព្លីទុតតូច។

គ. ចំពោះម៉ូតនីមួយៗ ចូរគូសប្រព័ន្ធ នៅបេលវានៅបន្លាស់ទីអតិបរមា។

២៨. ភាគល្អិតបីឯកលក្ខណ៍មានម៉ាស m, M និង m ដោយ M នៅកណ្ដាល ត្រូវបានភ្ជាប់ដោយរ៉ឺស័រពីរមិនគិតម៉ាសមានថេរកម្រាញ k ។ ចូររកម៉ូតធម្មតានៃលំយោល និងបង្គុំប្រេកង់។

៣០. ប៉ោលមានប្រវែង ℓ និងម៉ាស m ត្រូវបានចងភ្ជាប់ខាងលើដុំមានម៉ាស M។ ដុំចលនាដោយសេរីគ្មានកកិតលើផ្ទៃដេក ដូចបង្ហាញរូប។



ក. ចូរបង្ហាញថា កាឡាក្រង់ ចំពោះប្រព័ន្ធគឺ

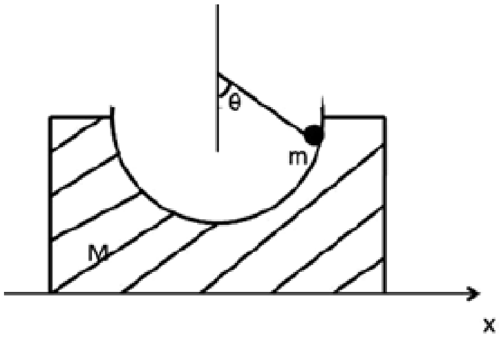
$$L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+m\ell\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta}+\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2+mg\ell\cos\theta$$

ខ. ចូរបង្ហាញថា ការប្រមាណ ចំពោះកាឡាក្រង់នេះ ដែលអនុវត្តន៍សម្រាប់លំយោលមានអំព្លីទុតតូចគឺ $L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+m\ell\dot{x}\dot{\theta}+\frac{1}{2}\ell^2\dot{\theta}^2+mg\ell\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)$

គ. ចូររកសមីការចលនា។

ឃ. ចូររកប្រេកង់នៃលំយោលមានអំព្លីទុតតូចនៃប្រព័ន្ធ។

៣១. ក. ភាគល្អិតមានម៉ាស m រអិលចុះក្នុងចានស្វ៊ែរលោង ដូចរូប។ ភាគល្អិតនៅតែនៅក្បែរនៅក្នុងប្លង់ឈរ (xz) ។ ដំបូង សន្មតថា ចានមិនធ្វើចលនា។ ចូរសរសេរកាឡាក្រង់ និងសមីការចលនា។



ខ. ឥឡូវ សន្មតថា ចាននៅនឹងលើតុដេករលោង និងមានម៉ាស M ចានអាចរអិលដោយសេរីតាមទិស x ។

១). ចូរសរសេរកាឡាក្រង់ជាអនុគមន៍នៃ θ និង x (ជាកូអរដោនេរបស់ចាន)។

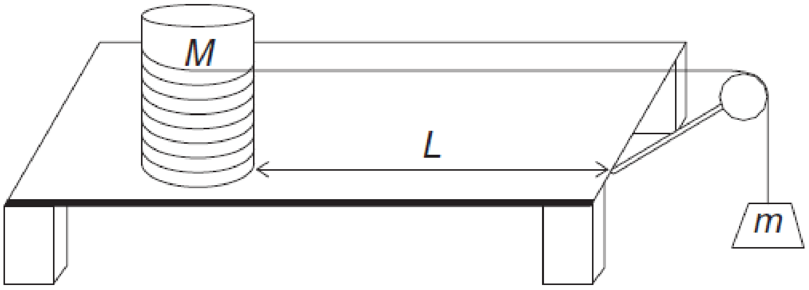
២). ចូរសរសេរសមីការចលនា ចេញពីសមីការឡាក្រង់។

៣). សន្មតថា $M >> m$ ចូរបង្ហាញថា ចំពោះបន្លាស់ទីតូចជៀបទីតាំងលំនឹង ខួបនៃលំយោលភាគល្អិតតូចជាងដោយកត្តា $\left(\frac{M}{M+m}\right)^{1/2}$ ទៅនឹងខួបក្នុងករណីចាននៅនឹង។

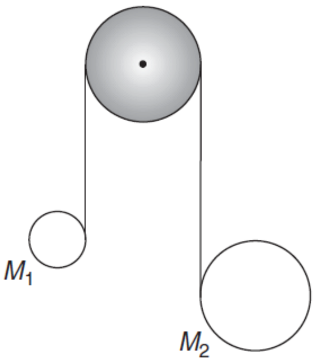
៣២. ប្រព័ន្ធត្រូវបានពណ៌នាដោយកូអរដោនេទោល(ទូទៅ) q និងកាឡាក្រង់ $L(q,\dot{q})$ ។ ចូរឱ្យនិយមន័យម៉ូម៉ង់ទូទៅបង្កើតជាមួយ q និងការី Hamilton ទាក់ទង $H(q,\dot{q})$ ។ ចូរធ្វើដេរីសមីការ Hamilton ពីសមីការឡាក្រង់នៃប្រព័ន្ធ។ រក្សាសំណួរដដែល ចូរពិនិត្យប្រព័ន្ធដែលមានកាឡាក្រង់ $L(q,\dot{q})$ ។ ចូររកការី Hamilton និងសមីការ Hamilton ។

៣៣. អង្កាំមានម៉ាស m រអិលដោយសេរី លើខ្សែរង្វង់រលោងមានកាំ r ដែលវិលជាមួយល្បឿនមុំថេរ ω ។ នៅលើប្លង់ដេក វិលជុំវិញចំណុចនឹង លើគែមរបស់វា ចូរបង្ហាញថា អង្កាំសំដែងចលនាលំយោលអាម៉ូនិច ជៀបអង្កត់ផ្ចិតកាត់តាមចំណុចនឹង នៅពេលប្រវែងប៉ោល $r = g/\omega^2$ ។

៣៤. ស៊ីឡាំងមួយមានម៉ាស M និងកាំ R ត្រូវបានដាក់នៅចុងតុនៅចម្ងាយL ពីគែមដូចបង្ហាញលរូប។ ខ្សែត្រូវបានរុំយ៉ងញឹកជុំវិញស៊ីឡាំង។ ចុងសេរីនៃខ្សែឆ្លងកាត់លើរ៉កគ្មានកកិត និងត្រូវបានព្យួរទំលាក់ក្បែរគែមតុ។ កូនទម្ងន់មានម៉ាស m ត្រូវបានចងនៅចុងខ្សែសេរី។ ចូរកំណត់ពេលវេលាចាំបាច់ដើម្បីឱ្យស៊ីឡាំងទៅដល់ចុងនៃគែមតុ។



(លំហាត់៣៤)



(លំហាត់៣៥)

៣៥. ខ្សែមួយឆ្លងកាត់រ៉កគ្មានកកិត។ ចុងនីមួយៗត្រូវបានរុំជុំវិញហុងឈរ ដូចបង្ហាញរូប។ ហុងទំនោរចុះក្រោម ដោយរលាខ្សែ ប៉ុន្តែបើហុងមួយធ្ងន់ជាងហុងមួយទៀត វាអាចបណ្ដាលឱ្យហុងស្រាលឡើង។ ហុងមានម៉ាស M_1 និង M_2 ហើយកាំ R_1 និង R_2 ។ ចូរបង្ហាញថា តំណឹងខ្សែនៅក្នុងខ្សែគឺ $T = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} g$ ។

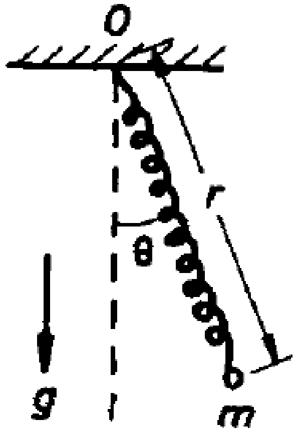
៣៦. រ៉ឺស័រមិនគិតម៉ាសមានប្រវែងដើម l_0 (មិនទាន់ខូចរាង) មានចំណុចម៉ាស m ត្រូវបានភ្ជាប់ទៅចុងម្ខាង និងចុងម្ខាងទៀតនៅនឹង ដូចនេះ រ៉ឺស័រព្យួរនៅក្នុងដែនទំនាញដី ដូចបង្ហាញលើរូប។ ចលនានៃប្រព័ន្ធគឺនៅក្នុងប្លង់ឈរ។

ក. ចូរសរសេរកាឡាក្រង់។

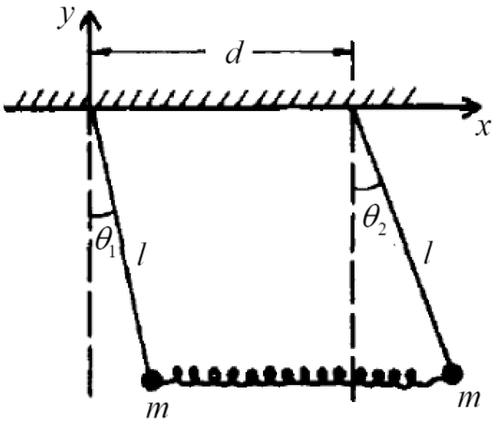
ខ. ចូររកសមីការឡាក្រង់ដោយប្រើអថេរ $\theta, \lambda = \frac{r - r_0}{r_0}$ ដែល r_0 ជាប្រវែងនៅនឹង(កំពុងព្យួរម៉ាស m)។ ប្រើ $\omega_s^2 = \frac{k}{m}, \omega_p^2 = \frac{g}{r_0}$ ។

គ. ចូរពិភាក្សាការប្រមាណលំដាប់ទាបបំផុតចំពោះចលនានៅពេល λ និង θ តូច ជាមួយលក្ខខណ្ឌដើម $t = 0, \theta = 0$, $\dot{\lambda} = 0, \lambda = A, \dot{\theta} = \omega_P B$ ដែល A និង B ជាចំនួនថេរ។

ឃ. ចូរពិភាក្សាការប្រមាណលំដាប់បន្ទាប់ចំពោះចលនា។ តើក្រោមលក្ខខណ្ឌអ្វី λ ចលនានឹងរេសូណង់?



(លំហាត់៣៦)



(លំហាត់៣៧)

៣៧. ប៉ោលពីរមានប្រវែងស្មើគ្នា l និងម៉ាសស្មើគ្នា m បង្កើតគូដោយរ៉ឺស័រមិនគិតម៉ាសមានថេរកម្រាញ k ដូចបង្ហាញលើរូប។ រ៉ឺស័រមិនទាន់ខូចរាងមានប្រវែងស្មើនឹងចម្ងាយចន្លោះទម្រ។

ក. ចូរបង្កើតកាឡាក្រង់។

ខ. ចូររកប្រេកង់នៃលំយោលតូចជុំវិញទីតាំងលំនឹង។

គ. ឧបមាថា ដំបូងម៉ាសទាំងពីរនៅនឹង។ កម្លាំងអាំពុលស្យុងផ្តល់ល្បឿនដេក v សំដៅទៅស្តាំ ទៅម៉ាសនៅខាងឆ្វេង។ តើចលនានៃប្រព័ន្ធដូចម្តេចនៅក្នុងកូអរដោនេធម្មតា។

៣៨. ភាគល្អិតត្រូវបង្ខំឱ្យចលនានៅក្នុងប្លង់។ វាត្រូវបានភ្ជាប់ទៅចំណុចនឹង P នៅក្នុងប្លង់នេះ កម្លាំងជានិច្ចកាលសំដៅទៅចំណុច P ហើយច្រាសសមាមាត្រទៅនឹងការេនៃចម្ងាយពី P ។

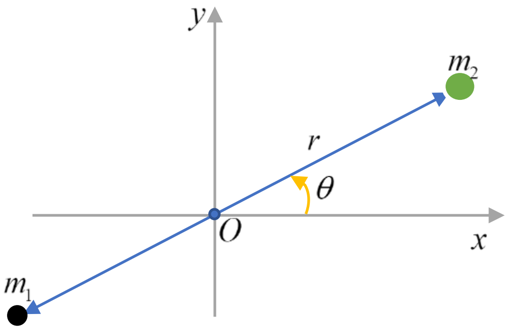
ក. ដោយប្រើកូអរដោនេប៉ូលែ ចូរសរសេរកាវីឡាក្រង់នៃភាគល្អិតនេះ។

ខ. ចូរសរសេរសមីការឡាក្រង់ ចំពោះភាគល្អិតនេះ និងរកយ៉ាងហោចនៅអាំងតេក្រាលទី១។

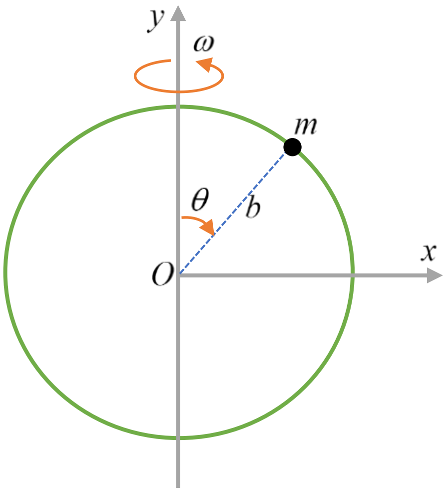
៣៩. ពិនិត្យភាគល្អិតពីរអន្តរកម្មតាមរយៈកម្លាំងកាត់ផ្ចិត(ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V(r)$ ដែល $\vec{r}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងធៀប)។

ក. ចូររកកាវីឡាក្រង់ នៅក្នុងប្រព័ន្ធផ្ចិតម៉ាស និងបង្ហាញថា ថាមពល និងម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចត្រូវបានរក្សា។ ចូរបង្ហាញថា ចលនានៅក្នុងប្លង់ និងបញ្ជាក់ច្បាប់ទី២ Kepler (ដែល $\vec{r}$ កៀសបានផ្ទៃស្មើគ្នាក្នុងរយៈពេលស្មើគ្នា)។

ខ. ឧបមាថា ថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V=\dfrac{kr^2}{2}$ ដែល k ជាថេរវិជ្ជមាន និងថាមពលសរុប E ត្រូវបានស្គាល់។ ចូររកកន្សោម សម្រាប់តម្លៃអប្បបរមា និងអតិបរមា ដែល r នឹងមាននៅក្នុងចលនា។



(លំហាត់៣៩)



(លំហាត់៤០)

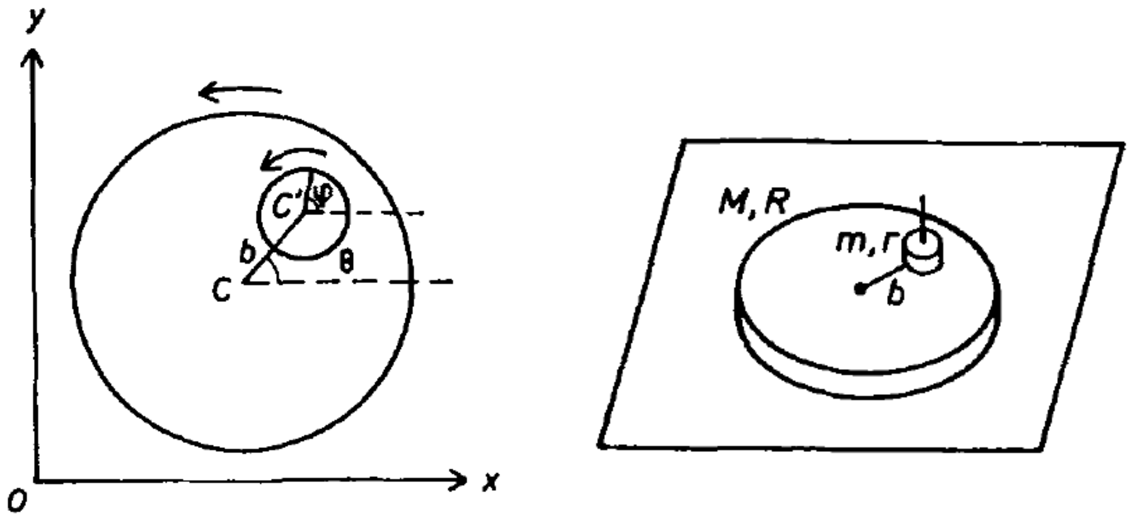
៤០. គុជមួយមានម៉ាស m ត្រូវបានបង្ខំឱ្យមានចលនាលើកងមានកាំ b ។ កងវិលជាមួយល្បឿនមុំថេរ ω ជុំវិញអ័ក្សឈរដែលត្រួតជាមួយអង្កត់ផ្ចិតកង។

ក. ចូរបង្កើតកាវីឡាក្រង់ និងសមីការចលនានៃគុជ។

ខ. ចូររកល្បឿនមុំកម្រិត Ω ដែលបាតក្រោមនៃកងផ្តល់ទីតាំងលំនឹងស៊ប់សម្រាប់គុជ។

គ. ចូររកទីតាំងលំនឹងស៊ប់ ចំពោះ $\omega>\Omega$ ។

៤១. ថាសមានម៉ាស M និងកាំ R រអិលដោយគ្មានកកិតលើផ្ទៃដេក។ ថាសមួយទៀតមានម៉ាស m និងកាំ r ត្រូវបានបោះរន្ធតាមផ្ចិតរបស់វាទៅចំណុច ផ្ចិតនៃថាសទី១ដោយចម្ងាយ b ដើម្បីឱ្យវាអាចវិលដោយគ្មានកកិតលើថាសទី១ ដូចបង្ហាញលើរូប។ ចូរពណ៌នា ចលនា និងបញ្ជាក់ថេររបស់វា។

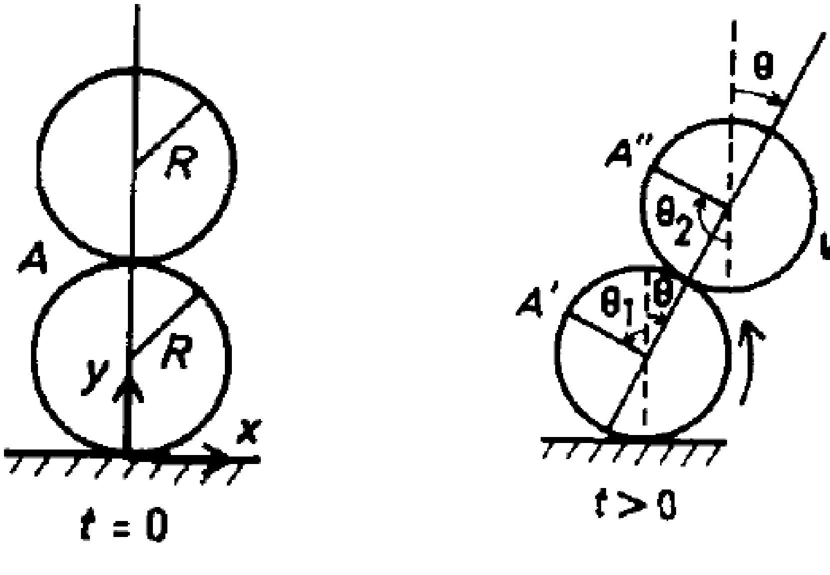


៤២. ស៊ីឡាំងស្មើសាច់មានម៉ាស M និងកាំ R នៅនឹងលើប្លង់ដេក និងស៊ីឡាំងឯកលក្ខណ៍នៅនឹងលើវា ដោយប៉ះវានៅកម្ពស់ខ្ពស់បំផុតដូចរូប។ ស៊ីឡាំងខាងលើត្រូវបានឱ្យតូចអនន្ត ដើម្បីឱ្យស៊ីឡាំងទាំងពីររមៀលដោយមិនរអិល។

ក. គណនាការីឡាក្រង់នៃប្រព័ន្ធ។

ខ. គណនាថេរនៃចលនា។

គ. ចូរបង្ហាញថា នៅពេលស៊ីឡាំងរក្សាប៉ះគ្នា $\dot{\theta}^2 = \frac{12g(1-\cos\theta)}{R(17+4\cos\theta-4\cos^2\theta)}$ ដែល θ ជាមុំដែលបន្ទាត់កាត់តាមផ្ចិតស៊ីឡាំងទាំងពីរ ផ្តុំជាមួយទសឈរ។

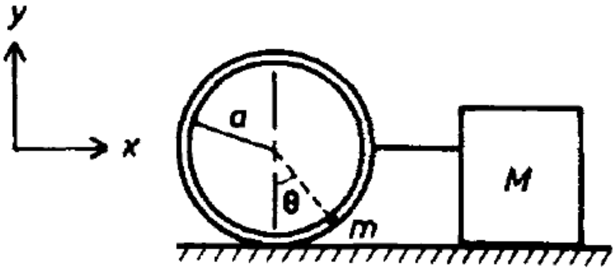


៤៣. ដុំមួយមានម៉ាស M ត្រូវបានភ្ជាប់ទៅកងមិនគិតម៉ាសមានកាំ a លើតុដេកគ្មានកកិតដូចរូប។ ភាគល្អិតមានម៉ាស m ត្រូវបានឃុំឃាំងធ្វើចលនាដោយគ្មានកកិតលើកងឈរ។

ក. ចូរបង្កើតការីឡាក្រង់ ដោយប្រើ θ ជាកូអរដោនេមួយ។

ខ. ចូររកសមីការចលនា។

គ. នៅក្នុងលីមីតនៃមុំតូច ចូរដោះស្រាយ សមីការចលនានោះ ចំពោះ θ ជាអនុគមន៍នៃពេល។



៤៤. ពិនិត្យភាគល្អិតមានម៉ាស m ចលនានៅក្នុងគន្លងសម្ព័ន្ធមានថាមពលប៉ូតង់ស្យែល $V(r)=-\frac{k}{r}$ ។ ដោយប្រើប្រព័ន្ធកូអរដោនេប៉ូលែនៅក្នុងប្លង់នៃគន្លង៖

ក. ចូររក p_r និង p_θ ជាអនុគមន៍នៃ $r, \theta, \dot{r}$ និង $\dot{\theta}$ ។

ខ. ដោយប្រើទ្រឹស្តី virial បង្ហាញថា $J_r + J_\theta = \oint \frac{k}{r} dt$ ដែល $J_r = \oint p_r dr,\ J_\theta = \oint p_\theta d\theta$ ។

គ. ចូរបង្ហាញថា $(J_r + J_\theta) = \sqrt{\frac{-2\pi^2 mk^2}{E}}$ ដោយប្រើ $\int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{-r^2+ar-b}} = \pi,\ \ r_\pm = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2-4b}\right)$ ។

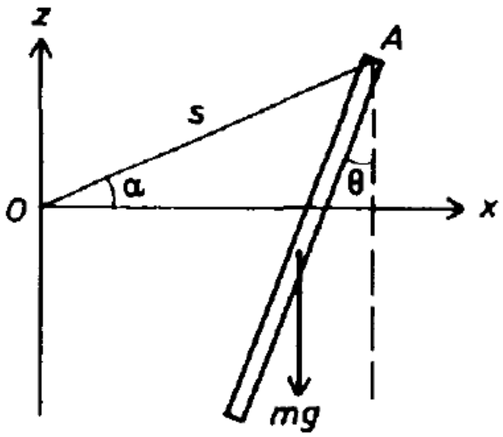
ឃ. ដោយប្រើលទ្ធផល គ ចូរបង្ហាញថា ខួបនៃគន្លងគឺដូចគ្នា ចំពោះចលនា r និង θ គឺ $T = 2k\sqrt{\frac{m}{-2E^3}}$ ។

៤៥. ពិនិត្យប្រព័ន្ធផ្កាយពីរ។

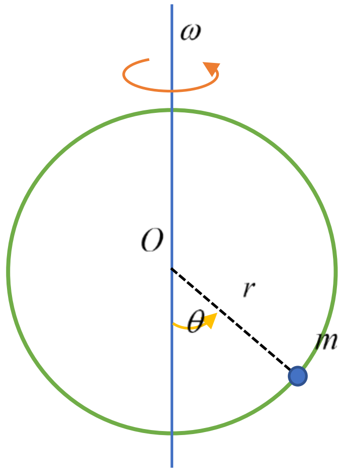
ក. ចូរសរសេរការីឡាក្រង់ ចំពោះប្រព័ន្ធជាអនុគមន៍នៃប្រព័ន្ធកូអរដោនេដេកាតនៃផ្កាយទាំងពីរ $\vec{r}_1$ និង $\vec{r}_2$ ។

ខ. ចូរបង្ហាញថា ថាមពលប៉ូតង់ស្យែលជាអនុគមន៍អូម៉ូសែននៃកូអរដោនេមានដឺក្រេ -1 មានន័យថា $V(\alpha\vec{r}_1, \alpha\vec{r}_2) = \alpha^{-1}V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ ដែល α ជាប៉ារ៉ាម៉ែតស្កាលែពិត។

៤៦. ដងស្មើសាច់មានប្រវែល ℓ និងម៉ាស M ចលនានៅក្នុងប្លង់ឈរ(xz) ចុងមួយនៃចុងរបស់វា។ A រងនូវការបង្ខិតបង្ខំ $z = x\tan\alpha$ (α =ទេរថេរទៅនឹងទិសដេក x)។ ចូរធ្វើដេរីវេសមីការឡាក្រង់នៃចលនាជាអនុគមន៍នៃកូអរដោនេទូទៅ $q_1 = s$ និង $q_2 = \theta$ ដូចរូប។ ប្រើទាំងនេះដើម្បីកំណត់ បើចលនារំកិលសុទ្ធ (θ=ថេរ)គឺអាច និង បើដូចនេះ មានតម្លៃ θ ។



(លំហាត់៤៦)



(លំហាត់៤៧)

៤៧. អង្កាំមានម៉ាសm រអិលដោយគ្មានកកិតលើកងវិលមានកាំ a ដែលមានអ័ក្សរង្វិលកាត់តាមអង្កត់ផ្ចិតឈរដូចបង្ហាញលើរូប។ ល្បឿនមុំរង្វិលរបស់កងគឺថេរ ω។

ក. ចូរសរសេរការីឡាក្រង់ សម្រាប់ប្រព័ន្ធ និងរកថេរនៃចលនាដែលមាន។

ខ. ចូរកំណត់ទីតាំងលំនឹងនៃអង្កាំ ចំពោះ $\omega < \omega_0$ និង $\omega > \omega_0$ ដែល $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$ ។ តើទីតាំងមួយណាមានលំនឹងស៊ប់ និងលំនឹងមិនស៊ប់ ?

គ. ចូរគណនាប្រេកង់លំយោលនៃលំញ័រអំព្លីទុតតូចជុំវិញទីតាំងលំនឹងស៊ប់។

៤៨. ភាគល្អិតមានម៉ាស m_1 និង m_2 ត្រូវបានភ្ជាប់គ្នាដោយរ៉ឺស័រស្រាលមានថេរកម្រាញ k នៅនឹងលើផ្ទៃដេកគ្មានកកិត។

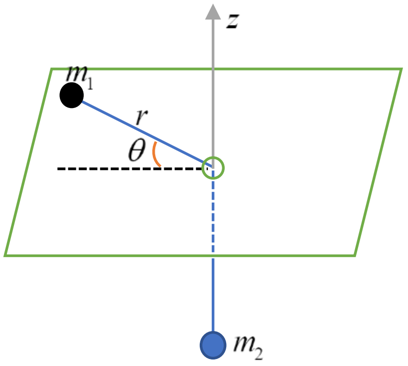
ក. អាំពុលស្យុង I នៃរយៈពេលដ៏ខ្លីត្រូវបានផ្តល់ទៅឱ្យ m_1។ ទិសដៅនៃអាំពុលស្យុងពី m_1 ទៅ m_2។ តើចម្ងាយប៉ុន្មាន m_2 ចលនាមុនឈប់ សម្រាប់ពេលដំបូង ?

ខ. តើអាចឬទេ ដោយផ្តល់អាំពុលស្យុងខ្លីទៅ m_1 ដើម្បីមានប្រព័ន្ធចលនាពីនៅនឹង ដើម្បីឱ្យវាវិលដោយគ្មានលំយោល ? ចូរពន្យល់។

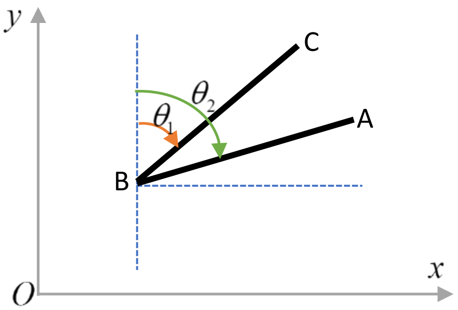
៤៩. ចំណុចម៉ាសពីរ m_1 និង m_2 $(m_1 \neq m_2)$ ត្រូវបានចងភ្ជាប់គ្នាដោយខ្សែមានប្រវែង l កាត់តាមរន្ធនៅក្នុងតុដេក។ ខ្សែនិងចំណុចម៉ាសចលនាដោយគ្មានកកិតជាមួយ m_1 លើតុ និង m_2 ចលនាសេរីក្នុងទិសឈរ។

ក. តើត្រូវផ្តល់ល្បឿនដើមឱ្យ m_1 ប៉ុន្មានដើម្បីឱ្យ m_2 នៅតែគ្មានចលនានៅចម្ងាយ d ពីក្រោមផ្ទៃនៃតុ ?

ខ. បើ m_2 បន្លាស់ទីបន្តិចនៅក្នុងទិសឈរ លំយោលតូចនឹងកើតមាន។ ចូរប្រើសមីការឡាក្រង់ដើម្បីរកខួបនៃលំយោលនេះ។



(លំហាត់៤៩)



(លំហាត់៥០)

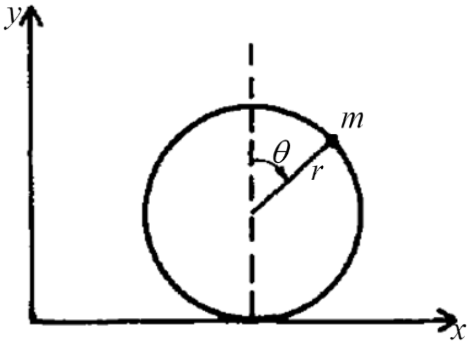
៥០. ដង AB និង BC នីមួយៗមានប្រវែង a និងម៉ាស m ត្រូវបានភ្ជាប់គ្នាដោយគ្មានកកិតត្រង់ B និងដេកលើតុដេកគ្មានកកិត។ ដំបូងដងទាំងពីរ (មានន័យថា A, B, C)កូលីនេអ៊ែ។ អាំពុលស្យុង $\vec{I}$ អនុវត្តនៅចំណុច A នៅក្នុងទិសកែងទៅនឹងបន្ទាត់ ABC ។ ចូររកចលនានៃដងបន្ទាប់ពីអាំពុលស្យុងត្រូវបានអនុវត្តភ្លាមៗ។

៥១. ចូរពិនិត្យភាគល្អិតមានម៉ាស m ចលនានៅក្នុងប្លង់ក្រោមកម្លាំងកាត់ផ្ចិត $F(r) = -\frac{k}{r^2} + \frac{k'}{r^3}$, សន្មត $k > 0$ ។

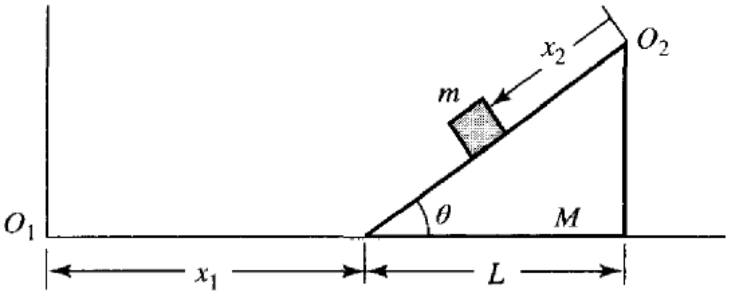
ក. ចូរការីឡាក្រង់ សម្រាប់ប្រព័ន្ធនេះជាអនុគមន៍នៃកូអរដោនប៉ូលែ r, θ និងល្បឿនរបស់វា។

ខ. ចូរសរសេរសមីការចលនា និងបង្ហាញថាម៉ូម៉ង់ស៊ីនេទិចអរបីតាល់ l ជាថេរនៃចលនា។

គ. សន្មតថា $l^2 > -mk'$។ ចូររកសមីការសម្រាប់គន្លង មានន័យថា r ជាអនុគមន៍នៃ θ។



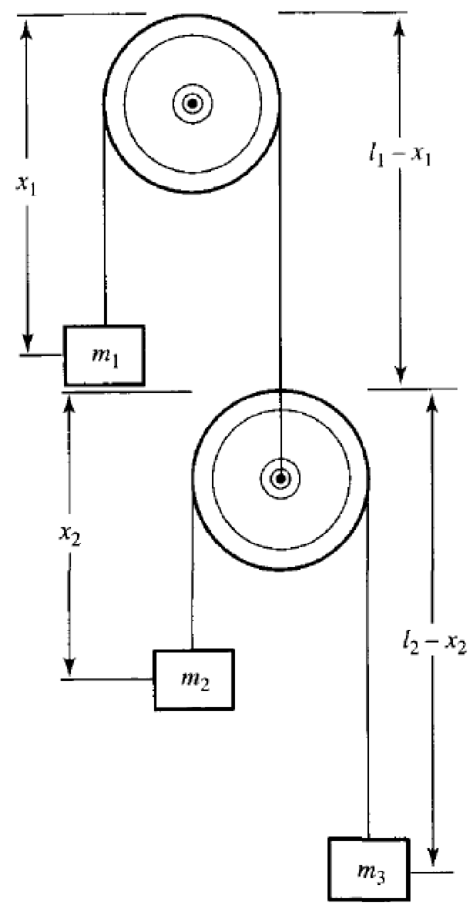
(លំហាត់៥១)



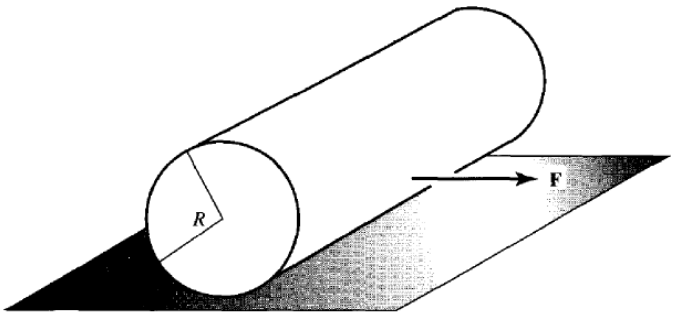
(លំហាត់៥២)

៥២. ដុំប្លង់ទេរមានម៉ាស M កំពុងរអិលលើផ្ទៃដេក នៅពេលភាគល្អិតមានម៉ាស m កំពុងរអិលលើផ្ទៃប្លង់ទេររលោងដូចបង្ហាញលើរូប។ ចូររកសមីការចលនានៃភាគល្អិត និងប្លង់ទេរ។

៥៣. ពិនិត្យម៉ាស៊ីន Atwood ឌុប ដូចបង្ហាញលើរូប។ សន្មតថារ៉កគ្មានកកិត និងម៉ូម៉ង់និចលភាព $I_1 = I_2 = 0$ ចូរគណនាសំទុះនៃម៉ាស។ សន្មត មានពីរដឺក្រេសេរី x_1 និង x_2 ដូចបង្ហាញ។



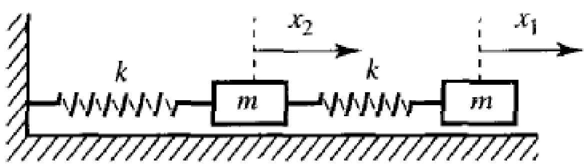
(លំហាត់៥៣)



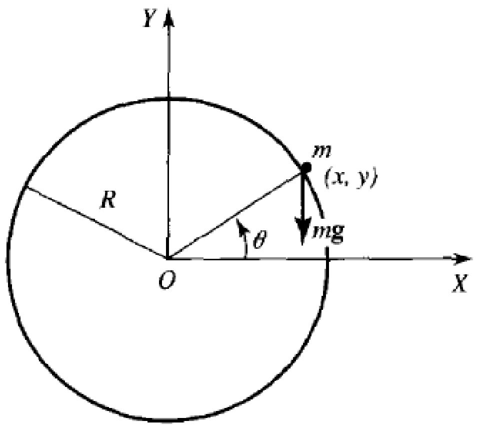
(លំហាត់៥៤)

៥៤. ដងស្មើសាច់មានម៉ាសMនិងប្រវែង L និងកាំ R រមៀលដោយគ្មានរអិល(បម្លែងជាបម្លែងវិល)លើប្លង់ដេកក្រោម អំពើនៃកម្លាំងដេក $\vec{F}$ អនុវត្តត្រង់ផ្ចិតវា ដូចបង្ហាញលើរូប។ ចូរដេរីវេសមីការឡាក្រង់នៃចលនា។

៥៥. ម៉ាសពីរឯកលក្ខណ៍ត្រូវបានចងទៅនឹងរ៉ឺស័រពីឯកលក្ខណ៍ដូចបង្ហាញលើរូប ហើយចលនាលើប្លង់ដេករលោង។ ចូររកសមីការចលនាសម្រាប់ប្រព័ន្ធ ដោយប្រើវិធីសាស្រ្តឡាក្រង់។



(លំហាត់៥៥)



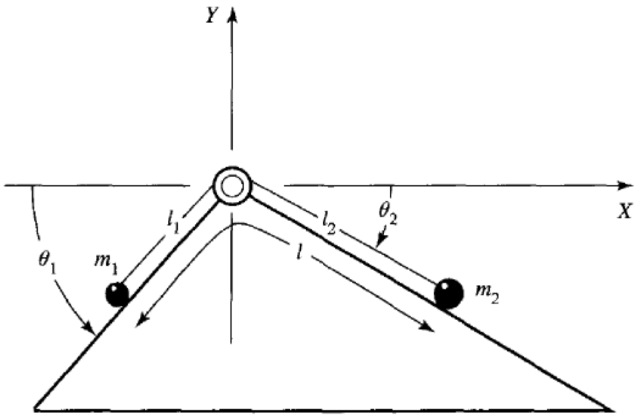
(លំហាត់៥៦)

៥៦. ភាគល្អិតមានម៉ាស m នៅលើផ្ទៃខាងក្រៅនៃហុងមានកាំ R ដូចបង្ហាញលើរូប។ ចូរកំណត់ទីតាំងម៉ាសជាអនុគមន៍នៃពេល។ តើនៅត្រង់ចំណុចណាដែលភាគល្អិតចាកចេញពីហុង។

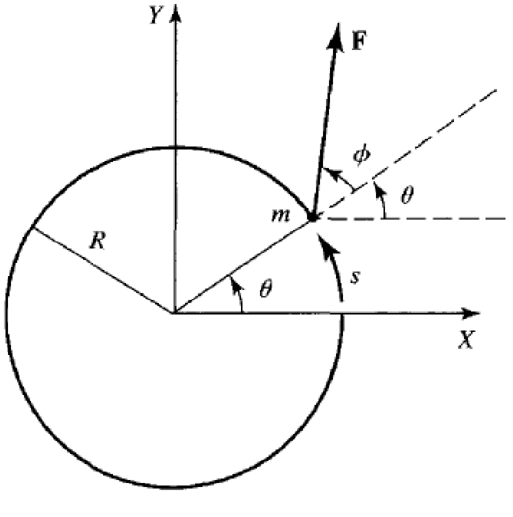
៥៧. ម៉ាសពីរ m_1 និង m_2 ត្រូវបានភ្ជាប់គ្នាដោយខ្សែមិនគិតម៉ាសមានប្រវែង l ត្រូវបានអនុញ្ញាតឱ្យរអិលលើប្លង់ទេរពីរគ្មានកកិត ក្រោមឥទ្ធិពលនៃទំនាញដី ដូចបង្ហាញលើរូប។ ចូរសរសេរកន្សោមសម្រាប់កម្លាំងទូទៅដោយប្រើ៖

ក. l ជាកូអរដោនេទូទៅ។

ខ. l_1 ជាកូអរដោនេទូទៅ។ តើក្រោមលក្ខខណ្ឌអ្វីប្រព័ន្ធនឹងមានលំនឹង? ចូររកទីតាំងលំនឹងនេះ។



(លំហាត់៥៧)



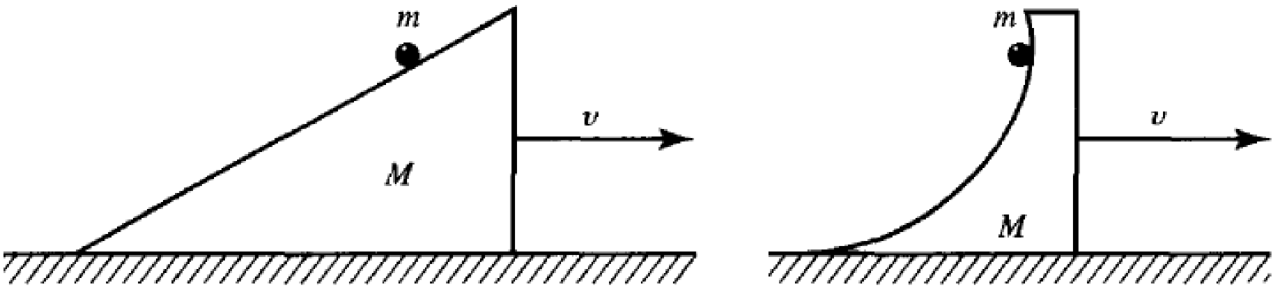
(លំហាត់៥៨)

៥៨. ចំណុចម៉ាស m ត្រូវបានបង្ខំឱ្យមានចលនាលើរង្វង់មានកាំ R និងមានអំពើលើវាដោយកម្លាំង $\vec{F}$ ដូចបង្ហាញលើរូប។ ចូរគណនាកម្លាំងទូទៅ និងកម្មន្តនិមិត ដោយបានពិនិត្យ៖

ក. s ជាកូអរដោនេទូទៅ។ ខ. θ ជាកូអរដោនេទូទៅ។

៥៩. ចំណុចម៉ាស m រអិលចុះក្រោមតាមដុំមានម៉ាស M ដូចបង្ហាញលើរូប។ ដុំរអិលរអិលលើផ្ទៃគ្មានកកិតជាមួយល្បឿន v។ ចូរសរសេរសមីការឡាក្រង់នៃចលនា បើ៖

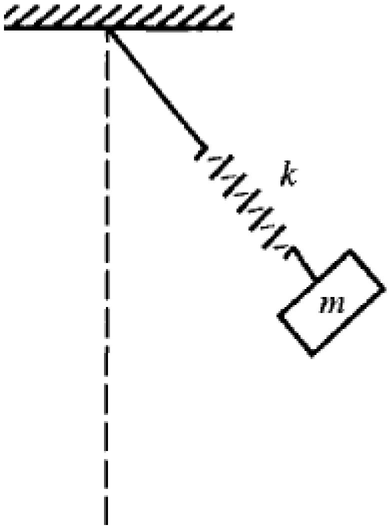
ក. ដុំជាប្លង់ទេរ។ ខ. ផ្ទៃដុំជាមួយភាគបួននៃរង្វង់មានកាំ R។



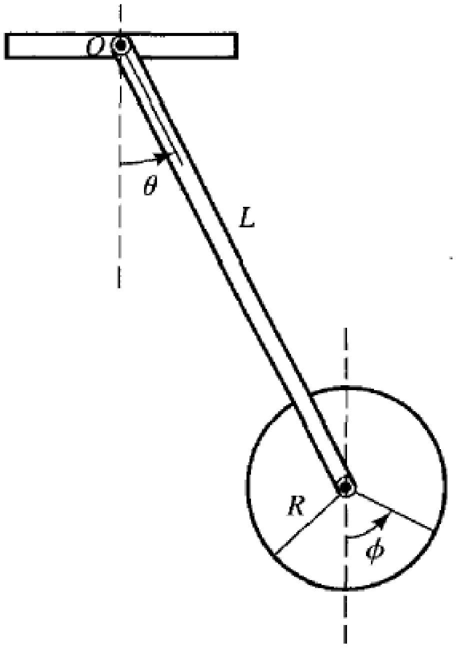
(a) (b)

៥៩. លំយោលប៉ោលដូចរូប មានម៉ាស m ត្រូវបានចងភ្ជាប់ទៅរ៉ឺស័រមិនគិតម៉ាសមានថេរកម្រាញ k និងប្រវែងដើម l_0 ។ ចូររកសមីការឡាក្រង់នៃចលនា។ តើក្រោមលក្ខខណ្ឌអ្វីប្រព័ន្ធបង្រួមទៅ៖

ក. ប៉ោលទោល? ខ. លំយោលអាម៉ូនិចលីនេអ៊ែ?



(លំហាត់៥៩)



(លំហាត់៦០)

៦០. ដងស្មើសាច់ប្រវែង L និងម៉ាស M វិលជុំវិញចំណុច O និងអាចយោលនៅក្នុងប្លង់ឈរដូចរូប។ ចុងម្ខាងទៀតនៃដងចោះដាក់កន្លាស់ត្រង់ផ្ចិតថាសស្តើងមានម៉ាស M និងកាំ R ។ (ដងយោល នៅពេលថាសយោលផងវិលផង)។ ដោយប្រើសមីការឡាក្រង់ ចូររកសមីការចលនាសម្រាប់ប្រព័ន្ធ និងពណ៌នាចលនា។

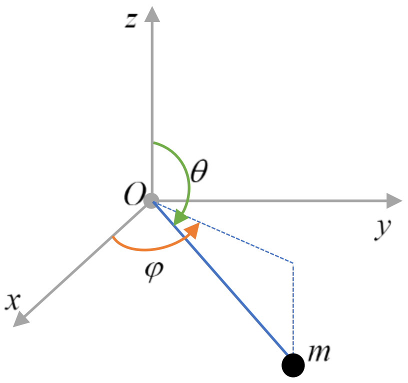
៦១. ក. ពិនិត្យភាគល្អិតមានម៉ាស m រងកម្លាំងដែលមានកុំប៉ូសង់កូអរដោនេស្វ៊ែ F_r, F_θ និង F_φ ។ ចូរបង្កើតសមីការឡាក្រង់នៃចលនា សម្រាប់ភាគល្អិតនៅក្នុងកូអរដោនេស្វ៊ែ (r,θ,φ) ។

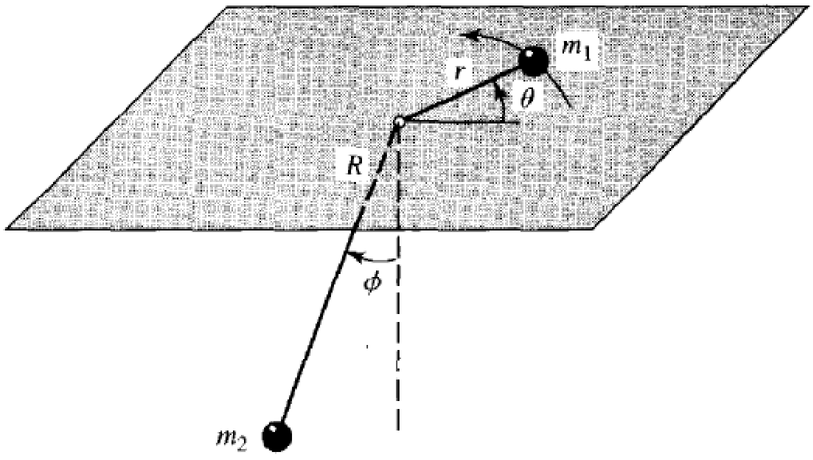
ខ. ចូររកសមីការចលនាសម្រាប់ភាគល្អិតក្នុងផ្នែកក. បើប្រព័ន្ធនៅក្នុងកូអរដោនេស្វ៊ែកំពុងរង្វិលជាមួយល្បឿនមុំ ω ជុំវិញអ័ក្ស z ។ តើអ្នកអាចបញ្ជាក់អត្តសញ្ញាណកម្លាំងចូលផ្ចិត និងកម្លាំង Coriolis ដោយប្រៀបធៀបទៅនឹងលទ្ធផលនៃសំណួរក?

៦២. ចំណុចទម្រនៃប៉ោលទោលមានប្រវែង l ត្រូវបានលើកឡើងលើជាមួយសំទុះថេរ a ។ ចូររកខួបនៃចលនា។

៦៣. ភាគល្អិតមានម៉ាស m រអិលលើប្លង់ទេររលោងដែលមុំទេរកើនឡើងនៅអត្រាថេរ ω ចាប់ផ្តើមពី $\theta = 0$ នៅខណៈ $t = 0$ ។ ចូរសរសេរសមីការចលនាដែលពណ៌នាចលនារបស់ភាគល្អិត។

៦៤. ចូរវិភាគចលនានៃប៉ោលស្វ៊ែដោយប្រើសមីការឡាក្រង់។ ប្រើកូអរដោនេ (r,θ,φ) ដូចរូប។





(លំហាត់៦៤) (លំហាត់៦៥)

៦៥. ចំណុចម៉ាសពីរ m_2 និង m_2 ត្រូវបានភ្ជាប់គ្នាដោយខ្សែមិនគិតម៉ាសមានប្រវែង l ដែលឆ្លងកាត់រន្ធតុដេកដូចរូប។ ម៉ាស m_1 ចលនាដោយគ្មានកកិតលើតុក្នុងគន្លងវង់ នៅពេល m_2 យោលដូចប៉ោលទោល។ ចូរបង្កើត និងដោះស្រាយសមីការឡាក្រង់នៃចលនា។ ចូរគណនាប្រកង់នៃលំយោល។

៦៦. សន្មតបម្លែងប្រព័ន្ធកូអរដោនេរវាងកូអរដោនេដេកាត និងកូអរដោនេប៉ូលែប្លង់ឱ្យដោយៈ $x=r\cos\theta+vt$, $y=r\sin\theta+at^2$ ដែល v និង a ជាចំនួនថេរ។ ចូរបង្ហាញថា ថាមពលស៊ីនេទិចនៅក្នុងកូអរដោនេប៉ូលែប្លង់មិនមែនអនុគមន៍ដឺក្រេទី២អូម៉ូសែននៃល្បឿន $\dot{r}$ និង $\dot{\theta}$ ។ ចូររកសមីការឡាក្រង់នៃចលនា។

ឯកសារយោង

[1] Theoretical Mechanics, First Edition 2010 by Reiner M. Dreizler • Cora S. Lüdde

[2] Analytical Mechanics, Edition 2016 by Wolfgang Nolting

[3] Theoretical Mechanics, Edition 1910 by WILLIAM RAYMOND LONGLEY

[4] Mécanique Fondementals et Application, 6e Edition 2001 par Jose-Philippe PEREZ

[5] Mécanique 2e Annee , Edition 1996 par Hubert GIE, Jean-Pierre SARMANT

[6] Mécanique, Edition 1996 par Jean-Pierre Durandeau

[7] Mécanique, Edition 1995 par Emile AMZALLAG , Josseline BEN AIM

[8] Statics and Dynamics Demystified, Edition 2007 by David McMahon

[9] Mécanique du Point, 2e Edition 2007 par Michel Henry

[10] Mechanical Vibration, Edition 2011 by S. GRAHAM KELLY

[11] Solved Problems in Classical Mechanics, First Edition 2010 by O.L. de Lange and J. Pierrus

[12] Engineering Mechanics, Dynamics, 8th Edition 215 by J.L. MERIAM, L.G. KRAIGE

[13] Engineering Mechanics, Dynamics, SI Edition 2010 Andrew Pytel, Jaan Kiusalaas

[14] Vector Mechanics for Engineers, Edition 2010 by Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr.

[15] Classical Mechanics, Edition 2005 by John r. Taylor

[16] Physics For Scientists And Engineers With Modern Physics, Edition 2008 by DOUGLAS C. GIANCOLI

[17] Fundamentals Of Physics, 10th Edition 2014 by J EAR L WALKE R

[18] Physics for Scientists And Engineers With Modern Physics, 9th Edition 2014 by Raymond A. Serway